

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3:534.1

ФОРМИРОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ПОЛОС ПРОПУСКАНИЯ И ЗАПИРАНИЯ
В УПРУГОМ ВОЛНОВОДЕ С СИСТЕМОЙ ПРЕПЯТСТВИЙ

© 2011 г. Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, Й. Вауэр*

Кубанский государственный университет 350040 Краснодар, ул. Ставропольская 149

* Karlsruhe Institute of Technology, Germany, D-76131 Karlsruhe, Kaiserstrasse, 10

E-mail: evg@math.kubsu.ru

Поступила в редакцию 9.03.10 г.

С помощью полуаналитического решения задачи о возбуждении колебаний в упруго подпертом одномерном волноводе с системой точечных препятствий анализируется связь между наблюдаемыми эффектами запираения-пропускания и распределением точек дискретного спектра рассматриваемой задачи в комплексной плоскости частоты. Проверяется предположение, сделанное ранее на основе численного анализа для двумерных упругих волноводов с протяженными препятствиями, о том, что появление частот прохождения в диапазоне запираения связано с наличием близких к вещественной оси точек дискретного спектра, число которых увеличивается пропорционально числу препятствий, давая в пределе сплошные полосы пропускания, описываемые в рамках теории Блоха-Флоке для бесконечных периодических структур.

Ключевые слова: одномерный волновод, точечные дефекты, вещественные и комплексные точки спектра, резонансное запираение и пропускание.

ВВЕДЕНИЕ

При дифракции набегающих гармонических волн $ue^{-i\omega t}$ на локальных препятствиях, расположенных в линейных волноводах, на определенных частотах может наблюдаться явление резонансного захвата и локализации волновой энергии. Резонансные частоты ω_n (частоты собственных колебаний) являются при этом точками дискретного спектра линейных операторов краевых задач, моделирующих рассматриваемый волновод, а локализованные колебания описываются собственными решениями $u_n e^{-i\omega_n t}$. Данное явление, обнаруженное и описанное Урселом для поверхностных волн в жидкости [1], получило название ловушечных мод (trapping modes). Аналогичные резонансные явления, связанные с наличием вещественных или близких к вещественным точек спектра ω_n в комплексной плоскости круговой частоты ω , известны не только для гидроакустических [2], но и для упругих волноводов и протяженных структур с локальными неоднородностями (дефектами) [3, 4, 5].

В случае, когда вещественные полюсы ω_n располагаются до первой частоты отсечки бегущих волн ω_* , резонансная локализация обуславливается неоднородными волнами с экспоненциально убывающей при удалении от места приложения нагрузки амплитудой колебаний [4]. Если же точка дискретного спектра выходит на веще-

ственную ось правее ω_* (в частотном диапазоне существования бегущих волн), резонансный захват волновой энергии нередко сопровождается резким блокированием набегающих волн, т.е. запираением волновода. На графиках частотной зависимости коэффициента прохождения $k^+(\omega)$ наличие вещественных или близких к вещественной оси точек спектра проявляется в виде резких провалов (gap bands).

Более широкие диапазоны запираения формируются в волноводах с системой периодических препятствий, например, поверхностных канавок или встречно-штырьевых электродов в частотных фильтрах на поверхностных волнах [6], акустических (фононных) решетках [7], слоистых композитах [8, 9], оптических (фотонных) кристаллах [10, 11] и других периодических структурах. В предположении бесконечного количества препятствий анализ распространения волн в периодических структурах проводится на основе теории Блоха-Флоке [12].

Небольшие изменения свойств одной или нескольких ячеек периодической структуры нередко приводят к значительному изменению свойств пропускания и запираения. Этим, в частности, объясняются сравнительно скромные практические результаты, достигнутые в фотонике, несмотря на теоретически идеальные блокирующие свойства фотонных кристаллов [13]. Задачи, возникающие при анализе прохождения сигналов

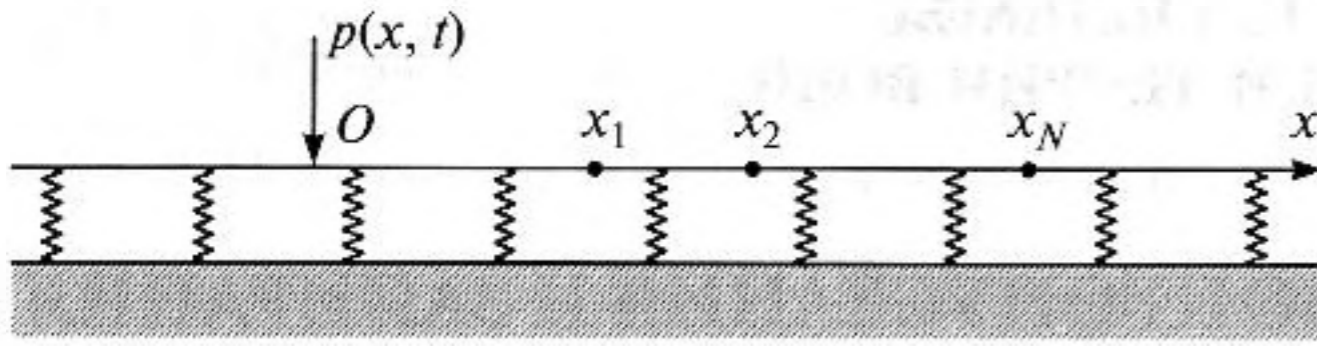


Рис. 1. Одномерный волновод с точечными дефектами.

через конечную или через бесконечную периодическую, но с флуктуацией свойств конечного числа ячеек систему препятствий, математически существенно более сложны, чем для бесконечной периодической системы или для одиночного дефекта. Поэтому сравнительно малоизученными остаются такие вопросы как возможность формирования требуемого диапазона запираения конечным числом аперодических препятствий или механизм формирования полос пропускания и запираения при увеличении числа элементов периодической системы.

В предыдущих работах [14, 15, 16] рассматривалось резонансное блокирование симметричных и антисимметричных нормальных мод в полосовом упругом волноводе с препятствиями в виде трещин. Анализ положения резонансных полюсов ω_n в нижней полуплоскости $\text{Im } \omega < 0$ комплексной плоскости ω показал, что в зависимости от изменения размеров трещины они то удаляются от вещественной оси $\text{Im } \omega = 0$, то приближаются к ней, касаясь оси при определенных значениях параметров волновода и препятствия. При этом возникает ситуация смешанного спектра (точка дискретного спектра ω_n , лежащая на непрерывном спектре $\omega > \omega_*$) с полным блокированием волновода и локализацией волновой энергии в форме энергетических вихрей [14, 16].

Расположение точек спектра для волновода с системой препятствий меняется при изменении расстояния между ними [15], поэтому оно может существенно отличаться от множества, получающегося простым объединением спектров для каждого из препятствий в отдельности. Наиболее интересным при этом оказалось изменение роли близких к вещественной оси полюсов ω_n с точки зрения блокирующих свойств системы препятствий. Если для одиночной трещины или включения приближение ω_n к вещественной оси приводит к резкому экранированию набегающих волн на частотах $\omega \approx \text{Re } \omega_n$, то для системы препятствий на этих частотах коэффициент прохождения κ^+ близок к единице, т.е. наоборот, происходит резкое отпирание волновода! Причем число полюсов ω_n , расположенных вблизи вещественной оси в некотором частотном диапазоне, увеличивается пропорционально числу препятствий, и

на графике $\kappa^+(\omega)$ эффект отпирания проявляется в виде пучка острых пиков с максимумами на близко расположенных частотах $\omega \approx \text{Re } \omega_n$ [17].

Цель настоящей работы — проанализировать данный эффект на более простой одномерной модели упругого волновода, в качестве которой выбрана упруго подпертая струна с точечными препятствиями. Этот выбор обусловлен тем, что с одной стороны, для таких волноводов присущи резонансные и ловушечные эффекты [4, 5], а с другой, ввиду относительной простоты модели их анализ возможен на основе явных аналитических представлений. Подробное описание вывода решения для данной модели и эффектов, наблюдаемых не только для периодических систем препятствий, но и в случае нарушения периодичности, приводится в работе [18].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается натянутая с силой S бесконечная струна, подкреплённая снизу упругими связями с коэффициентом жесткости c (рис. 1). Под действием динамической нагрузки $p(x, t)$ точки струны совершают вынужденные колебания $w(x, t)$, которые описываются уравнением [19]:

$$\rho A w_{,tt} + cw - S w_{,xx} = p(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

с нулевыми начальными условиями $w(x, 0) = 0$ и $w_{,t}(x, 0) = 0$. Здесь ρ и A — плотность материала струны и площадь ее поперечного сечения.

Предполагается, что волновод может иметь N точечных дефектов, которые моделируются скачкообразным изменением массы поперечного сечения ρA и/или коэффициента жесткости упругого основания c :

$$\begin{aligned} \rho A(x) &= \rho_0 A_0 \left[1 + \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta(x - x_j) \right], \\ c(x) &= c_0 \left[1 + \sum_{j=1}^N \varepsilon_j \delta(x - x_j) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, ρ_0, A_0 и c_0 — параметры волновода без дефектов, x_j — точки расположения дефектов (для определенности $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N$), а α_j и ε_j — характеризующие их безразмерные параметры. Коэффициенты α_j задают вид неоднородности самой струны: при $\alpha_j > 0$ — это дополнительная точечная масса, а при $\alpha_j < 0$ — дефект типа поперечной трещины. Поскольку при $\alpha_j = -1$ поперечное сечение в точке x_j становится нулевым, значения $\alpha_j < -1$ в рамках данной модели не имеют физического

смысла. Аналогично $\varepsilon_j > 0$ и $\varepsilon_j < 0$ описывают дополнительную точечную жесткость или, соответственно, ослабление упругого основания. В целом значения этих коэффициентов меняются в пределах $-1 < \varepsilon_j \alpha_j < \infty$.

Нестационарные колебания $w(x, t)$ представимы через частотный спектр $w(x, \omega)$ с помощью интегрального оператора обратного преобразования Фурье \mathcal{F}_t^{-1} :

$$w(x, t) = \mathcal{F}_t^{-1}[w(x, \omega)] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}_\omega} w(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \equiv \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\mathcal{L}_\omega^+} w(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3)$$

Контур интегрирования \mathcal{L}_ω идет в комплексной плоскости ω вдоль вещественной оси из $-\infty$ в $+\infty$, отклоняясь от нее при обходе вещественных особенностей спектра $w(x, \omega)$ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$; \mathcal{L}_ω^+ — часть контура, расположенная в правой полуплоскости $\operatorname{Re} \omega > 0$. Здесь и далее функции времени t и их частотные спектры обозначаются одними и теми же символами, отличаясь только аргументом t или ω . Для сокращения записи там, где вид аргументов ясен из контекста, они могут быть опущены.

Из условий покоя $w(x, t) \equiv 0, t \leq 0$ следует, что частотный спектр $w(x, \omega)$, аналитически продолженный с вещественной оси на всю комплексную плоскость ω , не может иметь особенностей в верхней полуплоскости $\operatorname{Re} \omega > 0$ и должен обладать свойством

$$w(x, \tilde{\omega}) = w^*(x, \omega), \quad \tilde{\omega} = -\omega^*. \quad (4)$$

Звездочкой здесь и далее обозначена операция комплексного сопряжения, а тильдой — операция отображения в точку комплексной плоскости, симметричную относительно мнимой оси; для вещественных величин последнее эквивалентно изменению знака: $\tilde{\omega} = -\omega$. Свойство (4) обеспечивает вещественность нестационарного решения $w(x, t)$, в частности, равенство между интегралами по \mathcal{L}_ω и по \mathcal{L}_ω^+ в представлении (3). Кроме того, если точка ω_n является изолированным полюсом функции $w(\omega)$, то $\tilde{\omega}_n$ также является ее полюсом, а вычеты в них обладают той же симметрией:

$$r_n = \operatorname{res} w(\omega) \Big|_{\omega=\omega_n} \Rightarrow \operatorname{res} w(\omega) \Big|_{\omega=\tilde{\omega}_n} = \tilde{r}_n \quad (5)$$

При замыкании контура \mathcal{L}_ω в нижнюю полуплоскость (при выполнении условий леммы Жордана) в соответствии с теоремой Коши данная пара вычетов дает вещественный вклад

$$w_n(x, t) = -i(r_n e^{-i\omega_n t} + \tilde{r}_n e^{-i\tilde{\omega}_n t}) = 2\operatorname{Im}[r_n(x) e^{-i\omega_n t}].$$

При комплексных ω_n эти составляющие решения $w(x, t)$ описывают затухающие колебания с круговой частотой $\nu_n = \operatorname{Re} \omega_n$, сдвигом фазы $\varphi_n: r_n = |r_n| e^{i\varphi_n}$ и декрементом затухания $\theta_n = |\operatorname{Im} \omega_n|$:

$$w_n(x, t) = 2|r_n(x)| \sin(\varphi_n - \nu_n t) e^{-\theta_n t}. \quad (6)$$

При вещественном ω_n колебания $w_n(x, t)$ становятся незатухающими. Для чисто мнимых полюсов $\omega_n = -i\theta_n$ вычеты r_n также являются чисто мнимыми величинами.

В дальнейшем для простоты предполагается, что нагрузка p — точечная, приложенная в начале координат:

$$p(x, t) = p_0 \delta(x) f(t), \quad f(t) \equiv 0 \text{ при } t < 0. \quad (7)$$

В этом случае частотный спектр $w(x, \omega)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$S w_{,xx} + (\omega^2 \rho A - c) w = -p_0 F(\omega) \delta(x), \quad (8)$$

которое получается из уравнения (1) после применения к нему преобразования Фурье по времени \mathcal{F}_t :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t[w(x, t)] &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) e^{i\omega t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} w(x, t) e^{i\omega t} dt = w(x, \omega), \end{aligned} \quad (9)$$

$F(\omega) = \mathcal{F}_t[f]$ — частотный спектр функции $f(t)$, задающей форму импульса воздействия p . Ввиду общего свойства δ -функции $w(x) \delta(x - x_j) = w(x_j) \delta(x - x_j)$, составляющие, описывающие наличие дефектов, могут быть выделены и перенесены в правую часть, что приводит к уравнению с постоянными коэффициентами с неизвестными комплексными амплитудами колебаний дефектов $w_j = w(x_j, \omega)$ в правой части:

$$\begin{aligned} S w_{,xx} + (\omega^2 \rho_0 A_0 - c_0) w &= \\ = -p_0 F(\omega) \delta(x) + \sum_{j=1}^N w_j (c_0 \varepsilon_j - \omega^2 \rho_0 A_0 \alpha_j) \delta(x - x_j). \end{aligned} \quad (10)$$

Для сокращения числа входных параметров дальнейший анализ проводится в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x/h, \quad \bar{x}_j = x_j/h, \quad \bar{w}(\bar{x}, \bar{\omega}) = w/(h t_0), \\ \bar{\omega} &= \omega/f_0 = h \sqrt{\rho_0 A_0/S} \omega, \quad \bar{c}^2 = h^2 c_0/S; \end{aligned}$$

здесь h — некоторая характерная длина, а $t_0 = h \sqrt{\rho_0 A_0/S}$ и $f_0 = 1/t_0$ — единицы времени и частоты. Учитывая, что решение w прямо пропорцио-

нально амплитуде приложенной нагрузки $p_0 F$, достаточно рассмотреть безразмерное уравнение

$$\bar{w}'' + k_0^2 \bar{w} = \delta(\bar{x}) + \sum_{j=1}^N \bar{w}_j (\bar{c}^2 \varepsilon_j - \bar{w}^2 \alpha_j) \delta(\bar{x} - \bar{x}_j), \quad (11)$$

в котором

$$k_0^2 = \bar{\omega}^2 - \bar{c}^2 = \frac{h^2 \rho_0 A_0}{S} \omega^2 - \frac{h^2}{S} c_0^2$$

Размерное решение выражается через решение уравнения (11) с помощью соотношения

$$w(x, \omega) = -\frac{h^2}{S} p_0 F(\omega) \bar{w}(x/h, \omega/f_0).$$

В дальнейших выкладках черточки над безразмерными величинами опущены.

ДИНАМИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ СТРУНЫ С ДЕФЕКТАМИ

Для анализа дифракции на заданной системе точечных дефектов удобно воспользоваться представлением решения уравнения (11) через функцию Грина струны $g(x, \omega)$:

$$g'' + k_0^2 g = \delta(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (12)$$

Частное решение уравнения (12), удовлетворяющее на бесконечности условиям излучения Зоммерфельда при вещественных $k_0(\omega)$ и ограниченное при комплексных, имеет вид

$$g(x) = \frac{e^{ik_0|x|}}{2ik_0}, \quad k_0(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\omega^2 - c^2}, & \omega > c \\ i\sqrt{c^2 - \omega^2}, & |\omega| \leq c \\ -\sqrt{\omega^2 - c^2}, & \omega < -c \end{cases}. \quad (13)$$

Выбор ветвей радикала для волнового числа k_0 согласуется со свойством (4). При аналитическом продолжении в комплексную плоскость эти ветви фиксируются разрезами, идущими от точек ветвления $\pm c$ вниз на бесконечность $\pm c - i\infty$.

Непрерывный спектр волновода совпадает с лежащими на вещественной оси лучами $-\infty < \omega < -c$ и $c < \omega < \infty$. На этих частотах волновое число k_0 вещественно и гармоническое решение $ge^{-i\omega t}$ описывает незатухающие волны $e^{i(k_0|x| - \omega t)}$, распространяющиеся вправо и влево от источника с фазовой скоростью $v_{ph} = \omega/\sqrt{\omega^2 - c^2}$ и групповой $v_{gr} = 1/v_{ph} = \sqrt{\omega^2 - c^2}/\omega$. С ростом частоты групповая скорость монотонно увеличивается от $v_{gr} = 0$ на частоте отсечки $\omega_* = c$ до $v_{gr} = 1$ при $\omega \rightarrow \infty$. Вне непрерывного спектра на частотах $-c < \omega < c$ распространяющихся волн нет, и $|g| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, т.е. волновод заперт.

С помощью функции Грина g общее решение уравнения (11) можно выписать в виде

$$w(x, \omega) = g(x, \omega) + \sum_{j=1}^N f_j(\omega) g(x - x_j, \omega), \quad (14)$$

$$f_j = w_j (c^2 \varepsilon_j - \omega^2 \alpha_j).$$

Оно определено с точностью до N неизвестных констант w_j , которые в свою очередь определяются из линейной алгебраической системы относительно вектора неизвестных $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$:

$$A\mathbf{w} = \mathbf{g}, \quad (15)$$

$A = 2ik_0 I - B$, I — единичная матрица, $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^N$, $b_{ij} = d_j e_{ij}$, $d_j = c^2 \varepsilon_j - \omega^2 \alpha_j$, $e_{ij} = e^{ik_0|x_i - x_j|}$, $\mathbf{g} = [e_1, e_2, \dots, e_N]^T$, $e_i = e^{ik_0|x_i|}$. Система (15) возникает при подстановке $w(x)$ вида (14) в N условий для амплитуды колебаний дефектных точек: $w(x_j) = w_j$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Точки спектра ω_n (полюсы функции $w(x, \omega)$ в комплексной плоскости ω) совпадают с корнями характеристического уравнения

$$\Delta(\omega) \equiv \det A(\omega) = 0, \quad (16)$$

где A — матрица системы (15). Соответствующие им собственные формы колебаний струны $w_n(x)$ описываются тем же представлением (14), в котором $\omega = \omega_n$, а в качестве коэффициентов w_j взяты компоненты собственного вектора \mathbf{w}_n : $A(\omega_n)\mathbf{w}_n = 0$.

Разложение (14), определяющее динамическую реакцию струны с дефектами, можно интерпретировать как суперпозицию частотных спектров колебаний, вызываемых в бездефектной струне исходным сосредоточенным импульсом $p = \delta(x)\delta(t)$ (первое слагаемое) и условными нагрузками $p = \delta(x - x_j)f_j(t)$, приложенными в точках расположения дефектов x_j . Другими словами, дефекты работают как точечные источники, форма импульса которых $f_j(t) = \mathcal{F}_t^{-1}[f_j(\omega)]$ определяется коэффициентами разложения (14). Соответственно нестационарная реакция струны $w(x, t) = \mathcal{F}_t^{-1}[w(x, \omega)]$ представима в виде суммы исходного сигнала $g(x, t) = \mathcal{F}_t^{-1}[g(x, \omega)]$ и возбуждаемых колеблющимися дефектами волновых посылок $u_j(x, t)$:

$$w(x, t) = g(x, t) + \sum_{j=1}^N u_j(x, t) \quad (17)$$

$$u_j(x, t) = f_j * g_j \equiv \int_{|x-x_j|}^{t-x_j} f_j(t - \tau) g(x - x_j, \tau) d\tau.$$

Значения нижних пределов $|x - x_j|$ интегральных свертков определяются свойством покоя фундаментального решения

$$g(x, t) \equiv 0 \quad \text{при } t < |x|, \quad (18)$$

которое является следствием того, что

$$k_0(\omega) \sim \omega, \text{ и } e^{ik_0|x|} e^{-i\omega t} \sim e^{i\omega(|x|-t)} \quad (19)$$

при $|\omega| \rightarrow \infty, \text{Im}\omega \geq 0$.

В интегральном представлении вида (3), но для $g(x, t)$, экспоненциальное поведение (19) спектра $g(x, \omega)$ позволяет замкнуть контур \mathcal{L}_ω в верхнюю полуплоскость $\text{Im}\omega > 0$ при $|x| - t > 0$. Отсутствие особых точек выше \mathcal{L}_ω и приводит к условию (18), означающему, что точка x струны без дефектов находится в покое до момента прихода переднего фронта с предельно возможной скоростью $v_{gr} = 1$.

Верхние пределы $t - x_j$ также обусловлены свойством покоя, но уже дополнительных источников: $f_j(t) \equiv 0$ при $t < x_j$. Физически оно также означает, что дефект находится в покое до времени прихода переднего фронта, движущегося с единичной скоростью от источника, расположенного в начале координат, а математически определяется экспоненциальным поведением частотного спектра

$$f_j(\omega) \sim O(e^{i\omega x_j}), \quad |\omega| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\omega \geq 0, \quad (20)$$

позволяющем в представлении $f_j(t)$ замыкать контур \mathcal{L}_ω вверх при $t < x_j$. Поведением (20) обладают входящие в $f_j(\omega)$ коэффициенты $w_j(\omega)$ в силу того, что при $\text{Im}\omega \rightarrow \infty$ так ведут себя компоненты e_i вектора правой части системы (15), а матрица системы A вырождается при этом в диагональную.

Сигналы $u_j(x, t)$ также удовлетворяют условию покоя

$$u_j(x, t) = 0 \quad \text{при } t < x_j + |x - x_j|, \quad (21)$$

которое имеет место для тех t , при которых верхний предел $t - x_j$ в свертке (17) меньше нижнего. Точка x находится в покое до времени прихода в нее переднего фронта от дефекта x_j после включения условного источника в момент времени $t = x_j$. При $t > x_j + |x - x_j|$ форма переотраженных сигналов $u_j(x, t)$ в значительной степени определяется вкладом вычетов в вещественных и близких к вещественной оси полюсах ω_n , имеющим вид (6).

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

В случае одного дефекта

$$w(x, \omega) = \frac{1}{2ik_0} \left[e^{ik_0|x|} + \frac{c^2 \varepsilon - \omega^2 \alpha}{\Delta(\omega)} e^{ik_0(x_1 + |x - x_1|)} \right] \quad (22)$$

$$\Delta(\omega) = 2ik_0 - c^2 \varepsilon + \omega^2 \alpha \quad (\varepsilon = \varepsilon_1, \alpha = \alpha_1)$$

и корни характеристического уравнения $\Delta(\omega) = 0$ могут быть выписаны в явном виде. Несложный анализ показывает, что оно не может иметь вещественных корней при $\omega > c$ (на непрерывном спектре), а в диапазоне запираения $\omega < c$ имеется точка дискретного спектра

$$\omega_1 = \sqrt{\alpha \varepsilon c^2 - 2 + 2\sqrt{1 + \alpha c^2(\alpha - \varepsilon)}/\alpha},$$

если $\max[-2/c; -1] < \varepsilon < \alpha < \infty$. При $\alpha = 0$ корень $\omega_1 = c\sqrt{1 - \varepsilon^2 c^2/4}$, $|\varepsilon|c < 2$, а при $\alpha < 0$ наряду с ω_1 может появиться второй вещественный корень

$$\omega_2 = \sqrt{\alpha \varepsilon c^2 - 2 - 2\sqrt{1 + \alpha c^2(\alpha - \varepsilon)}/\alpha}$$

при тех α, ε и c , для которых оба подкоренных выражения положительны.

Примеры зависимости вещественных полюсов ω_n от параметров $\alpha_j = \alpha$ и $\varepsilon_j = \varepsilon$ для N одинаковых дефектов и от расстояния между ними $a = |x_{j+1} - x_j|$ при $c = 4$ и $N = 1, 2$ и 5 приводятся на рис. 2 и 3. В случае одного дефекта (рис. 2 для $N = 1$) графики зависимостей $\omega_n(\varepsilon)$ при фиксированных $\alpha = -0.5, 0, 1, 2$ и 5 имеют вид куста, ветви которого начинаются из точки $\varepsilon_0 = -2/c = -0.5$, в которой $\omega_n = 0$, и с увеличением (при $\alpha > \varepsilon_0$) или уменьшением (при $\alpha < \varepsilon_0$) параметра ε достигают предельного значения $\omega_n = c$ при $\varepsilon = \alpha$; далее, при $\varepsilon > \alpha$ через точку $\omega = c$ корень выходит в комплексную плоскость. Отрицательный угол наклона касательной к кривой для $\alpha = -0.5$ показывает, что в этом случае при фиксированных ε имеется по два вещественных корня ω_1 и ω_2 .

Число таких кустов с ветвями $\omega_n(\varepsilon)$, начинающимися из одного корня, расположенного справа и слева от ε_0 , увеличивается пропорционально числу дефектов N (рис. 2 для $N = 5$). Расстояние между точками выхода ветвей увеличивается при уменьшении расстояния между дефектами a (см. серию графиков на рис. 3 для $N = 2$ и $a = 1, 0.5, 0.2$ и 0.1). При сравнительно больших a , когда взаимное влияние дефектов невелико, корни $\omega_n(\varepsilon)$ следуют вдоль траекторий, близких к соответствующим ветвям для случая $N = 1$ (рис. 3, $a = 1$), а с уменьшением a они начинают расходиться (рис. 3, $a = 0.5$), причем правый куст более консервативен, оставаясь примерно таким же при всех $a \rightarrow 0$,

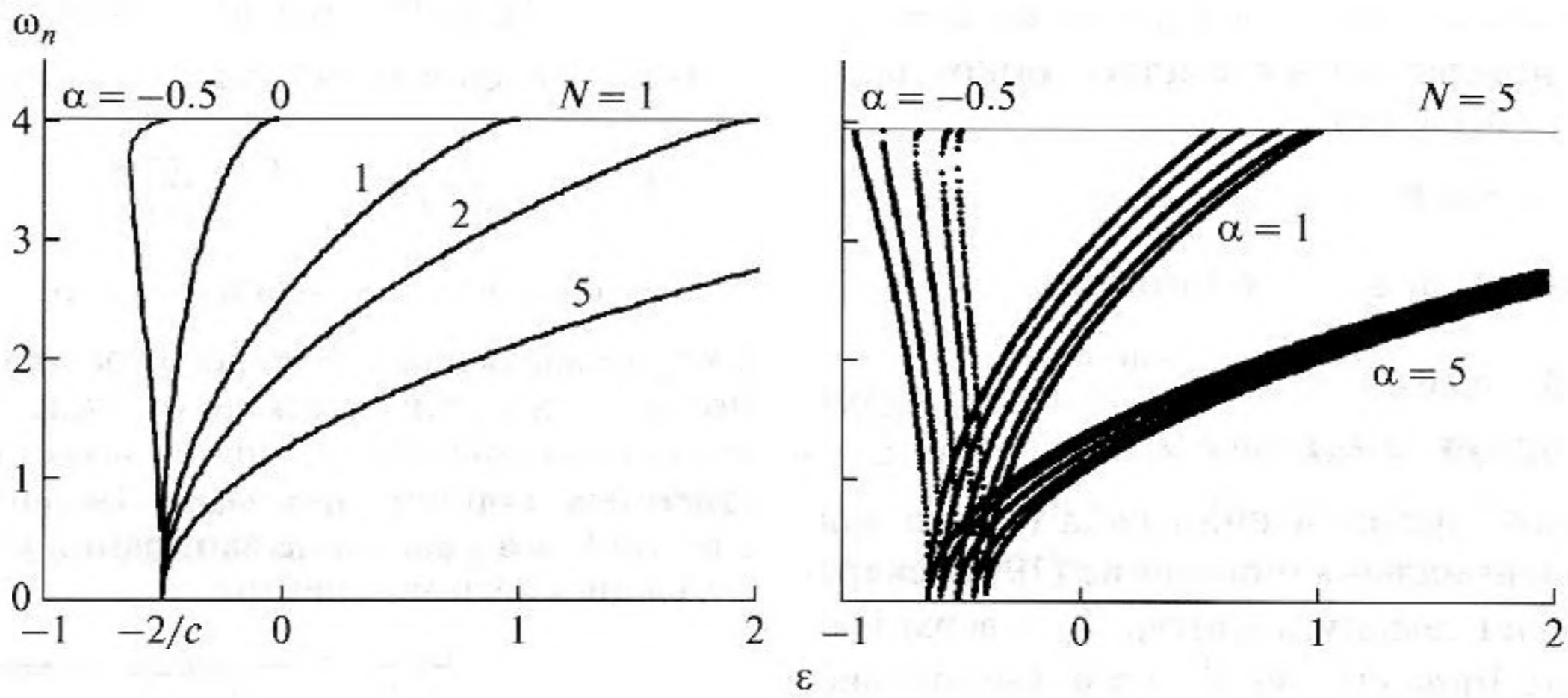


Рис. 2. Вещественные полюсы ω_n в зависимости от α и ε для одного (слева) и пяти (справа) одинаковых дефектов; $a = 0.5$, $c = 4$.

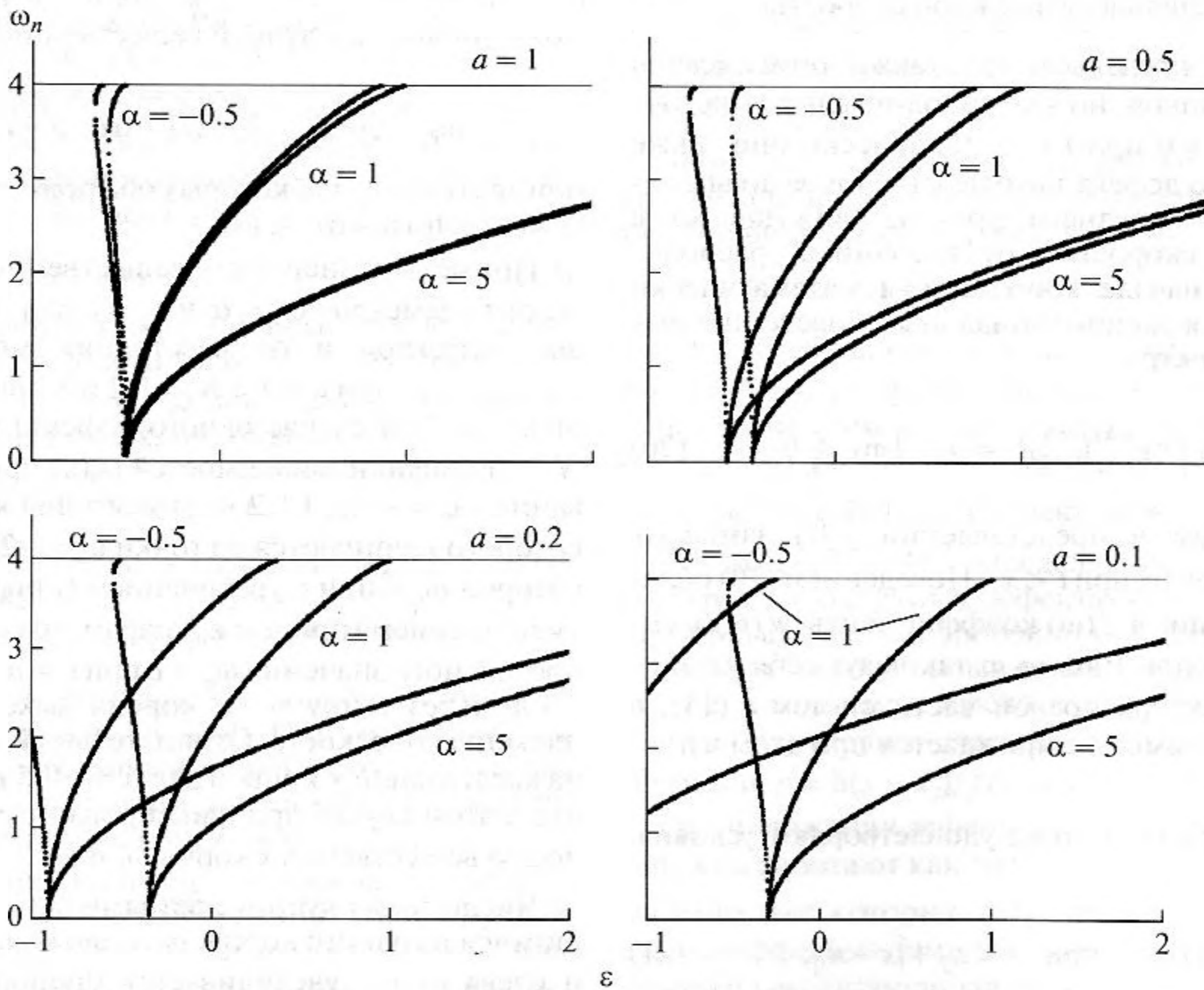


Рис. 3. Вещественные полюсы ω_n при различном расстоянии a между двумя дефектами.

в то время как второй движется, ускоряясь влево (рис. 3, $a = 0.2$ и $a = 0.1$), покидая допустимые пределы $\varepsilon > -1$.

Что касается зоны бегущих волн $\omega > c$, то при $N \geq 2$, как и в случае $N = 1$, вещественные полюсы здесь не выявлены. В случае двух дефектов их отсутствие устанавливается, исходя из яв-

ного вида характеристического уравнения

$$\Delta = (2ik_0 - d_1)(2ik_0 - d_2) - d_1 d_2 e^{2ik_0 a} = 0. \quad (23)$$

При вещественных $\omega > c$ оно распадается на два уравнения

$$\begin{cases} \cos 2k_0 a = 1 - 4k_0^2 / (d_1 d_2) \\ \sin 2k_0 a = -2k_0 (d_1 + d_2) / (d_1 d_2), \end{cases} \quad (24)$$

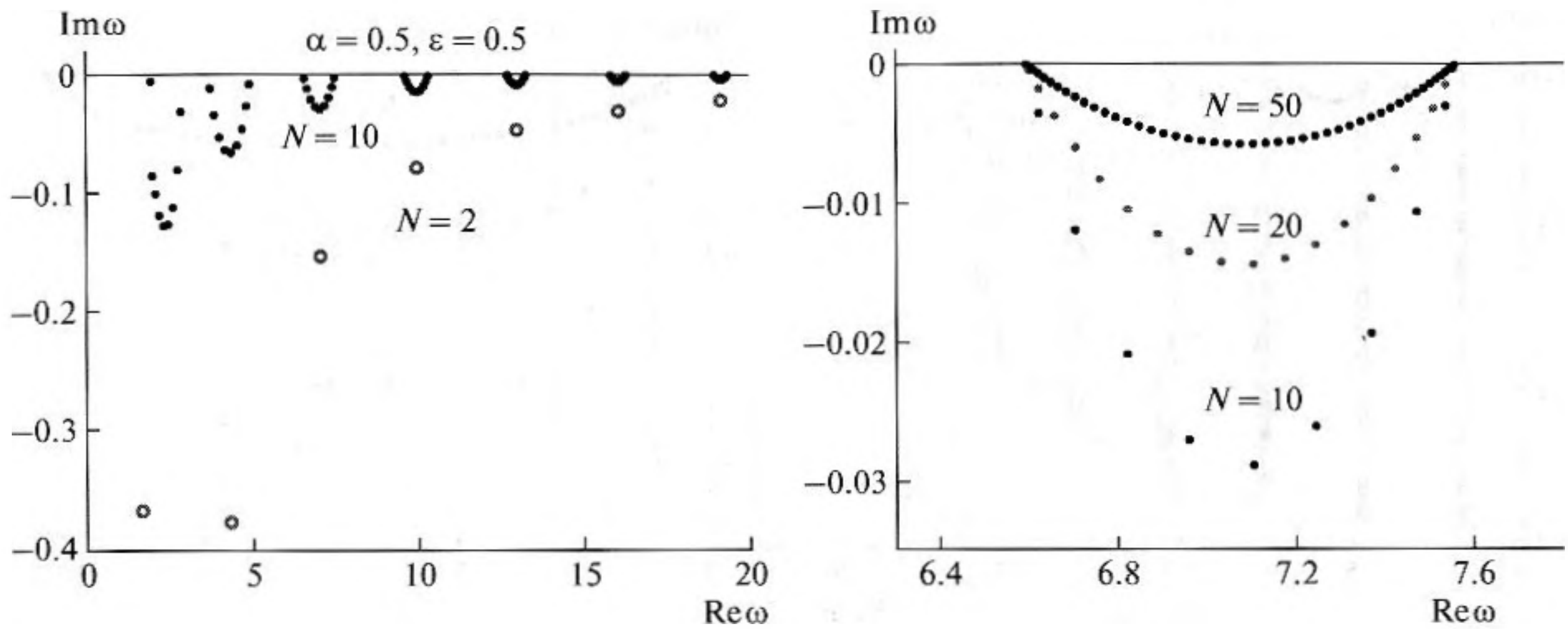


Рис. 4. Расположение полюсов ω_n в комплексной плоскости при различном числе одинаковых дефектов с параметрами $\alpha = 0.5, \varepsilon = 0.5, a = 1$.

возводя в квадрат и складывая которые, приходим к соотношению $d_1^2 + d_2^2 + 4k_0^2 = 0$, не допускающему вещественных решений.

С другой стороны, при $\alpha \neq 0$ в правой части системы (24) имеются слагаемые, стремящиеся к нулю при $\omega \rightarrow \infty$:

$$\begin{cases} \cos 2k_0 a = 1 + O(\omega^{-2}) \\ \sin 2k_0 a = O(\omega^{-1}) \end{cases} \text{ при } \omega \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Отсюда следует, что уравнение (23) должно иметь бесконечный набор близких к вещественной оси корней, распределение которых описывается асимптотикой

$$\omega_n = \sqrt{c^2 + (\pi n/a)^2} + O(\omega^{-1}), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad n = 1, 2, \dots, \alpha \neq 0. \quad (26)$$

Мнимые части этих корней являются отрицательными, стремящимися к нулю величинами, т.е. с ростом номера n полюсы прижимаются снизу к вещественной оси.

При $\alpha = 0$ асимптотика полюсов, идущих вдоль вещественной оси, выводится непосредственно из уравнения (23):

$$\omega_n \sim \left[\pi(n + 1/2) - i \ln \left| \frac{2\omega_n}{c^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \right| \right] / a, \quad n \rightarrow \infty. \quad (27)$$

В то время как $\text{Re } \omega_n$ идут здесь с тем же шагом π/a , на который при больших n выходит и асимптотика (26), мнимая часть этих полюсов логарифмически растет, т.е. они постепенно отклоняются от вещественной оси вниз.

Наличие периодических тригонометрических функций $e_{ij} = \cos k_0 a_{ij} + i \sin k_0 a_{ij}$, $a_{ij} = |x_i - x_j|$ в характеристических уравнениях при $N \geq 2$ указы-

вает на то, что и при числе дефектов больше двух должны существовать аналогичные периодически повторяющиеся с увеличением ω наборы комплексных корней. А структура множества вещественных корней (рис. 2 и 3) подсказывает, что это должны быть периодически повторяющиеся группы полюсов, расположенных примерно там же, где и полюсы для двух дефектов, с числом полюсов в группе, пропорциональным числу дефектов.

В качестве примера на рис. 4 и 5 слева кружочками показаны комплексные полюсы ω_n для двух дефектов с параметрами $\alpha = 0.5, \varepsilon = 0.5$ и $\alpha = 0, \varepsilon = 1$ соответственно, а темными точками — комплексные полюсы для $N = 10$ таких же дефектов, равномерно разнесенных с шагом $a = 1$. Справа на рис. 4 и 5 даны укрупненные участки комплексной плоскости ω , на которых показано, как меняется вид одной из групп полюсов при увеличении числа препятствий ($N = 10, 20$ и 50). Во всех случаях число полюсов в группе равно $N - 1$.

Приведенные примеры отличаются тем, что в первом случае препятствия имеют вид дополнительных точечных масс ($\alpha > 0$) и увеличенной упругой жесткости основания в местах их расположения ($\varepsilon > 0$), а во втором случае дополнительные массы отсутствуют ($\alpha = 0$). В соответствии с асимптотиками (26) и (27) для $N = 2$ полюсы с ростом частоты в первом случае приближаются к вещественной оси, а во втором — отклоняются от нее. Однако с увеличением N в обоих случаях полюсы прижимаются к вещественной оси. При этом в первом случае полюсы стягиваются к интервалам вещественной оси, размер которых уменьшается с ростом ω , а во втором уменьшаются интервалы между группами. Как показывает

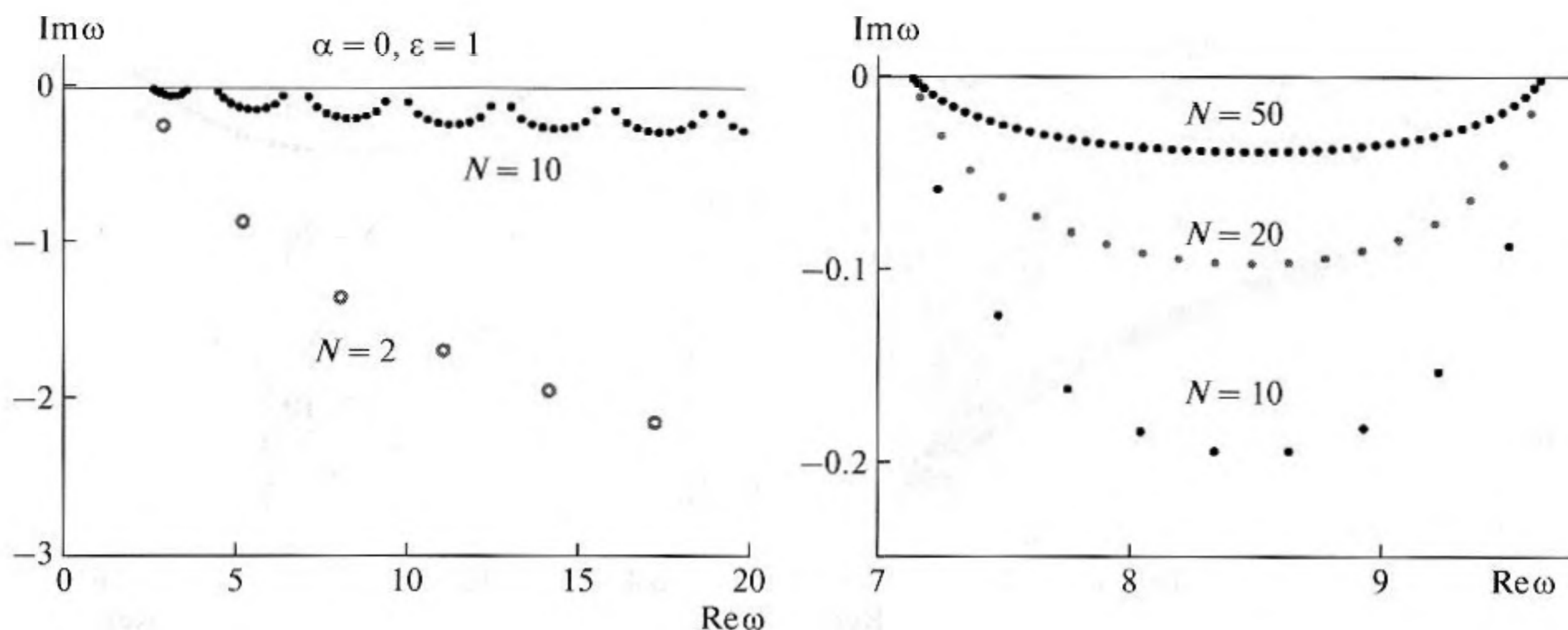


Рис. 5. То же, что и на рис. 4 для дефектов с параметрами $\alpha = 0, \varepsilon = 1$.

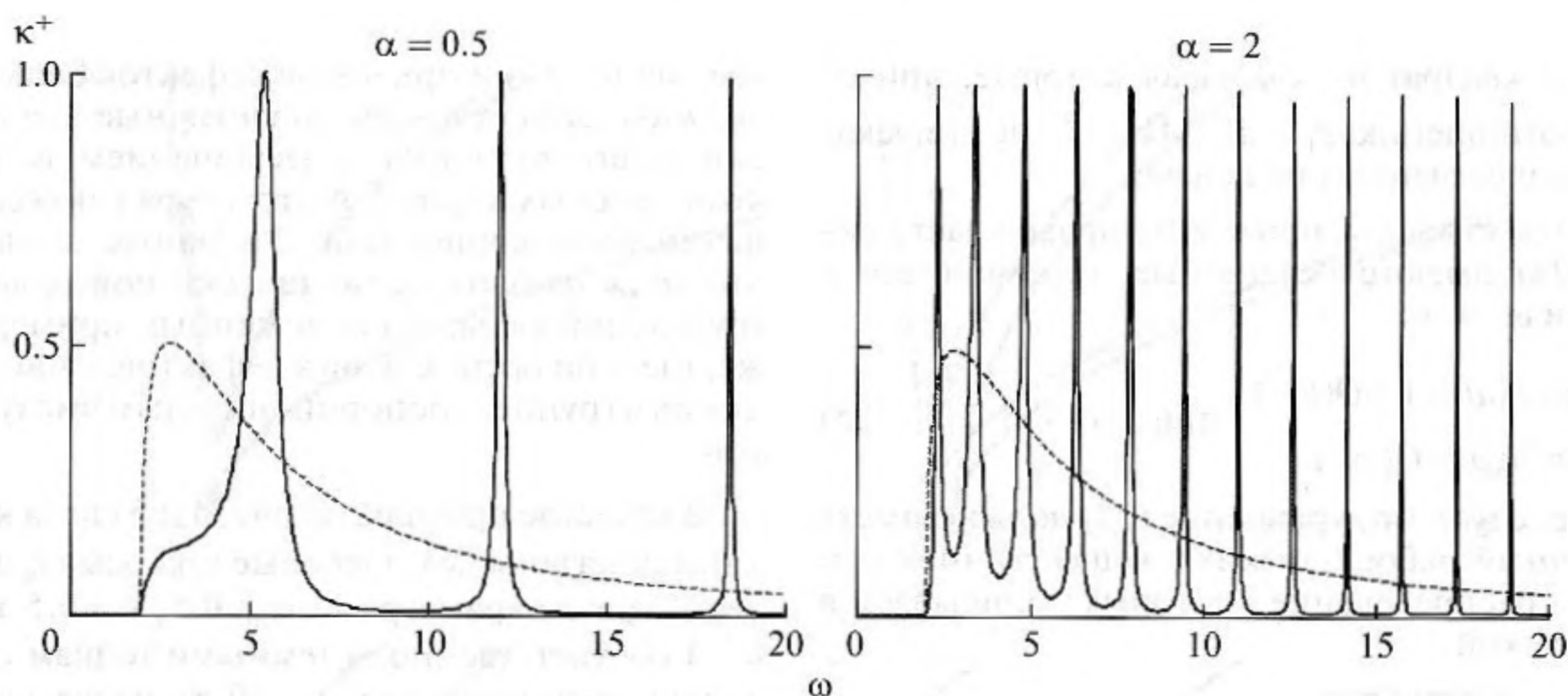


Рис. 6. Частотная зависимость коэффициента прохождения κ^+ при различном расстоянии a между двумя дефектами с параметрами $\alpha = -0.5$ и $\varepsilon = 0$.

анализ частотной зависимости коэффициента прохождения $\kappa^+(\omega)$, формирование диапазонов прохождения и запираения тесно связано с распределением полюсов ω_n , прилегающих к вещественной оси.

ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН ЧЕРЕЗ ДЕФЕКТНУЮ ЗОНУ

Традиционно коэффициент прохождения κ^+ вводится в виде отношения осредненной за период колебаний энергии бегущих волн, распространяющихся за препятствием, к энергии набегающих волн (см., например, [14, 15]). В рассматриваемой задаче удобно ввести его в виде квадрата отношения амплитуды колебаний струны в лю-

бой точке $x^+ > x_N$ за препятствиями к амплитуде колебаний струны без дефектов в той же точке x^+ :

$$\kappa^+(\omega) = |w(x^+, \omega)|^2 / |g(x^+, \omega)|^2, \quad \omega > c. \quad (28)$$

В случае одного дефекта, когда нет комплексных точек спектра ω_n , прилегающих к непрерывному спектру, зависимости коэффициента прохождения от частоты имеют вид плавных кривых с монотонным стремлением к нулю или единице при $\omega \rightarrow \infty$. Но уже при $N = 2$ характер зависимости резко меняется: появляются периодические пики, вершины которых в случае двух одинаковых дефектов достигают единицы (полное прохождение), а расстояние между которыми (период повторения по оси частоты) обратно пропорционально расстоянию между дефектами a (рис. 6

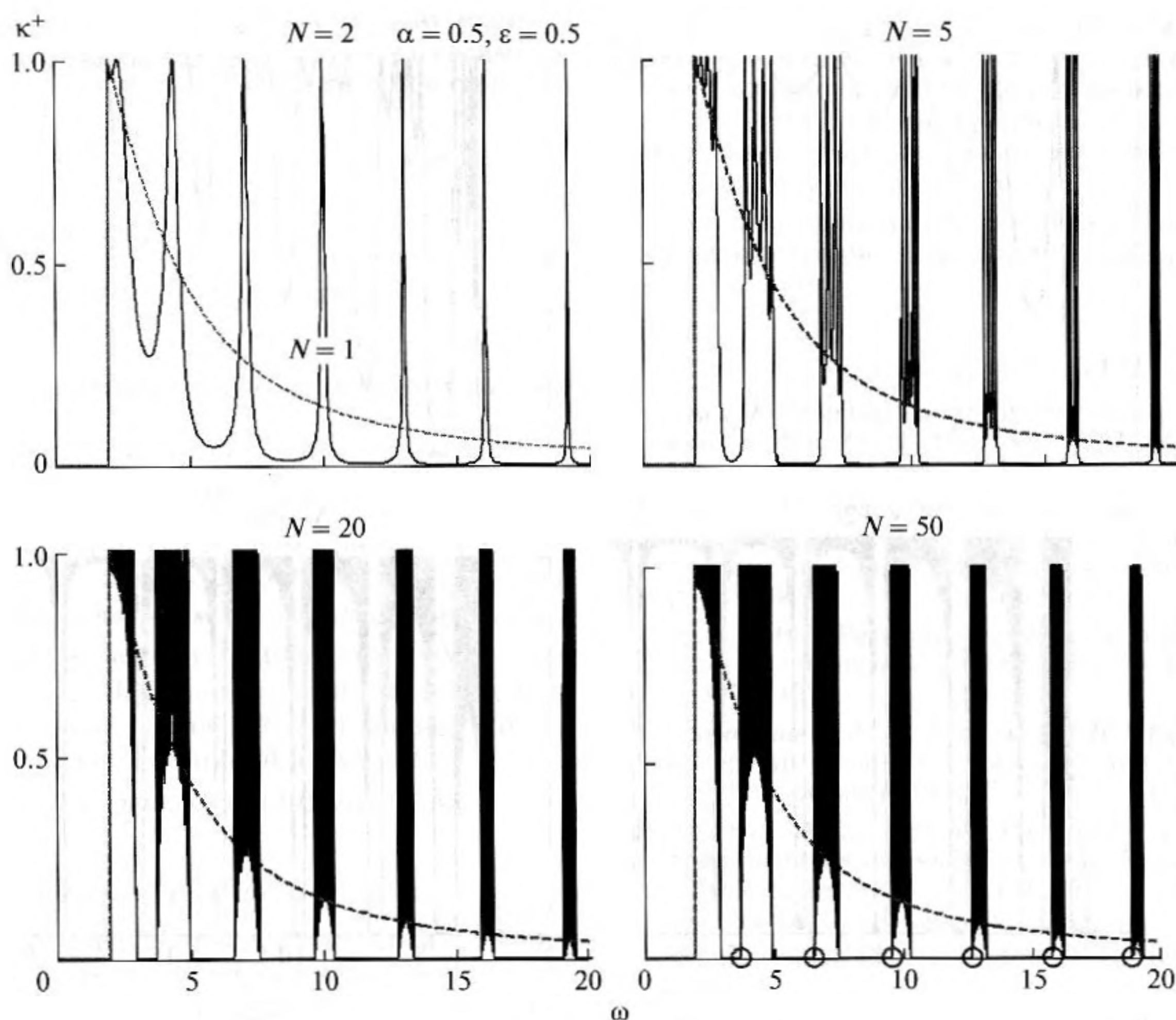


Рис. 7. Формирование полос пропускания и записания при увеличении числа дефектов.

для двух дефектов в виде поперечных трещин ($\alpha = -0.5, \epsilon = 0$), пунктиром здесь и далее показана зависимость $\kappa^+(\omega)$ для соответствующего одиночного дефекта). Центральные частоты пиков ω_p располагаются над комплексными полюсами ω_n : $\omega_p \approx \text{Re} \omega_n$, т.е. в точках, описываемых асимптотиками (26) и (27). Так как при увеличении числа одинаковых дефектов пропорционально растет и число почти вещественных полюсов в каждой группе (рис. 4–5), соответственно появляется и столько же новых пиков, т.е. частот полного прохождения ω_p (рис. 7–8). С ростом N частоты прохождения плотно заполняют диапазон, к которому прилегает соответствующая группа полюсов ω_n , а пики практически сливаются в темные полосы над этими диапазонами (см. рис. 7 для $N = 20$ и $N = 50$). Тем самым при $N \rightarrow \infty$ данные частотные диапазоны становятся диапазонами полного прохождения для волновода с бесконечной периодической микроструктурой. В разделяющих их частотных интервалах, напротив,

$\kappa^+(\omega) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, т.е. они вырождаются в диапазоны полного записания.

Показанные пунктиром зависимости $\kappa^+(\omega)$ для одиночного дефекта проявляются и в случае N дефектов, ограничивая сверху минимальные значения κ^+ между пиками в формирующемся диапазоне прохождения. Данные минимумы тем меньше, чем ближе соответствующие полюсы ω_n к вещественной оси, поэтому расположение последних в комплексной плоскости в виде провисающих цепочек (рис. 4 и 5 справа) проявляется на рис. 7–8 в виде светлых арок, ограничивающих снизу темные полосы пропускания. Во втором примере, когда сама струна не повреждена ($\alpha = 0$, рис. 8), для одиночного дефекта $\kappa^+ \rightarrow 1$ при $\omega \rightarrow \infty$ и, как следствие, при больших N на высоких частотах наблюдается почти полное прохождение, перемежаемое сокращающимися с ростом ω полосами записания.

Следует отметить, что пики на рис. 7 похожи не только на обнаруженные ранее пики для упру-

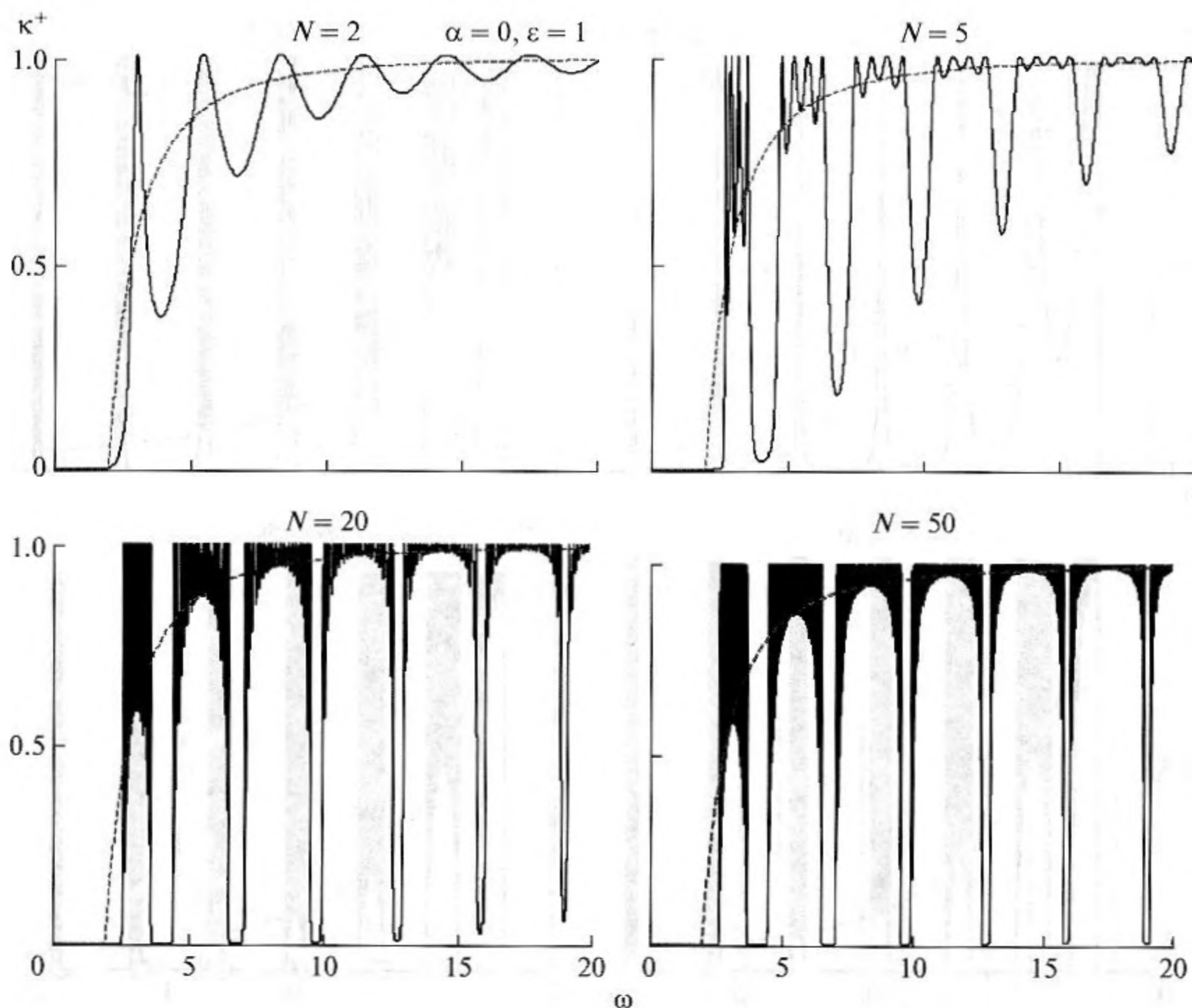


Рис. 8. То же, что и на рис. 7 для дефектов с параметрами $\alpha = 0, \varepsilon = 1$.

гой полосы с несколькими трещинами или включениями [15, 17], но и на пики резонансного прохождения акустических волн через конечное число слоев (см. [9], рис. 2), а полосы пропускания на рис. 8 выглядят так же, как и на графиках κ^+ для конечных фоновых решеток (см. [7], рис. 5, 6).

Естественно предположить, что формирующиеся при $N \rightarrow \infty$ диапазоны прохождения и записания совпадают с диапазонами, получающимися для бесконечных периодических структур в рамках теории Блоха–Флоке. В соответствии с данной теорией волновое решение для структуры с периодом a ищется в виде $w(x, \omega) = e^{i\beta x} v(x, \omega)$, где v – периодическая функция: $v(x + a) = v(x)$. Из уравнений, описывающих поведение периодических ячеек, и граничных условий между ними, выводится характеристическое уравнение $\Delta(\beta, \omega) = 0$, связывающее волновое число β и частоту: $\omega = \omega_n(\beta)$ или $\beta = \beta_n(\omega)$. Вещественным участкам этих зависимостей соответствуют распространяющиеся волны, т.е. соответствующие частотные диапазоны являются полосами про-

пускания ($\kappa^+ = 1$), а комплексным значениям $\beta_n(\omega)$ соответствуют частоты запираения ($\kappa^+ = 0$). Для рассматриваемого волновода характеристическое уравнение имеет вид

$$\Delta(\beta, \omega) \equiv \cos ak_0 + \frac{da}{k_0} \sin ak_0 - \cos a\beta = 0, \quad (29)$$

$$d = c^2 \varepsilon - \omega^2 \alpha.$$

Поскольку при вещественных β $|\cos a\beta| < 1$, то это уравнение может иметь вещественные корни только, если

$$\left| \cos ak_0 + \frac{da}{k_0} \sin ak_0 \right| < 1. \quad (30)$$

Вещественные ω , удовлетворяющие данному неравенству, и определяют диапазоны пропускания. Численный анализ подтверждает их совпадение с полосами пропускания, получающимися при $N \rightarrow \infty$, т.е. с теми участками вещественной оси, возле которых концентрируются близкие к вещественной оси полюса ω_n .

В частности, на высоких частотах их границы можно оценить аналитически, исходя из асимптотического поведения коэффициента при синусе

$$\frac{da}{k_0} \sim \begin{cases} O(\omega), & \alpha \neq 0 \\ O(\omega^{-1}), & \alpha = 0 \end{cases} \text{ при } \omega \rightarrow \infty.$$

Как следствие, при $\alpha \neq 0$

$$|\sin ak_0| \sim O(\omega^{-1}) \Rightarrow |ak_0 + \pi n| < \delta_n \rightarrow 0, \\ \text{при } \omega \rightarrow \infty,$$

или, разрешая относительно ω , приходим к оценке

$$|\omega - \omega_{pn}| < O(\delta_n), \omega_{pn} = \sqrt{c^2 + (\pi n/a)^2}, \\ \delta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

показывающей, что в первом примере (рис. 7) с ростом ω полосы пропускания стягиваются к точкам ω_{pn} , совпадающим с описываемыми асимптотикой (26) вещественными частями полюсов ω_n в случае $N = 2$. Последние отмечены кружочками на оси ω рисунка 7 для $NP = 50$; видно, что они совпадают с левой границей этих полос.

При $\alpha = 0$ неравенство (30) можно записать в виде

$$|\cos ak_0| < 1 - O(\omega^{-1}), \quad \omega \rightarrow \infty,$$

из которого следует, что допустимыми являются почти все ω , кроме лежащих в малой окрестности тех же точек ω_{pn} , в которых значение косинуса равно единице, что совпадает с видом узких и сокращающихся полос записания на рис. 8.

Строгая картина формирования полос полного пропускания и запираения резко нарушается при изменении свойств даже одного из препятствий. При этом, если меняются только параметры дефектов, а расстояние остается прежним, то периодичность пиков сохраняется, но их высота может измениться существенно. Если же имеется флуктуация расстояний между препятствиями (размера ячеек), то появляются соответствующие новым размерам периодические наборы почти вещественных полюсов, проявляющиеся в виде дополнительных пиков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена удобная для волнового анализа математическая модель вынужденных колебаний упруго подпертой струны с точечными дефектами, в рамках которой проанализирована связь между спектральными свойствами рассматриваемой задачи и эффектом резонансного отпираания волновода. Показано, что препятствия становятся акустически прозрачными на тех частотах, вблизи которых появляются близкие к вещественной оси комплексные резонансные полюсы

ω_n , причем их число в ограниченном частотном диапазоне возрастает с ростом числа препятствий; это приводит в пределе к формированию сплошной полосы пропускания, т.е. диапазона существования бегущих волн в волноводе с периодической микроструктурой.

Работа выполнена при поддержке Аналитической ведомственной целевой программы (проект № 2.1.1/1231).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ursell F.* Trapping modes in the theory of surface waves // Proc. Camb. Phil. Soc. V. 47. 1951. P. 347–358.
2. *Linton C.M., Evans D.V.* Trapped modes above a submerged horizontal plate // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1991. V. 44(3). P. 487–506.
3. *Ворович И.И.* Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // ДАН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.
4. *Бобровицкий Ю.И., Коротков М.П.* Резонансы неоднородных волн в протяженных упругих структурах // Акуст. журн. 1991. Т. 37. Вып. 5. С. 872–878.
5. *Abramian A.K., Andreyev V.L., and Indeitsev D.A.* Trapped modes of oscillation in an elastic system // J. Tech. Acoust. 1995. 2(3). P. 3–17.
6. *Мэзон У.* Физическая акустика: Методы и приборы ультразвуковых исследований. Т. 1. Ч. А. М: Мир, 1966. 592 с.
7. *Sigalas M. et al.* Classical vibrational modes in phononic lattices: theory and experiment // Z. Kristallogr. 2005. V. 220. P. 765–809.
8. *Vasseur J.O. et al.* Experimental evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional periodic composite media // J. Phys.: Condens. Matter. 1998. V. 10. P. 6051–6064.
9. *Zhang V.Y., Lefebvre J.E., Gryba T.* Resonant transmission in stop bands of acoustic waves in periodic structures // Ultrasonics. 2006. V. 44. P. e899–e904.
10. *Figotin A., Godin Yu. A., Vitebsky I.* Two-dimensional tunable photonic crystals // Physical Review B. 1998. V. 57(5). P. 2841–2848.
11. *Ивченко Е.Л., Поддубный А.Н.* Резонансные трехмерные фотонные кристаллы // Физика твердого тела. 2006. Т. 48. Вып. 3. С. 540–547.
12. *Brillouin L.* Wave propagation in periodic structures. New York.: McGraw-Hill. 1946. 247 p.
13. *Lavrinenko A.V., Wohlleben W., Leyrer R.J.* Influence of imperfections on the insulating and guiding properties of finite Si-inverted opal crystals // Opt Express. 2009. 17(2). P. 747–760.
14. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В.* Блокирование бегущих волн и локализация энергии упругих колебаний при дифракции на трещине // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 3. С. 314–325.
15. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В., Жанг Ч.* Резонансное блокирование бегущих волн систе-

- мой трещин в упругом слое // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 1. С. 11–20.
16. *Glushkov E., Glushkova N., Golub M., Boström A.* Natural resonance frequencies, wave blocking, and energy localization in an elastic half-space and waveguide with a crack // *Journal Acoustical Society of America*. 2006. V. 119. № 6. P. 3589–3598.
17. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В., Ерёмин А.А.* Возникновение резонансных полос пропускания в диапазоне запираения для упругого волновода с системой жестких включений // Труды XII междуна-
- родной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды”, Ростов-на-Дону, 1–5 декабря 2008 г. издательство “ЦБВР”, Ростов-на-Дону, 2008. Т. 1. С. 47–51.
18. *Glushkova N., Glushkov E., Wauer J.* Wave propagation in an elastically supported string with point-wise defects: gap-band and pass-band effects // *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2010 (in press).
19. *Graff K.F.* Wave motion in elastic solids. Oxford: Clarendon Press, 1975. 649 p.