

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

СПИРАЛЬНЫЕ ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЛОСКОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

© 2011 г. В. В. Тютюкин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН

117036 Москва, ул. Шверника 4

E-mail: Tyutekin@akin.ru

Поступила в редакцию 23.09.10 г.

Рассмотрены решения волнового уравнения в цилиндрической системе координат в виде бегущих по углу волн. Получены уравнения для их волновых фронтов и лучей в случае нулевой нормальной волны жидкого слоя. Показано, что в дальнем поле цилиндрической волны фронты представляют собой спирали Архимеда, а лучи описываются гиперболическими спиралями. Для ближней зоны получены аналогичные уравнения в виде интегральных соотношений и показано, что в этом случае фронты представляют собой спирали с неравномерным шагом. Приведены графики, дающие представления о волновых фронтах и соответствующим им лучам. Дается качественное описание спиральных волн для слоя с нормальными волнами высоких номеров. Описаны возможные методы возбуждения спиральных волн.

В последнее время опубликован ряд работ, посвященных исследованию свойств нового типа волн, — винтовых и спирально-винтовых в цилиндрических оболочках [1, 2], в цилиндрических волноводах [3, 4] и вблизи цилиндрической полости в упругой среде [5]. Существование таких волн обусловлено выбором частных решений волновых уравнений в виде бегущих волн по оси z и углу θ цилиндрической системы координат: $p \sim \exp[i(kz \pm v\theta)]$, где $v > 0$ — произвольное число. В настоящей работе рассматриваются волны аналогичного типа в плоском жидком слое, которые могут существовать при рассмотрении процесса в цилиндрической системе координат.

Рассмотрим слой жидкости толщиной $2l$ в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , при этом ось z перпендикулярна срединной плоскости слоя. Уравнение Гельмгольца для звукового давления $p(r, \theta, z)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 p = 0. \quad (1)$$

Здесь k_0 — волновое число в жидкости.

Решение уравнения (1) выберем в форме

$$p(r, \theta, z) = H_v^{(1)}(kr) e^{\pm iv\theta} \cos(\sqrt{k_0^2 - k^2} z), \quad (2)$$

где v и k — постоянные разделения переменных. Величину $v > 0$ будем считать произвольной, а величину k определим из граничных условий при $z = \pm l$, которые зададим как

$$\frac{\partial p(\pm l)}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

что соответствует жесткому закреплению обеих поверхностей слоя. Из уравнений (2) и (3) получаем

$$\sqrt{k_0^2 - k^2} \sin(\sqrt{k_0^2 - k^2} l) = 0.$$

Корни этого уравнения можно представить в виде $\sqrt{k_0^2 - k^2} l = n\pi$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, и получить значение

$$k = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}. \quad (4)$$

С учетом этого решение (2) можно записать в виде

$$p(r, \theta, z) = H_v^{(1)} \left(\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} r \right) e^{\pm iv\theta} \cos\left(n\pi \frac{z}{l}\right). \quad (5)$$

В дальнейшем выражение (5) будет использовано для получения формул, описывающих основные свойства спиральных нормальных волн слоя.

Вначале рассмотрим относительно простой случай — плоской по оси z нормальной волны ($n = 0$) в дальнем поле цилиндрических волн ($k_0 r \gg 1$). В этом случае формула (5) будет иметь вид

$$p(r, \theta) = \frac{2}{\pi \sqrt{k_0 r}} e^{i(k_0 r \mp v\theta)}. \quad (6)$$

(В формуле (6) опущены постоянные фазовые множители, которые не играют роли в рассматриваемой задаче). Величина $p(r, \theta)$ представляет собой цилиндрические волны с волновыми фронтами, определяемыми формулой

$$W = k_0 r \mp v\theta = \text{const}. \quad (7)$$

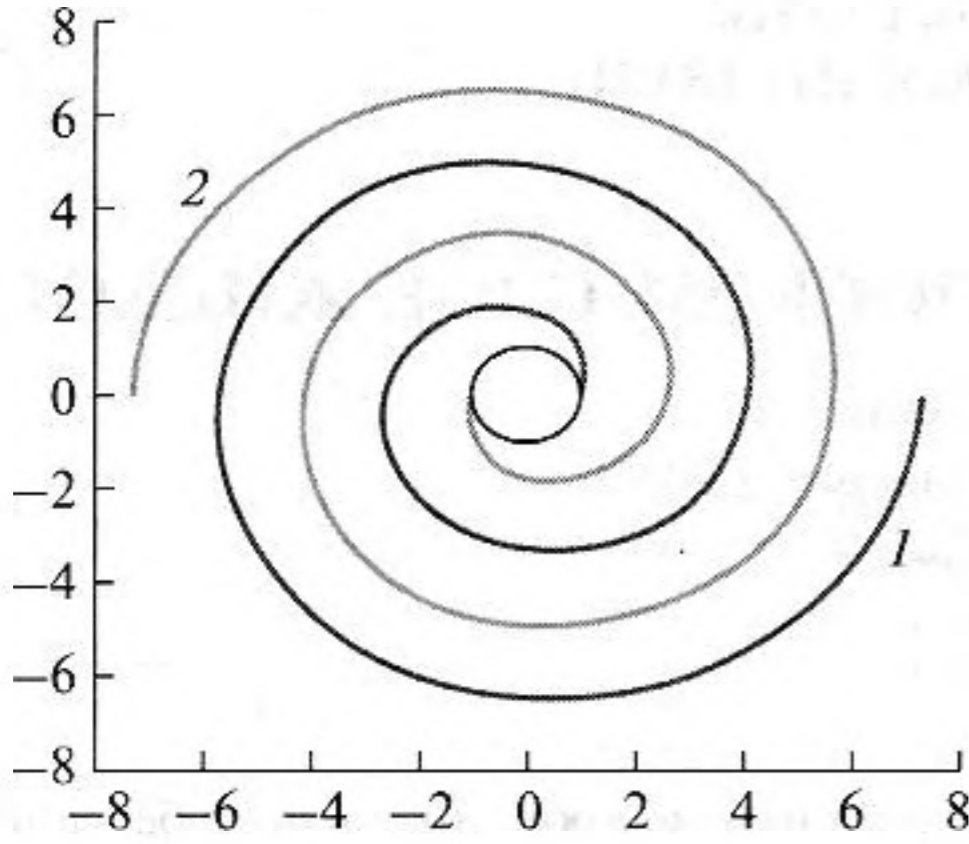


Рис. 1. Волновые фронты “левой” спиральной волны для $v = 0.5$, $r_0 = 1$.

(1) $\theta_0 = 0^\circ$; (2) $\theta_0 = 180^\circ$.

Для определенности потребуем (как это обычно делается), чтобы волновые фронты проходили через произвольную точку ($r = r_0$, $\theta = \theta_0$), при этом $r_0 = \min r$, и точка r_0 расположена на излучателе. С учетом этого уравнение (7) можно записать в виде

$$r = r_0 \pm \frac{v}{k_0}(\theta - \theta_0). \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что кривые, описываемые формулой (8), являются спиралями Архимеда, начинающимися в этой точке. Поэтому справедливо каждую из таких волн назвать спиральной. Исходя из выбора точки r_0 , величина r в каждом случае должна возрасти. Следовательно, знак (+) в формуле (8) соответствует волне, угловая координата которой изменяется в положительном направлении (против часовой стрелки — “левая спираль”), а знак (–) — волне с отрицательным направлением (по часовой стрелке — “правая спираль”).

Именно две такие волны, распространяющиеся по углу θ в противоположных направлениях (при целых $v = n$), образуют периодические решения типа $p(r, \theta) = H_v^{(1)}(kr) \cos n\theta$. Однако спиральные волны (8) могут существовать и “сами по себе”.

В качестве примера на рис. 1 приведены волновые фронты левых спиральных волн, “начинающихся” в точке $r_0 = 1$ (на излучателе) при $\theta_0 = 0^\circ$ и 180° для значений $v = 0.5$, $k_0 r_0 = 1$. (Значение $v = 0.5$ выбрано таким, чтобы при этом значении формула (6) была справедлива при любом значении аргумента $k_0 r_0$ [6, стр. 190]). На рис. 2 — аналогичные данные для правой спиральной волны при $\theta_0 = 90^\circ$ и 270° .

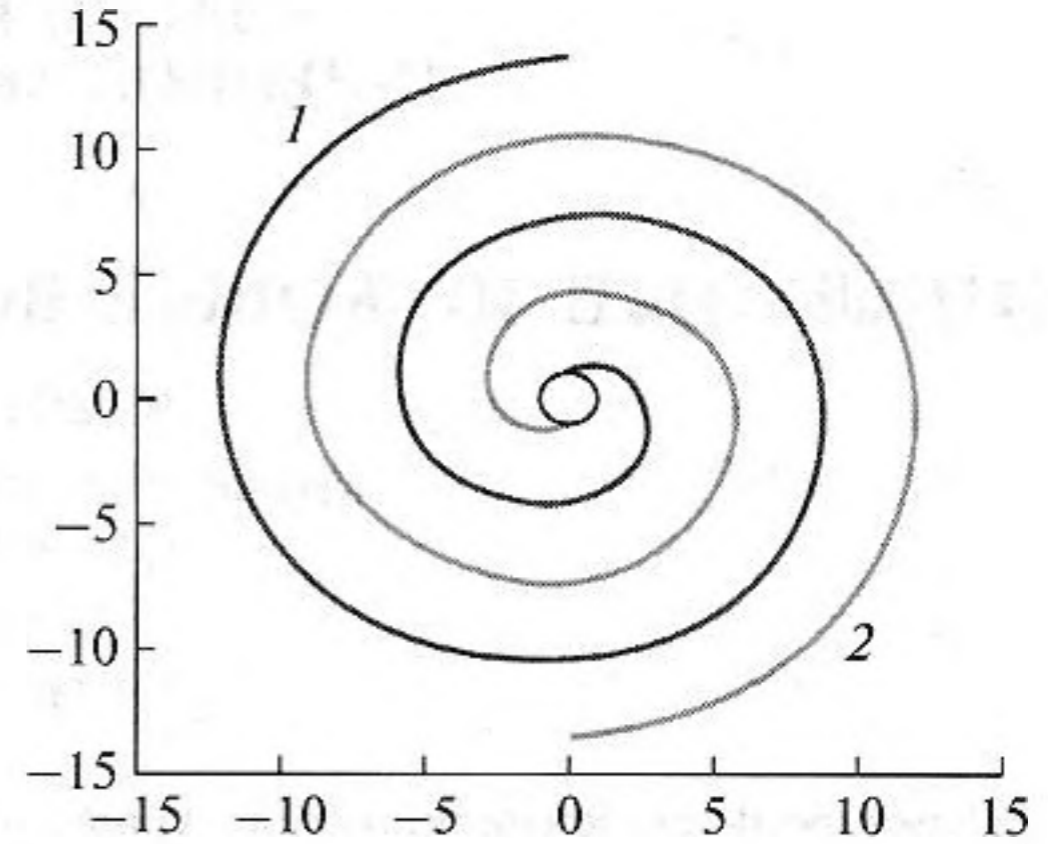


Рис. 2. Волновые фронты “правой” спиральной волны для $v = 0.5$, $r_0 = 1$.

(1) $\theta_0 = 90^\circ$; (2) $\theta_0 = 270^\circ$.

Отметим, что “шаг” спиральных волновых фронтов d (увеличение r при изменении угла θ на величину 2π) определяется формулой $d = v\lambda_0$, где $\lambda_0 = 2\pi k_0^{-1}$. Примечательным, на наш взгляд, является изменение амплитуды волны вдоль ее фронта (формула (6)).

Приведенные рисунки волновых фронтов являются, по существу, стоп-кадрами, поскольку для создания рассматриваемых спиральных волн все точки θ_0 должны иметь непрерывный спектр и вращаться вокруг оси цилиндра с угловой скоростью $\Omega = \omega/v$ (см. ниже).

Из уравнений (7) и (8) можно найти такую важную характеристику, как уравнение луча, проходящего через ту же точку. Сделаем это на примере “левой” спиральной волны. С этой целью найдем волновое число \vec{k} (перпендикулярное волновому фронту) и его модуль k [7, стр. 195]

$$\vec{k} = \text{grad} W = k_0 \vec{r} - \frac{v}{r} \vec{\theta}, \quad k = \sqrt{k_0^2 + \left(\frac{v}{r}\right)^2}, \quad (9)$$

где \vec{r} и $\vec{\theta}$ — орты по соответствующим осям.

Введем угол α между касательной к лучу, совпадающей по направлению с вектором \vec{k} и координатной осью \vec{r} . Тогда можно записать

$$dr = ds \cos \alpha, \quad r d\theta = ds \sin \alpha. \quad (10)$$

Здесь ds — элемент дуги луча. Из выражений (10) получаем

$$\frac{dr}{d\theta} = r \cot \alpha.$$

Из первого уравнения (9) следует, что $\cot \alpha = k_0 r / v$. С учетом этого получим дифференци-

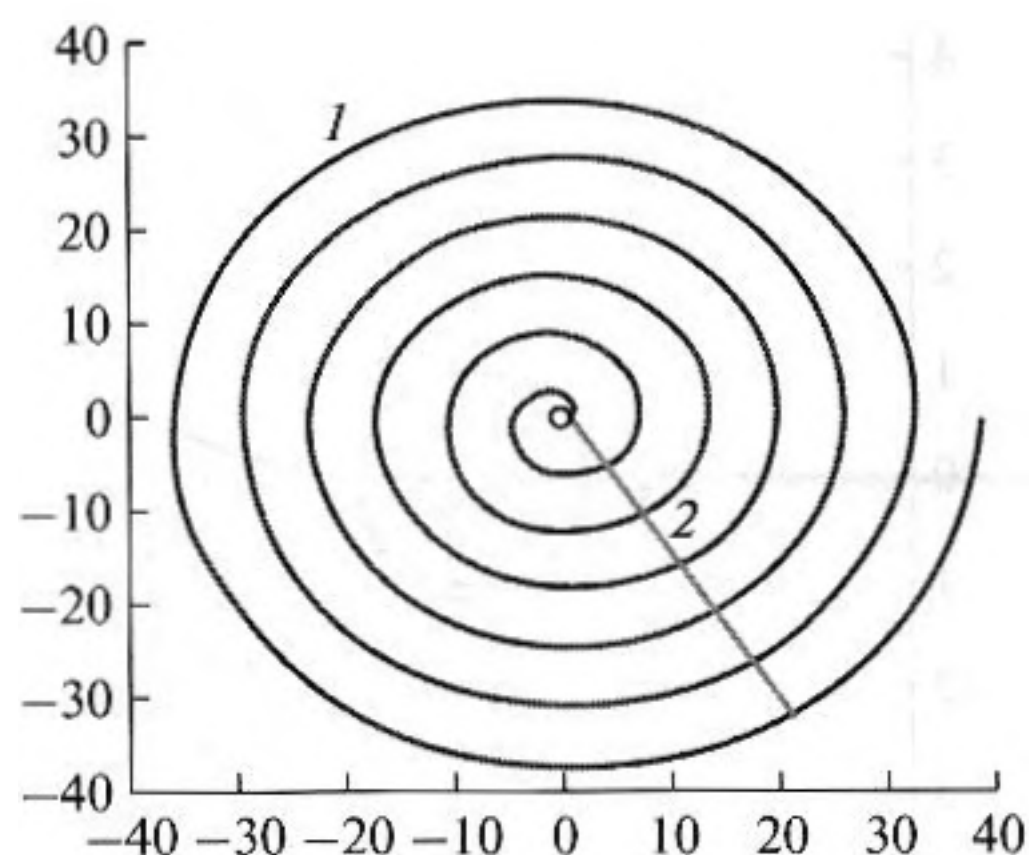


Рис. 3. Волновой фронт (1) и луч (2) для $\nu = 0.5$, $k_0 r_0 = 0.5$.

альное уравнение для лучей спиральных волн (8)

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{k_0}{\nu} r^2. \quad (11)$$

Интегрируя (11), для луча, начинающегося в той же точке $r = r_0$, $\theta = \theta_0$, окончательно получим уравнение

$$r = \frac{r_0}{1 + \text{ctg}\alpha_0(\theta - \theta_0)}. \quad (12)$$

Здесь $\text{ctg}\alpha_0 = k_0 r_0 / \nu$ — угол “выхода” луча из точки r_0 .

Аналогичное уравнение для луча “левой” спиральной волны имеет вид

$$r = \frac{r_0}{1 - \text{ctg}\alpha_0(\theta - \theta_0)}. \quad (12')$$

Нетрудно видеть, что кривые (12) и (12'), описывающие форму лучей, представляют собой так называемые гиперболические спирали. При этом необходимость увеличения r по мере распростра-

нения этих лучей приводит к тому, что последние “вращаются” в направлениях, противоположных вращению соответствующих волновых фронтов. Анализ полученных формул показывает, что при

$$\theta = \theta_0 \pm \text{tg}\alpha_0 = \theta_0 \pm \frac{\nu}{k_0 r_0}$$

величина $r \rightarrow \infty$, и лучи превращаются в прямые линии, являющиеся асимптотами гипербол (12) и (12'), что вообще характерно для гиперболической спирали. Таким образом, вдали от источника каждый луч отклоняется от первоначального направления на угол $\theta_1 = \pm \nu / k_0 r_0$ (в радианах).

Ниже приведены примеры лучей (совместно с волновыми фронтами) для “левой” спиральной волны при значениях параметров $\nu = 0.5$, $\theta_0 = 0$: на рис. 3 — для $k_0 r_0 = 0.5$, рис. 4а) и рис. 4б) — для $k_0 r_0 = 0.15$ и рис. 5 — для $k_0 r_0 = 0.05$. Видно, что лучи многократно пересекают фронты, а при $k_0 r_0 \gg 1$ действительно превращаются в прямые, уходящие на бесконечность. При этом в первом случае угол смещения $\theta_1 = -1$ ($\approx -60^\circ$), во втором — $\theta_1 = -3$ ($\approx -180^\circ$) и в третьем — $\theta_1 = -10$ ($\approx -570^\circ$), что и подтверждается приведенными графиками. Обращает на себя внимание огибание лучом тела в последнем случае. Более подробно этот случай (в увеличенном масштабе) представлен на рис. 6, из которого видно, в частности, что волновой вектор в точке $r = r_0$, $\theta = \theta_0$ перпендикулярен к волновому фронту; именно в этом предположении выводилось уравнение (12) для лучей. Это справедливо и для других точек пересечения, поскольку они, как и начальная точка, принадлежат обеим кривым, которые в свою очередь строились из условия взаимной перпендикулярности.

Аналогичные результаты получаются и для “правой” спиральной волны, но сдвиг θ_1 имеет противоположный знак.

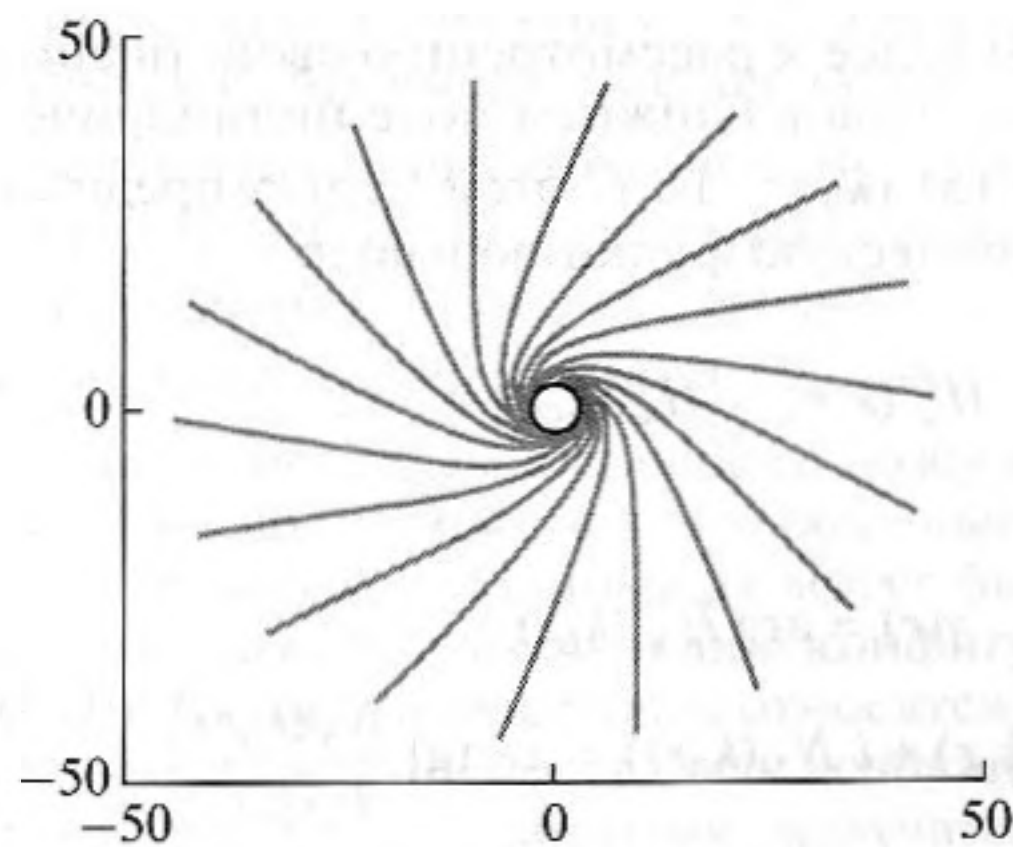
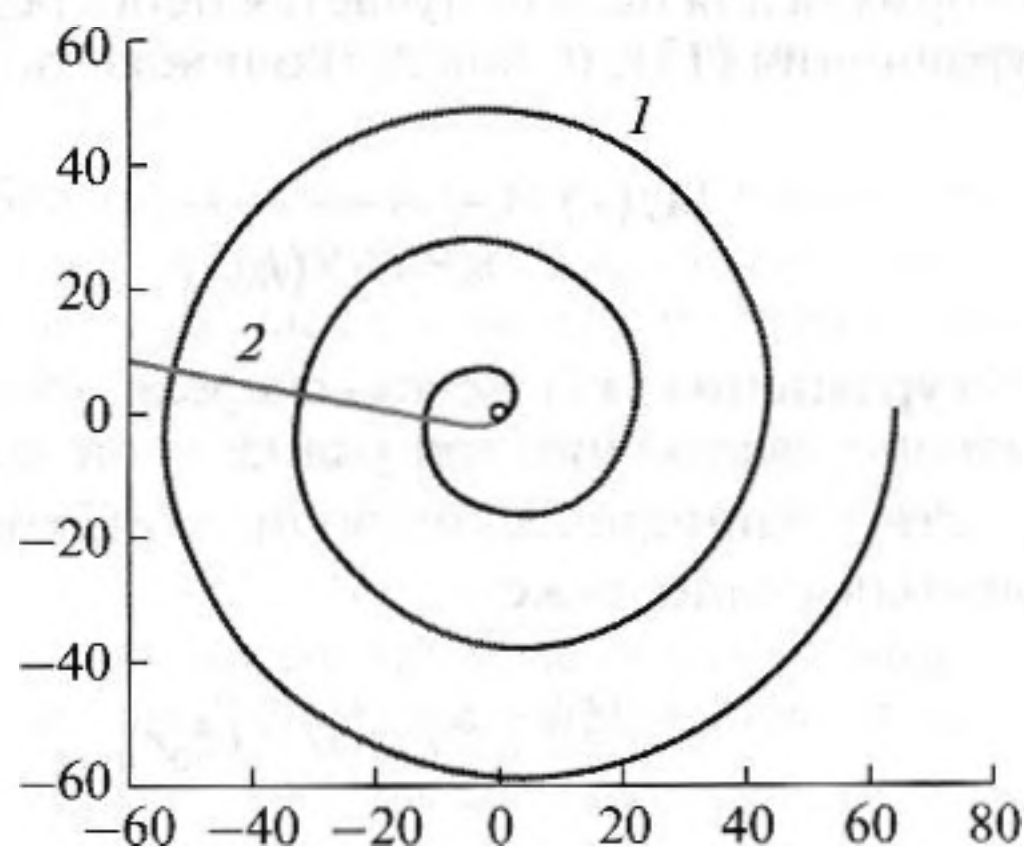


Рис. 4. (а) То же, что на рис. 3, но для $k_0 r_0 = 0.15$. (б) “Веер” лучей для параметров рис. 4а); шаг по углу θ_0 составляет 20° .

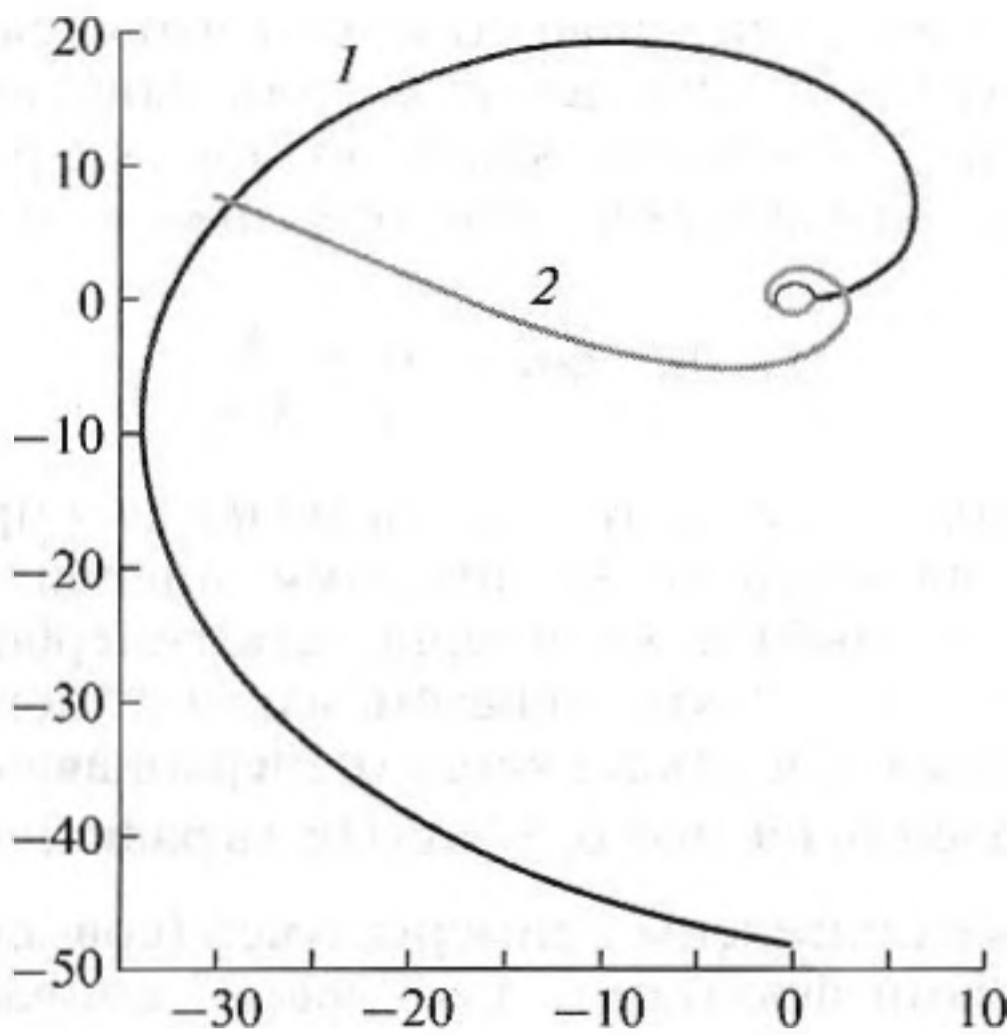


Рис. 5. То же, что на рис. 3, но для $k_0 r_0 = 0.05$.

В заключение этой части статьи найдем соотношение между фазовой c_f и групповой c_g скоростями спиральных волн в том же предположении $k_0 r_0 \gg 1$. Из второй формулы (9) имеем:

$$c_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{k_0 r}\right)^2}}, \quad c_g = \frac{d\omega}{dk} = c_0 \sqrt{1 + \left(\frac{v}{k_0 r}\right)^2},$$

где c_0 — скорость звука в свободном пространстве. Следовательно, искомое соотношение имеет вид, обычный для волноводов

$$c_f c_g = c_0^2.$$

Однако в отличие от нормальных волн в цилиндрических волноводах, в спиральных волнах фазовая скорость всегда меньше групповой, а эта последняя всегда больше скорости звука в среде. Сколько-нибудь реального физического объяснения этим фактам в настоящее время пока не найдено.

Перейдем далее к рассмотрению свойств спиральных волн слоя в ближнем поле цилиндрической волны (5) ($k_0 r_0 \sim 1$). С этой целью представим цилиндрическую функцию в виде

$$H_v^{(1)}(k_0 r) = \left| H_v^{(1)}(k_0 r) \right| e^{i\gamma(r)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \gamma(r) &= \arg H_v^{(1)}(k_0 r) = \\ &= \arg(J_v(k_0 r) + i N_v(k_0 r)) = \operatorname{arctg} \left(\frac{N_v(k_0 r)}{J_v(k_0 r)} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

— фаза цилиндрической волны. Волновые фронты обеих спиральных волн в этом случае будут

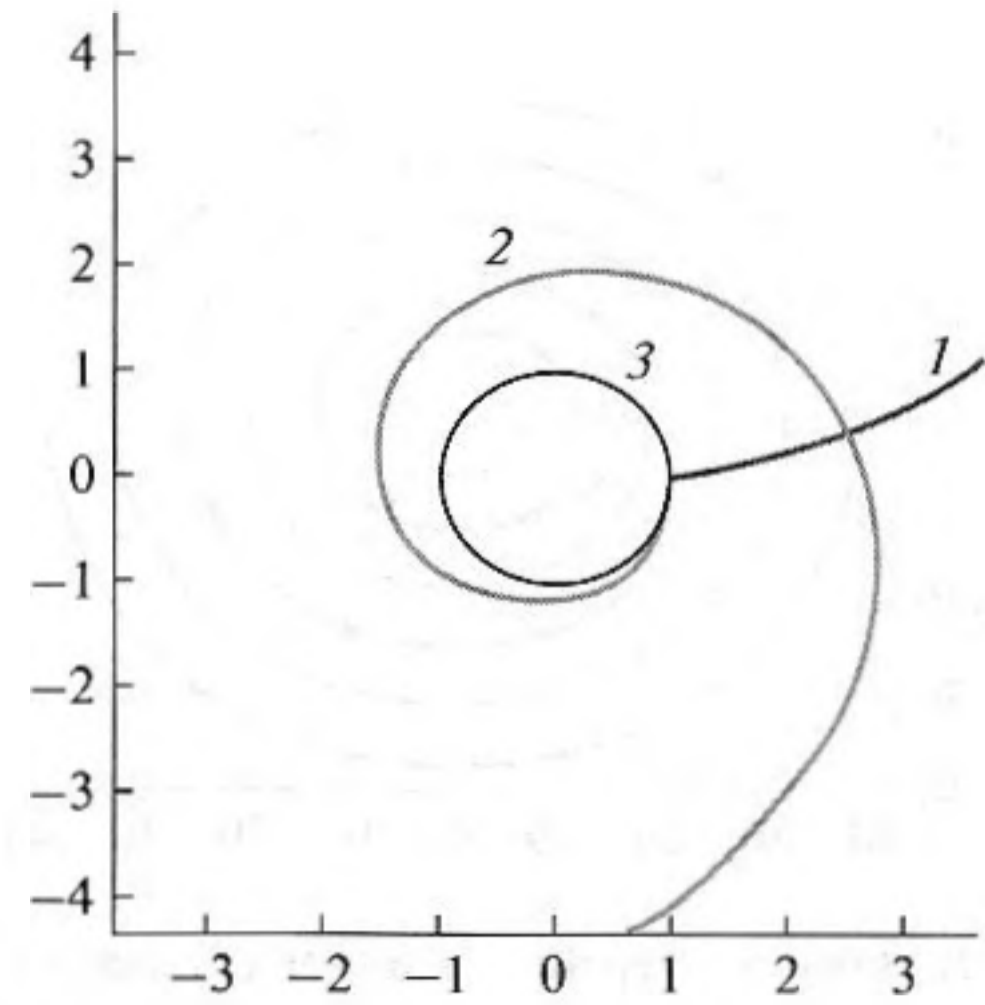


Рис. 6. Данные рис. 5 в увеличенном масштабе. (3) Поверхность $r = r_0$.

определяться формулой, аналогичной (7)

$$W = \gamma(r) \mp v\theta = \text{const}. \quad (14)$$

Если волновой фронт проходит, как и прежде, через точку $r = r_0$, $\theta = \theta_0$, то его уравнение, аналогичное уравнению (8), будет иметь вид:

$$\gamma(r) = \gamma(r_0) \pm v(\theta - \theta_0). \quad (15)$$

Следует полагать, что это уравнение также описывает спиральную волну. Волновые числа для волн (14) определяются уравнением, аналогичным (9)

$$\vec{k} = \operatorname{grad} W = \frac{d\gamma(r)}{dr} \vec{r} \mp \frac{v}{r} \vec{\theta}, \quad k = \sqrt{\left[\frac{d\gamma(r)}{dr} \right]^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2}. \quad (16)$$

Из формул (16) видно, что величина $d\gamma(r)/dr$ играет роль радиального волнового числа, которое можно обозначить через $k_r(r)$, и которое в основном определяет свойства спиральной волны (14). Формула для него получается непосредственно из уравнения (13), и, как легко показать, имеет вид

$$k_r(r) = \frac{2}{\pi r \left| H_v^{(1)}(k_0 r) \right|^2}. \quad (17)$$

Из уравнения (17) в свою очередь может быть получено выражение для радиальной фазовой скорости цилиндрических волн $c_r(r)$, которое будет использовано ниже,

$$\frac{c_r(r)}{c_0} = \frac{\pi}{2} k_0 r \left| H_v^{(1)}(k_0 r) \right|^2. \quad (17')$$

Здесь c_0 — как и прежде, скорость звука в свободном пространстве. Теперь, используя соотноше-

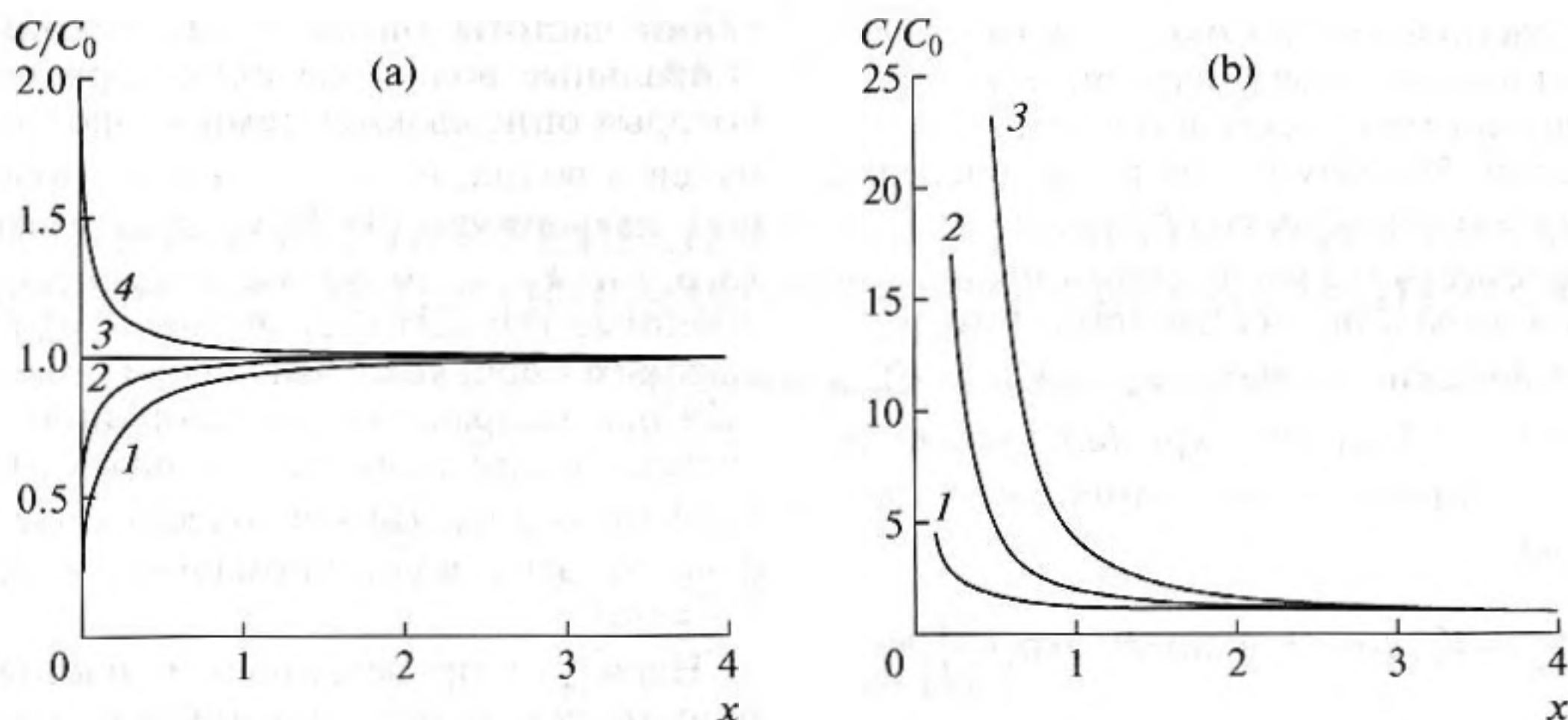


Рис. 7. (а) Радиальная фазовая скорость цилиндрической волны. (1) $v = 0$; (2) $v = 0.4$; (3) $v = 0.5$; (4) $v = 0.6$. $X = k_0 r$.
(б) То же, что на рис. 7а. (1) $v = 1$; (2) $v = 1.5$; (3) $v = 2$.

ние $\gamma(r) = \int k_r(r) dr$, уравнения (15) для волновых фронтов, с учетом (17) можно переписать в виде

$$\int_{r_0}^r \frac{dr'}{r' |H_v^{(1)}(k_0 r')|^2} = \pm \frac{\pi v}{2} (\theta - \theta_0). \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что при $k_0 r \gg 1$, уравнение (18) переходит в уравнение (8).

Уравнение луча для $k_0 r \sim 1$ можно получить из уравнения (11) с заменой k_0 на $k_r(r)$ из формулы (17)

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{k_r(r)}{v} r^2.$$

В результате получаем

$$\int_{r_0}^r \frac{|H_v^{(1)}(k_0 r')|^2 dr'}{r'} = \mp \frac{2}{\pi v} (\theta - \theta_0). \quad (19)$$

При $k_0 r \gg 1$ это уравнение переходит в уравнения (12) и (12').

Таким образом, уравнения (18) и (19) являются формальными уравнениями для волнового фронта и луча во всей области изменения параметров задачи. Однако мы не будем рассматривать их решения, а лишь качественно определим отличие в свойствах спиральной волны в ближней и дальней зонах.

С этой целью рассмотрим величину “дифференциального шага” спирали, определяемой формулой (14), как

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{v}{k(r)} = -\frac{\pi}{2} v r |H_v^{(1)}(k_0 r)|^2.$$

Эта величина при $k_0 r \gg 1$ принимает значение $(dr/d\theta)_\infty = -v/k_0$. Отношение этих величин

$$\delta = \frac{\pi}{2} k_0 r |H_v^{(1)}(k_0 r)|^2$$

характеризует шаг спирали в ближнем поле в сравнении с его значениями в дальнем, и дает представление о переходе одного поля в другое. Интересно отметить, что величина δ совпадает с величиной безразмерной радиальной скорости цилиндрической волны из формулы (17'). Графики зависимости $c_r(r)/c_0 = \delta(k_0 r)$ представлены на рис. 7а и 7б для различных значений v . Из рисунков видно, что при малых значениях $k_0 r$ величина $\delta \leq 1$ для $0.5 \geq v > 0$ и $\delta \geq 1$ для $v \geq 0.5$. (При $k_0 r \gg 1$ величина $\delta \rightarrow 1$ для всех значений v). Это означает, что в первом случае шаг спирали меньше, чем в дальнем поле, во втором случае — наоборот, причем и в том и в другом случае шаг является переменным. При этом зона “переменности” простирается до значений $k_0 r \approx v$. Спиральная волна при $v = 0.5$ является “чистой” спиралью Архимеда, поскольку радиальная скорость цилиндрической волны $H_{0.5}^{(1)}(k_0 r)$ не зависит от радиуса. С физической точки зрения при больших значениях v и $k_0 r \ll 1$ среда ведет себя как несжимаемая ($c(r)/c_0 \rightarrow \infty$).

Далее перейдем к способам возбуждения спиральных волн. Отметим, что обычные цилиндрические волны в волноводах могут быть созданы точечным источником любой конфигурации. Поскольку спиральные волны относятся к классу бегущих волн, они могут быть возбуждены только искусственно созданными излучателями, описанными ниже. Одним из них может быть излучатель бегущей волны кругового типа. Предполага-

ется, что он расположен на окружности $r = r_0$ и состоит из отдельных пьезоэлектрических секций, не связанных между собой ни механически, ни электрически. Их размер мал по сравнению с длиной волны, а их количество $N \gg 1$.

Вначале рассмотрим случай целого значения n . Подадим одновременно на секцию номера j $j = 1-N$ электрические сигналы $V_{jc} = V_0 \cos n\theta_j \times \exp(-i\omega t)$ и $V_{js} = V_0 \sin n\theta_j \exp(-i\omega t + i\pi/2)$, где $\theta_j = 0 - 2\pi$, V_0 – произвольная амплитуда. Суммарный сигнал

$$V_j = V_{jc} + V_{js} = V_0 \left[\cos n\theta_j + \sin n\theta_j \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \right] \times \exp(-i\omega t) = V_0 \exp(n\theta_j - i\omega t)$$

представляет собой круговую волну $V = V_0 \exp(n\theta - i\omega t)$, которая создает спиральную волну вида (5) при $\nu = n$. При выборе добавочной фазы в виде $\exp(-i\pi/2)$ волновой фронт волны вращается в противоположную сторону.

Анализ показывает, что подобным образом можно с достаточной точностью возбудить спиральную волну с нецелым значением ν . Кроме того, последняя может быть разложена в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\exp(in\theta)$

$$\exp(i\nu\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\sin(n-\nu)}{n-\nu} \exp(in\theta).$$

Это, в принципе, может быть использовано при возбуждении волны с индексом ν .

После подробного исследования нулевой спиральной волны жидкого слоя перейдем к рассмотрению нормальных волн более высоких порядков. Прежде всего отметим, что при $k_0 < n\pi/l$ формулу (5) можно записать в виде

$$p(r, \theta, z) = K_\nu \left[\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - k_0^2 r} \right] \times \exp(i\nu\theta) \cos\left(n\pi \frac{z}{l}\right), \quad (20)$$

где $K_\nu(\)$ – функция Макдональда порядка ν . Нетрудно видеть, что выражение (20) описывает круговую, неоднородную по r , волну. При увели-

чении частоты (выше критической) возникают спиральные волны высоких порядков, свойства которых описываются теми же формулами, что и нулевая волна, но с заменой волнового числа k_0 на k из формулы (4). Исходя из этого, а также из того, что $k < k_0$, можно сделать некоторые качественные выводы о свойствах спиральных волн высоких порядков. Эти волны имеют переменный шаг спирали как по координате r , так и по частоте, и при этом значительно больший, чем у нулевой волны. На критических частотах ($k = 0$) фронты этих волн нормальны к окружностям $r = \text{const}$.

Наряду с проведенным в настоящей статье теоретическим исследованием спиральных волн представляло бы большой интерес провести соответствующие экспериментальные работы по проверке полученных результатов.

В заключение можно предположить, что описанные выше волны спирального типа могут, по видимому, существовать в твердых средах (пластинах, слоях и пр.), на поверхности жидкости (гравитационные волны) и др., а также как разновидность электромагнитных волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тютекин В.В. О винтовых волнах упругой цилиндрической оболочки // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 3. С. 331–336.
2. Тютекин В.В. Спирально-винтовые волны в упругой цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 4. С. 517–521.
3. Тютекин В.В. Круговые и спирально-винтовые нормальные волны цилиндрического волновода. Спиральные волны в свободном пространстве // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 4. С. 549–555.
4. Тютекин В.В. О свойствах круговых и спирально-винтовых волн цилиндрического волновода // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 4. С. 517–521.
5. Тютекин В.В., Бойко А.И. Спирально-винтовые нормальные волны вблизи цилиндрической полости в упругой среде // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 162–165.
6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. 342 с.
7. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370 с.