АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2011, том 57, № 3, с. 303–306

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ РЕЗОНАТОРА В МНОГОМОДОВОМ ВОЛНОВОДЕ

© 2011 г. А. Д. Лапин

Акустический институт им. акад. Н.Н. Андреева
117036 Москва, ул. Шверника 4
E-mail: mironov@akin.ru

Поступила в редакцию 23.11.10 г.

Исследовано рассеяние звука одиночным монопольно-дипольным резонатором в многомодовой трубе. Он представляет собой резонатор Гельмгольца, присоединенный стерженьком к стенке трубы. Фактически этот резонатор есть комбинация монопольного и дипольного резонаторов, расположенных в одной точке. Рассеянные поля этих резонаторов ортогональны. Рассчитаны сечения рассеяния монопольного и дипольного резонаторов в многомодовой трубе. Сечение рассеяния монопольно-дипольного резонатора равно сумме сечений рассеяния монопольного и дипольного резонаторов. Трение в резонаторе (монопольном или дипольном) уменьшает его сечение рассеяния в $(1+\beta)^2$ раз, где β – отношение сопротивлений трения и излучения этого резонатора.

Ключевые слова: рассеяние и поглощение звука резонатором в волноводе.

Эффективность, с которой данное препятствие рассеивает падающую на него звуковую волну, удобно характеризовать, сравнивая рассеянную мощность Q с плотностью потока мощности $q = |p_0|^2/(2\rho c)$ в первичной волне ($|p_0|$ – амплитуда давления в бегущей первичной волне, ρ и c – соответственно плотность среды и скорость звука в ней). Отношение $\sigma = Q/q$ этих двух величин, имеющее размерность площади, называют сечением рассеяния данного препятствия. Для резонансного рассеивателя величина σ достигает максимального значения $\sigma^{(0)}$ на резонансной частоте ω_0 [1]. Резонатор Гельмгольца (резонатор монопольного типа) и жесткая сфера, колеблющаяся на упругом стерженьке (резонатор дипольного типа) в безграничной среде имеют следующие значения $\sigma^{(0)}$: $\sigma^{(0)} = \lambda_0^2/\pi$ и $\sigma^{(0)} = (4/3)\lambda_0^2/\pi$, где λ_0 – длина звуковой волны на резонансной частоте ω_0. В одномодовом волноводе величина $\sigma^{(0)}$ одинакова для обоих типов резонаторов и равна удвоенной площади поперечного сечения этого волновода. Это означает, что падающая волна полностью отражается от резонатора монопольного или дипольного типа в одномодовом волноводе [2, 3].

Представляет интерес рассчитать сечение рассеяния монопольного и дипольного резонаторов в многомодовом волноводе. Ниже этот расчет выполнен в предположении, что резонаторы малы по сравнению с длиной волны. Тогда можно считать, что рассеянное поле создается точечным источником объемной скорости (для резонатора монопольного типа) и точечным дипольным источником (для резонатора дипольного типа).

Рассмотрим круглую трубу радиусом r_0 и абсолютно жесткими стенками, совместим ось z цилиндрической системы координат r, φ, z с осью трубы. Поместим в начале координат резонатор Гельмгольца (сферический сосуд радиусом a и узким горлышком) и при помощи стерженька присоединим его к стенке трубы в сечении $z = 0$, рис. 1. Пусть слева на резонатор падает гармоническая звуковая волна с давлением $p_0(z) = \exp(ikz)$, где k – волновое число, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем. Под действием падающей волны резонатор Гельмгольца на упругом стерженьке возбуждается и излучает поля монопольного и дипольного типов

$$p_1(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k\rho c V}{2S\xi_n J_0^2(\varsigma_n r_0)} J_0(\varsigma_n r)\exp(i\xi_n|z|), \qquad (1)$$

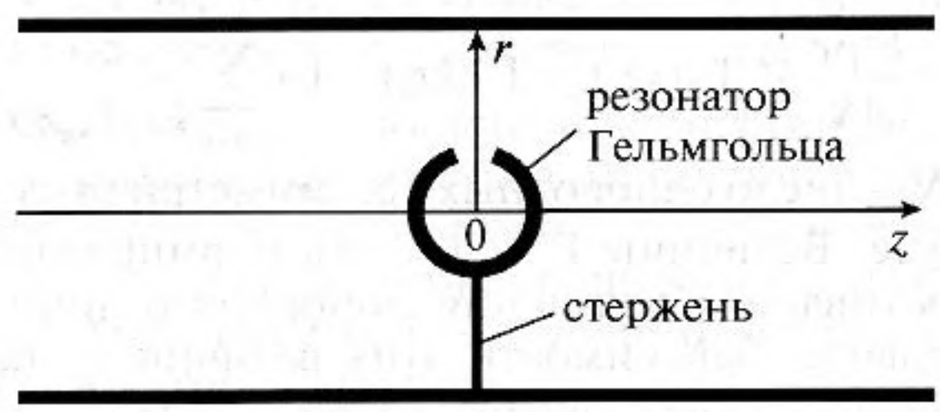

Рис. 1. Резонатор монопольно-дипольного типа в трубе.

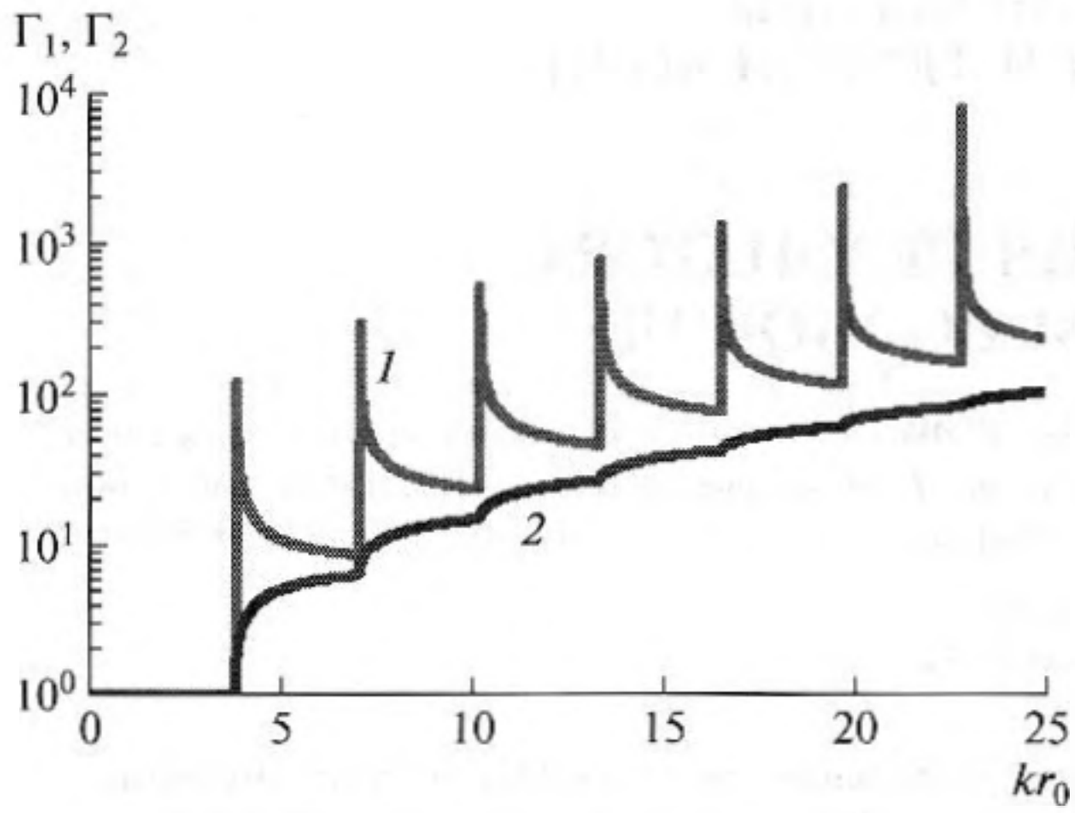

Рис. 2. Зависимости величин Γ_1 и Γ_2 от kr_0.

$$p_2(r,z) = -\mathrm{sign}z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{ik\rho cM}{2SJ_0^2(\varsigma_n r_0)}\times \times J_0(\varsigma_n r)\exp(i\xi_n|z|), \quad (2)$$

где V – объемная скорость монополя (резонатора Гельмгольца). M – момент диполя (осциллирующей сферы). Ось диполя совпадает с осью z, ρ и c – соответственно плотность заполняющей среды и скорость звука в ней, $S = \pi r_0^2$ – площадь поперечного сечения трубы, $\mathrm{sign}\, z = +1$ при $z > 0$, $\mathrm{sign}\, z = -1$ при $z < 0$, $J_0(\varsigma_n r_0)$ – функция Бесселя, ς_n – n-й корень уравнения $J_1(\varsigma_n r_0) = 0$, $\xi_n = \sqrt{k^2 - \varsigma_n^2}$. Приведем некоторые значения величины $\mu_n \equiv \varsigma_n r_0$: $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 3.83$, $\mu_2 = 7.02$, $\mu_3 = 10.17$, $\mu_4 = 13.32$, ...

Энергию уносят только однородные моды. Неоднородные моды создают реактивную нагрузку на резонатор, влияя на его резонансную частоту. Рассеянные поля p_1 и p_2 ортогональны. Рассеянное поле монопольно-дипольного резонатора получим сложением полей p_1 и p_2 рассчитанных в отдельности. Мощности, уносимые полями p_1 и p_2, получим по формулам

$$Q_1 = \frac{\rho c}{4S}V^2\Gamma_1(kr_0), \quad \Gamma_1(kr_0) = 1 + \sum_{n=1}^{N-1}\frac{k}{\xi_n J_0^2(\varsigma_n r_0)}, \quad (3)$$

$$Q_2 = \frac{k^2\rho c}{4S}M^2\Gamma_2(kr_0), \quad \Gamma_2(kr_0) = 1 + \sum_{n=1}^{N-1}\frac{\xi_n}{kJ_0^2(\varsigma_n r_0)}, \quad (4)$$

где N – число однородных осесимметричных мод в трубе. Величины Γ_1 и Γ_2 есть нормированные сопротивления излучения монополя и диполя в волноводе. Зависимости этих величин от параметра (kr_0) представлены на рис. 2. При отсутствии трения в резонаторе рассеиваемая им мощность равна мощности, передаваемой ему падающей волной p_0. Эта мощность максимальна на резонансной частот резонатора, так как на этой частоте внешняя сила и создаваемая ею колебательная скорость синфазны.

На резонансной частоте резонатора Гельмгольца давление в первичной волне синфазно со скоростью частиц в горлышке. Значит мощность, сообщаемая первичной волной резонатору, равна $(1/2)|p_0|V$. С другой стороны, объемная скорость V резонатора создает мощность излучения, определяемую формулой (3). Приравнивая эти две мощности при $\omega = \omega_0$, получим

$$V = \frac{2S}{\rho c}\frac{1}{\Gamma_1(k_0 r_0)},$$

где $k_0 = \omega_0/c$. Подставляя эту величину в формулу (3), получим мощность рассеянного монопольного поля на резонансной частоте

$$Q_1 = \frac{S}{\rho c}\frac{1}{\Gamma_1(k_0 r_0)}.$$

Сечение рассеяния монопольного резонатора $\sigma_1^{(0)}$ равно

$$\sigma_1^{(0)} = Q_1^{(0)}/q = \frac{2S}{\Gamma_1(k_0 r_0)}.$$

Отношение $\sigma_1^{(0)}/(2S)$ равно единице в одномодовом волноводе и меньше единицы в многомодовом волноводе. На критических частотах мод сечение рассеяния монопольного резонатора равно нулю.

Отношение сечений рассеяния монопольного резонатора в волноводе и монопольного резонатора в свободной среде при равенстве их резонансных частот получим по формуле

$$\sigma_1^{(0)}/\sigma^{(0)} = \frac{(\kappa_0 r_0)^2}{2\Gamma_1(k_0 r_0)}.$$

Для одномодового волновода ($kr_0 < \mu_1 = 3.83$) оно равно $(k_0 r_0)^2/2$.

Рассчитаем рассеянную мощность и сечение рассеяния резонатора дипольного типа на резонансной частоте. С этой целью найдем, с какой силой нужно действовать на безмассовую сферу данного радиуса a, чтобы сообщить ей данную скорость u. Давление на поверхности сферы $r^2 + z^2 = a^2$ можно получить по формулу (2) при $r = a\sin\theta$, $z = a\cos\theta$, где θ – полярный угол, $0 < \theta < \pi$. Вследствие симметрии достаточно учитывать только составляющую сил давления вдоль оси диполя: перпендикулярные к оси симметрии компоненты сил давления взаимно уничтожаются. Поскольку давление одинаково во всех точках одной параллели ($\theta = \mathrm{const}$) в качестве элемента интегрирования можно взять полоску между двумя близкими параллелями, считая переменной

интегрирования полярный угол. Площадь такой полоски равна $2\pi a^2 \sin\theta d\theta$.

Результирующая сила есть

$$F = -2\pi a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ik\rho c M}{2SJ_0^2(\varsigma_n r_0)} \times$$

$$\times \int_0^{\pi} J_0(\varsigma_n a \sin\theta) \exp(i\xi_n a|\cos\theta|)|\cos\theta| \sin\theta d\theta.$$

Активная компонента этой силы равна

$$\operatorname{Re} F = 2\pi a^2 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{k\rho c M}{2SJ_0^2(\varsigma_n r_0)} \times$$

$$\times \int_0^{\pi} J_0(\varsigma_n a \sin\theta) \sin(\xi_n a|\cos\theta|)|\cos\theta| \sin\theta d\theta.$$

При $ka \ll 1$ интеграл в этой формуле равен приближенно $(2/3)\xi_n a$ и тогда получим следующее выражение для $\operatorname{Re} F$:

$$\operatorname{Re} F \approx (4/3)\pi a^3 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{k\rho c \xi_n M}{2SJ_0^2(\varsigma_n r_0)} =$$

$$= (4/3)\pi a^3 \frac{k^2 \rho c}{2S} M \Gamma_2(kr_0).$$

Сопротивление излучения осциллирующей сферы определяется по формуле

$$R = \operatorname{Re} F/u \approx \frac{\alpha \Omega k^2 \rho c}{2S} \Gamma_2(kr_0),$$

где u – скорость осцилляций, $\Omega = (4/3)\pi a^3$ – объем сферы, параметр $\alpha \equiv (M/u)$ подлежит определению. Излучаемая сферой мощность равна

$$Q_2 = (1/2)Ru^2 = (1/2)(R/\alpha^2)M^2 =$$

$$= \frac{\Omega k^2 \rho c}{4\alpha S} M^2 \Gamma_2(kr_0). \quad (5)$$

Из сопоставления формул (4) и (5), дающих одну и ту же мощность, следует, что параметр α равен Ω. Рассеянная мощность Q_2 получена резонатором от падающей волны $p_0 = \exp(ikz)$. Согласно [4], сила, с которой эта волна действует на малую жесткую сферу, равна $F_0 \approx -ik\Omega$. На резонансной частоте ω_0 она передает сфере мощность $(1/2)|F_0|u$. Из равенства $(1/2)Ru^2 = (1/2)|F_0|u$ получим $u = |F_0|/R$. Следовательно, при резонансе момент диполя равен

$$M = \Omega u = \Omega|F_0|/R =$$

$$= k_0\Omega^2/R = 2S/\{k_0 \rho c \Gamma_2(k_0 r_0)\}.$$

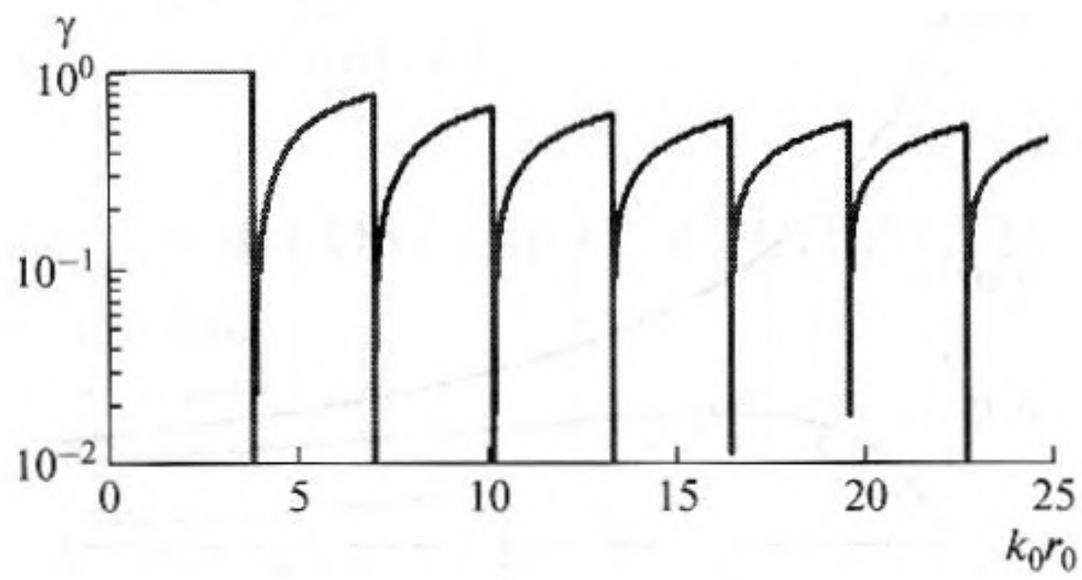

Рис. 3. Отношение сечений рассеяния монопольного и дипольного резонаторов.

Подставляя этот момент в формулу (4), получим мощность рассеянного поля на резонансной частоте

$$Q_2^{(0)} = \frac{S}{\rho c} \frac{1}{\Gamma_2(k_0 r_0)}.$$

Сечение рассеяния дипольного резонатора $\sigma_2^{(0)}$ получим по формуле

$$\sigma_2^{(0)} = Q_2^{(0)}/q = 2S/\Gamma_2(k_0 r_0).$$

Отношение $\sigma_2^{(0)}/(2S)$ равно единице в одномодовом волноводе и монотонно уменьшается с увеличением числа распространяющихся мод.

Отношение сечений рассеяния монопольного и дипольного резонаторов в многомодовом волноводе при равенстве их резонансных частот равно $\sigma_1^{(0)}/\sigma_2^{(0)} = \Gamma_2(k_0 r_0)/\Gamma_1(k_0 r_0)$. Зависимость $\gamma \equiv \sigma_1^{(0)}/\sigma_2^{(0)}$ от параметра $(k_0 r_0)$ дана на рис. 3. Сечение рассеяния монопольно-дипольного резонатора в многомодовом волноводе равно сумме сечений рассеяния монопольного и дипольного резонаторов в этом волноводе.

Учтем теперь, помимо излучения, необратимые потери энергии, вызываемые силами, пропорциональными скорости пульсаций (в монопольном резонаторе) или скорости осцилляций (в дипольном резонаторе). Тогда баланс энергии будет выглядеть по-другому: механическая энергия, полученная резонатором от падающей волны, будет частично затрачиваться на излучение, а частично теряться необратимо.

Эффективность поглощения энергии резонатором удобно характеризовать сечением поглощения, равным отношению поглощаемой мощности к плотности потока мощности в падающей волне. Уравнение баланса энергии в монопольном резонаторе с трением имеет вид

$$\frac{1}{2} R_{1s} V^2 + \frac{1}{2} R_{1d} V^2 = \frac{1}{2}|p_0| V,$$

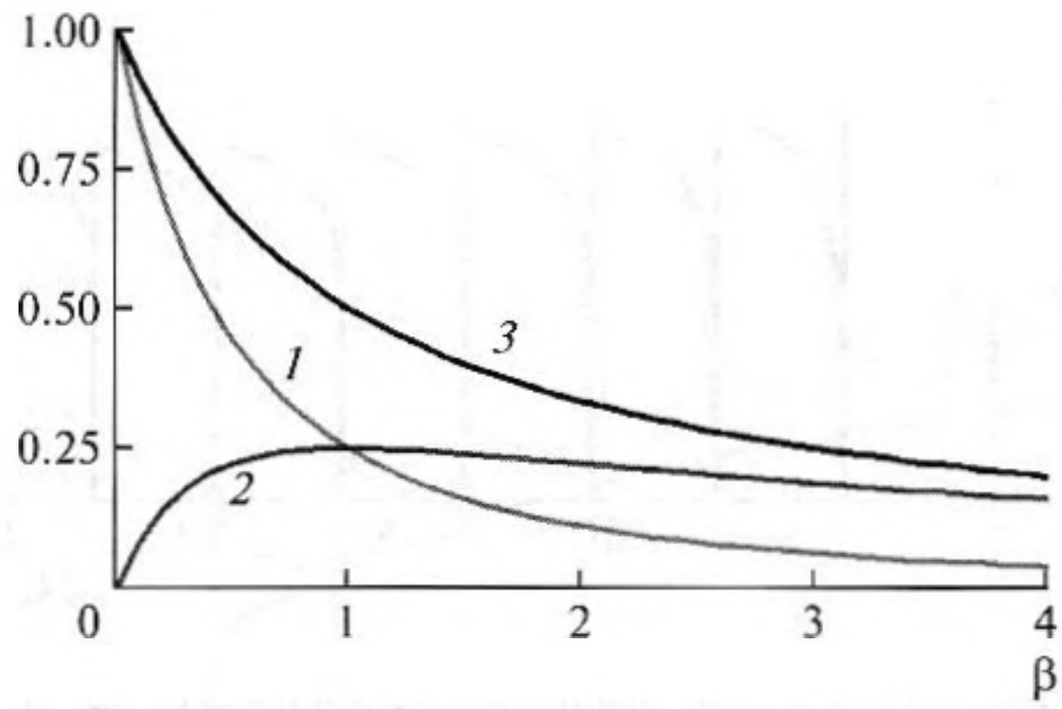

Рис. 4. Зависимость относительных сечений рассеяния (*1*), поглощения (*2*) и их суммы (*3*) от параметра β.

где R_{1d} и R_{1s} – обобщенные сопротивления трения и излучения, $R_{1s} = \frac{\rho c}{2S}\Gamma_1(kr_0)$. Из этого уравнения найдем объемную скорость при $\omega = \omega_0$

$$V = \frac{|p_0|}{R_{1s} + R_{1d}}.$$

Рассеянную и поглощенную мощности получим по формулам

$$Q_{1s} = \frac{1}{2}R_{1s}V^2 = \frac{Q_1^{(0)}}{(1+\beta_1)^2},$$

$$Q_{1d} = \frac{1}{2}R_{1d}V^2 = \frac{\beta_1 Q_1^{(0)}}{(1+\beta_1)^2},$$

где $\beta_1 = R_{1d}/R_{1s}$ – отношение сопротивлений трения и излучения монопольного резонатора. Сумма рассеянной и поглощенной энергий будет $Q_t = \frac{Q_1^{(0)}}{(1+\beta_1)}$.

Сечение рассеяния, сечение поглощения и их сумма равны соответственно

$$\sigma_{1s} = \frac{\sigma_1^{(0)}}{(1+\beta_1)^2}, \quad \sigma_{1d} = \frac{\beta_1\sigma_1^{(0)}}{(1+\beta_1)^2}, \quad \sigma_{1t} = \frac{\sigma_1^{(0)}}{(1+\beta_1)}. \quad (6)$$

Аналогичным способом рассчитаем энергетические характеристики дипольного резонатора с трением. Уравнение баланса энергии в этом резонаторе имеет вид

$$\frac{1}{2}R_{2s}M^2 + \frac{1}{2}R_{2d}M^2 = \frac{1}{2}\frac{|F_0|}{\Omega}M,$$

где R_{2d} и R_{2s} – обобщенные сопротивления трения и излучения, $R_{2s} = \frac{k^2\rho c}{2S}\Gamma_2(kr_0)$. В результате вычислений получим для сечения рассеяния, сечения поглощения и их суммы следующие выражения:

$$\sigma_{2s} = \frac{\sigma_2^{(0)}}{(1+\beta_2)^2}, \quad \sigma_{2d} = \frac{\beta_2\sigma_2^{(0)}}{(1+\beta_2)^2}, \quad \sigma_{2t} = \frac{\sigma_2^{(0)}}{(1+\beta_2)}, \quad (7)$$

где β_2 – отношение сопротивлений трения и излучения дипольного резонатора.

Согласно формулам (6) и (7), зависимость относительных величин $\sigma_{1s}/\sigma_1^{(0)}$, $\sigma_{1d}/\sigma_1^{(0)}$, $\sigma_{1t}/\sigma_1^{(0)}$ от параметра β_1 совпадает с зависимостью соответственных относительных величин $\sigma_{2s}/\sigma_2^{(0)}$, $\sigma_{2d}/\sigma_2^{(0)}$, $\sigma_{2t}/\sigma_2^{(0)}$ от параметра β_2. На рис. 4 показана зависимость относительных сечений рассеяния, поглощения и их суммы от параметра β – отношения сопротивлений трения и излучения резонатора (монопольного или дипольного типа). Эта зависимость имеет универсальный характер. Несмотря на существенное различие сечений рассеяния (поглощения) резонатора в волноводе и воздушного пузырька в жидкости [1], зависимость их относительных сечений рассеяния (поглощения) от отношения сопротивлений трения и излучения одинакова. Графики на рис. 4 совпадают с графиками на рис. 112.1 в книге М.А. Исаковича [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 436 с.
2. *Канев Н.Г., Миронов М.А.* Дипольный резонансный рассеиватель звука // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 3. С. 372–375.
3. *Лапин А.Д.* Резонатор монопольно-дипольного типа в узкой трубе // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 6. С. 855–857.
4. *Ржевкин С.Н.* Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во Московского университета, 1960. 336 с.