

ПОЛУЧЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ
БЮРГЕРСА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ

© 2011 г. А. Г. Кудрявцев, О. А. Сапожников*

Институт прикладной механики РАН
119991 Москва, Ленинский проспект 32а

* МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет

119991 Москва, Ленинские горы

E-mail: oleg@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 2.11.10 г.

Описывается метод нахождения точных решений неоднородного уравнения Бюргерса на основе преобразования Дарбу. Показано, что однократное преобразование Дарбу, примененное к однородному уравнению Бюргерса, переводит его в неоднородное уравнение, которое описывает распространение акустической волны навстречу околосвуковому потоку в сопле Лавалья. Степень сужения сопла при этом оказывается заданной и определяется коэффициентом вязкости среды. Базируясь на точном решении однородного уравнения Бюргерса, для полученной задачи о потоке в сопле выписаны все возможные регулярные стационарные решения и исследован характер эволюции нестационарных решений. Найден алгоритм многократного преобразования Дарбу, дающий возможность повысить силу неоднородности, т.е. увеличить степень сужения сопла. Оказалось, что такой подход приводит к дискретному набору возможных степеней сужения сопла, при которых возможно получение точных решений. С использованием теоремы Крама выписана формула, позволяющая находить точные решения неоднородного уравнения Бюргерса на основе решений однородного уравнения теплопроводности. Отмечено, что найденный алгоритм многократного преобразования Дарбу фактически позволяет дискретно уменьшать коэффициент вязкости среды.

Ключевые слова: неоднородное уравнение Бюргерса, преобразование Дарбу, сопло Лавалья, точные решения нелинейных уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

является одним из эталонных нелинейных уравнений математической физики. Изначально оно было выписано как модельное уравнение для описания одномерной турбулентности [1], но позже было показано, что это уравнение описывает ряд других различных по своей природе физических явлений. В частности, в нелинейной акустике уравнение Бюргерса используется для описания распространения одномерных акустических волн конечной амплитуды в условиях проявления диссипации; при этом $u(x, t)$ задает колебательную скорость гидродинамических частиц как функцию координаты x и времени t , а константа δ характеризует вязкость и теплопроводность среды [2, 3].

При наличии в среде источников уравнение Бюргерса модифицируется и принимает вид неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F, \quad (2)$$

где функция $F(x, t)$ в правой части описывает источники. Такое уравнение было впервые выведено из уравнений гидродинамики и использовалось в связи с исследованиями по лазерной генерации звука [4, 5]. Позже по аналогии были рассмотрены и другие физические ситуации [6]. Примерно в это же время неоднородное уравнение Бюргерса стало анализироваться в работах математиков [7–10].

Уравнение (1) уникально тем, что с помощью подстановки

$$u = -\frac{2\delta}{w} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3)$$

оно сводится к линейному уравнению теплопроводности для вспомогательной функции $w(x, t)$. Указанная линеаризация позволяет записать общее решение уравнения Бюргерса. Преобразование (3) для однородного уравнения было найдено в работе [11], но стало более известным после появления работ [12, 13] и поэтому получило назва-

ние подстановки Хопфа–Коула. Линеаризация позволяет выписать решение начальной задачи в интегральном виде. Соответствующий интеграл при произвольном начальном профиле $u(x, 0)$ в аналитическом виде не вычисляется, но для ряда случаев это сделать удается. Такой подход позволяет регулярным образом выписать точное решение уравнения Бюргера для ряда физически интересных ситуаций [14].

Весьма примечательно, что подстановка Хопфа–Коула (3) линеаризует и неоднородное уравнение (2), на что впервые было указано в работе [5]. Соответствующее линейное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Vw = 0, \quad (4)$$

где “потенциал” $V(x, t)$ определяется источниками:

$$F = 2\delta \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (5)$$

Уравнение (4) для краткости будем называть уравнением теплопроводности, т.е. так же как в случае $V = 0$. Применительно к задаче теплопроводности дополнительный член Vw описывает внутренний теплоотвод (или теплоподвод), пропорциональный локальной температуре. Подобная ситуация, например, характерна для процесса теплопроводности в насыщенных мелкими кровеносными сосудами биотканях [15]. Отметим, что уравнение (4) входит в класс уравнений вида

$$\alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} - \delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi = 0, \quad (6)$$

для решения которых показал свою эффективность метод преобразования Дарбу [16]. В частности, при $\alpha = i$ указанное уравнение (6) представляет собой нестационарное уравнение Шрёдингера для волновой функции ψ частицы при одномерном движении в потенциальном поле V . Именно в применении к уравнению Шрёдингера преобразование Дарбу привлекало в последние годы наибольшее внимание. Такой подход дает возможность получения новых решаемых моделей квантовой механики; он представляет интерес также в связи с его многочисленными связями с популярной тематикой метода обратной задачи рассеяния и теорией солитонов (см., например, [17]).

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ДАРБУ

Преобразование Дарбу для уравнения вида (6) представляет собой следующее линейное преобразование волновой функции [16]:

$$\tilde{\psi}(x, t) = [R(x, t) + \partial/\partial x] \psi(x, t). \quad (7)$$

Особенность такого перехода состоит в том, что если функция ψ удовлетворяет уравнению (6) с потенциалом V , то при определенном выборе зависимости $R(x, t)$ функция $\tilde{\psi}$ также будет удовлетворять уравнению (6), но уже с другим потенциалом \tilde{V} . На этой возможности и основан метод преобразования Дарбу. Идея состоит в том, чтобы для известного решения уравнения с “простым” потенциалом (например, $V = 0$) подобрать функцию R так, чтобы получить решение уравнения с более “сложным” потенциалом.

Покажем, как метод работает в случае уравнения (4). Обозначим в (7) $s = 2\delta R$ и рассмотрим следующий вид преобразования Дарбу для решений уравнения (3):

$$\tilde{w}(x, t) = \left[s(x, t)/(2\delta) + \frac{\partial}{\partial x} \right] w(x, t). \quad (8)$$

Вычисляя отсюда производные $\partial \tilde{w}/\partial t$ и $\partial^2 \tilde{w}/\partial x^2$ и учитывая соотношение (4) получим, что если вспомогательная функция $s(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial s}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = F \quad (9)$$

с правой частью (5), то новая функция $\tilde{w}(x, t)$ является решением уравнения вида (4) с новым потенциалом $\tilde{V} = V + \partial s/\partial x$:

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} - \delta \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \tilde{V}\tilde{w} = 0, \quad (10)$$

Условие (9) на функцию $s(x, t)$ есть не что иное, как неоднородное уравнение Бюргера (2), решения которого связаны преобразованием Хопфа–Коула (3) с решениями соответствующего уравнения теплопроводности (4). Этот факт весьма примечателен и указывает на более глубокую связь между уравнением Бюргера и уравнением теплопроводности, чем просто переход от одного уравнения к другому посредством преобразования Хопфа–Коула (хотя существование указанного преобразования (3), сводящего нелинейное уравнение к линейному, само по себе уникально).

Из приведенных соотношений нетрудно видеть, что преобразование Дарбу и для неоднородного уравнения Бюргера, и для парного ему уравнения теплопроводности можно записать в виде, относящемся только к одному из этих двух типов уравнений.

Например, рассмотрим уравнение теплопроводности (4) для функции $w(x, t)$. Пусть $v(x, t)$ — одно из его частных решений. Тогда для функции

$$\tilde{w} = w 2\delta \frac{\partial}{\partial x} (\ln v - \ln w)$$

получим то же самое уравнение вида (4), но с новым потенциалом

$$\tilde{V} = V - 2\delta \partial^2 (\ln v) / \partial x^2.$$

Аналогично можно оставаться в рамках уравнения вида (2). Если взять одно из решений $s(x, t)$ уравнения Бюргерса (2) с правой частью (5), то при замене

$$\tilde{u} = u - 2\delta \frac{\partial}{\partial x} \ln(u - s) \quad (11)$$

вновь приходим к неоднородному уравнению Бюргерса, но с новой правой частью

$$\tilde{F} = F + 2\delta \partial^2 s / \partial x^2. \quad (12)$$

В частном случае $s = \text{const}$ преобразование Дарбу не меняет правую часть: $\tilde{F} = F$, и для $F = 0$ формула (11) совпадает с формулой автопреобразования Бэклунда однородного уравнения Бюргерса [18]. Формулы (11), (12), по-видимому, впервые появились в работе [19], где они были использованы для анализа решений неоднородных уравнений Бюргерса с правыми частями, получающимися на основе класса точных решений неоднородного уравнения Бюргерса с линейной по x правой частью.

Примечательно, что указанная процедура перехода от уравнения Бюргерса с источником F к уравнению с другим источником \tilde{F} (или, то же самое, переход от задачи теплопроводности с одним потенциалом V к задаче с другим потенциалом \tilde{V}) может быть повторена. Многократное применение преобразований Дарбу может в принципе позволить найти решения неоднородного уравнения Бюргерса для ряда нетривиальных источников. В настоящей работе рассматривается получение цепочки решений уравнений вида (4) с различными потенциалами, получающимися при многократном применении преобразования Дарбу при выборе нулевого потенциала $V = 0$ в качестве исходного. Указанные решения уравнения (4) путем применения преобразования Хопфа–Коула (3) позволяют найти последовательность точно решаемых неоднородных уравнений Бюргерса (2). Ниже будет показано, что полученные решения описывают встречное распространение нелинейных волн в околосвуковом потоке вязкой жидкости в сопле Лаваля с различной степенью сужения сопла.

РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА, ПОЛУЧАЮЩЕГОСЯ ПРИ ОДНОКРАТНОМ ПРИМЕНЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ К ОДНОРОДНОМУ УРАВНЕНИЮ

Ограничимся рассмотрением класса стационарных неоднородностей, т.е. будем предполагать, что правая часть неоднородного уравнения Бюргерса не зависит от времени t .

Будем исходить из однородного уравнения Бюргерса (1). Его решения хорошо известны и выражаются с помощью подстановки Хопфа–Коула (3) через решения классического уравнения теплопроводности. Как отмечалось выше, неоднородное уравнение Бюргерса, “порождаемое” преобразованием Дарбу, имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \tilde{F}, \quad (13)$$

где \tilde{F} выражается по формуле (12), в которой $s(x, t)$ – некоторое решение однородного уравнения Бюргерса (1). Если интересоваться случаем не зависящих от времени источников, то в качестве s можно брать стационарные решения. Поскольку физические источники предполагаются регулярными в пространстве, в качестве таких стационарных решений выступают решения вида $u = s_0 = -(2\delta/L) \tanh[(x - x_0)/L]$, где постоянная L имеет смысл характерной ширины переходного участка в сглаженной ступенчатой функции, а x_0 – координата центра указанного участка. Без ограничения общности можно считать $L = 1$ и $x_0 = 0$, так как более общая ситуация сводится к простой замене переменных. Итак, примем

$$s_0(x) = -2\delta \tanh x. \quad (14)$$

Примечательно, что при использовании решения (14) неоднородное уравнение Бюргерса с правой частью

$$\tilde{F} = 2\delta d^2 s_0 / dx^2 = -4\delta^2 \frac{d}{dx} (\cosh^{-2} x) \quad (15)$$

описывает распространение нелинейной акустической волны навстречу околосвуковому потоку в трубе с участком уменьшенного сечения (сопле Лаваля). Действительно, одномерное распространение волны в трубе с плавным изменением сечения $A(x)$ описывается неоднородным уравнением вида (2) с правой частью $F \sim dA/dx$ [20]. Поэтому функция (15) дает зависимость $A(x) \sim \text{const} - \cosh^{-2} x$, описывающую плавное сужение–расширение в окрестности $x = 0$ на участке протяженностью $\Delta x \sim 1$. Отметим, однако, что получившаяся сила неоднородности \tilde{F} (15) не является произвольной: она пропорциональна квадрату диссипативного коэффициента δ и поэтому описывает сопло, подобранное под заданный коэффициент вязкости среды. Однако разумно предположить, что выбранный частный случай отражает основные особенности эволюции волны в сопле Лаваля произвольного вида. Данное предположение будет обосновано ниже проведенным рассмотрением цепочки неоднородностей с увеличивающейся амплитудой.

Рассмотрим возможный вид стационарных решений получившегося неоднородного уравне-

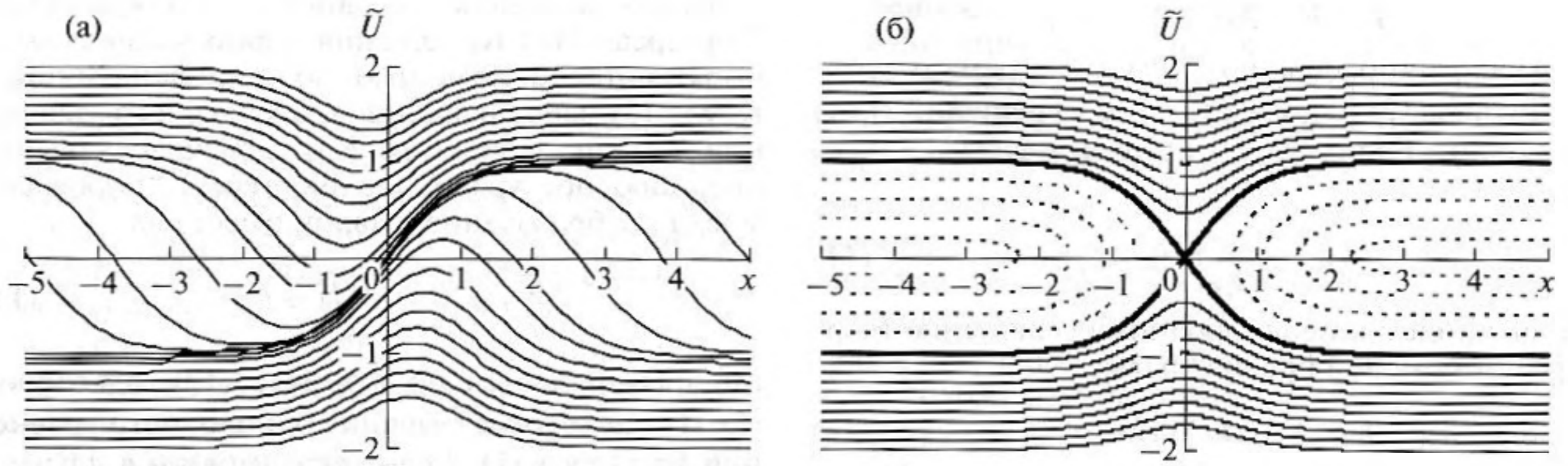


Рис. 1. Стационарные решения неоднородного уравнения с правой частью, описываемой формулой (15). Соответствующие решения описывают скорость околосредового потока в сопле Лавала. Поток направлен слева направо, величина \tilde{U} пропорциональна числу Маха потока, т.е. при $\tilde{U} < 0$ поток является дозвуковым, при $\tilde{U} > 0$ – сверхзвуковым. (а) Случай вязкой среды. (б) Случай невязкой среды. Штриховыми линиями показаны двузначные стационарные решения, которые физически не реализуются; толстые сепаратрисы соответствуют трансзвуковому режиму течения.

ния. Их можно найти по формуле (11), где $s = s_0$, т.е. задается формулой (14), а в качестве u следует использовать другие возможные стационарные решения уравнения Бюргерса (1). В общем случае стационарные решения однородного уравнения Бюргерса разбиваются на три класса: (i) постоянные решения $u = U_0 = \text{const}$; (ii) решения в виде плавного перехода от $u(-\infty) = U_\infty$ к $u(+\infty) = -U_\infty$ с центром при $x = x_0$: $u = -U_\infty \tanh[U_\infty(x - x_0)/(2\delta)]$; решение (14) именно этого типа; (iii) сингулярные решения в виде гиперболического котангенса: $u = -U_\infty / \tanh[U_\infty(x - x_0)/(2\delta)]$. Заметим, что при анализе решений уравнения Бюргерса (1) обычно решения (i) и (iii) не рассматриваются, поскольку первое является тривиальным, а второе – нефизичным. Однако для нашего рассмотрения именно эти решения оказываются полезными. Регулярное же решение вида (ii) только при $U_\infty = 2\delta$ и отличных от нуля значений x_0 не пересекает кривую (14), и поэтому его подстановка в формулу (11) приводит к сингулярности, т.е. соответствующее решение является нефизичным.

При использовании $u = U_0$ сингулярность в формуле (11) исключается, если $|U_0| > 2\delta$. При этом получается целое семейство стационарных решений неоднородного уравнения Бюргерса. В безразмерном виде соответствующие зависимости (11) принимают вид:

$$\tilde{U} = \alpha - \frac{\cosh^{-2} x}{\alpha + \tanh x}, \quad (16)$$

где $\alpha = U_0/(2\delta)$ – параметр семейства, $|\alpha| \geq 1$, $\tilde{U} = \tilde{u}/(2\delta)$. Кривые (16) изображены на рис. 1а. Для сравнения на рис. 1б показаны аналогичные зависимости для безразмерной скорости стацио-

нарного потока в сопле Лавала при отсутствии диссипации среды (этот случай был исследован в работах [20, 21]). Опуская в уравнении (13) член $\sim \partial^2 \tilde{u} / \partial x^2$, для стационарного решения в среде без диссипации получим в безразмерных переменных $\tilde{U} = \pm \sqrt{\beta^2 - \cosh^{-2} x}$, где β – параметр семейства.

Из сравнения рис. 1а и 1б видно, какое влияние оказывает вязкость среды на характер стационарного течения.

При отсутствии вязкости четко различаются три режима: дозвуковой ($\tilde{U} < 0$), сверхзвуковой ($\tilde{U} > 0$) и трансзвуковой. При дозвуковом режиме скорость потока \tilde{U} увеличивается в окрестности критического (минимального) сечения, в сверхзвуковом, наоборот, уменьшается. Трансзвуковой режим, показанный на рис. 1б толстыми линиями, может быть разгонным (с ростом x величина \tilde{U} увеличивается) или тормозным (\tilde{U} уменьшается). Существует четкая область, ограниченная трансзвуковыми сепаратрисами, в которой не могут находиться кривые стационарного потока.

В случае ненулевой вязкости (рис. 1а) стационарные режимы также можно разделить на три выделенных выше типа. Однако трансзвуковой режим представлен уже не двумя сепаратрисами, а целым семейством кривых, причем соответствующие потоки, являющиеся дозвуковыми вдали от области неоднородности, становятся сверхзвуковыми лишь на некотором участке справа от критического сечения. Аналогично, сверхзвуковые при $|x| \gg 1$ потоки становятся локально дозвуковыми непосредственно перед критическим сечением. Таким образом, вязкость качественно меняет характер околосредового течения.

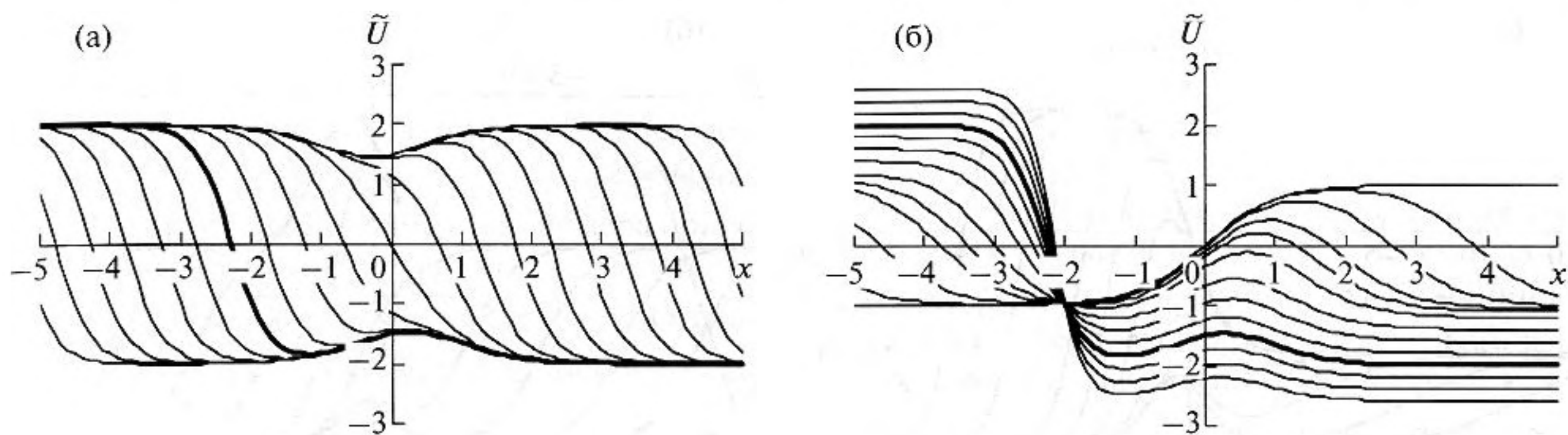


Рис. 2. Двухпараметрическое семейство стационарных решений неоднородного уравнения, описываемое формулой (17): (а) $\gamma = 2$, различные значения x_0 ; толстая линия соответствует случаю $x_0 = -2$; (б) $x_0 = -2$, различные значения γ ; толстая линия соответствует случаю $\gamma = 2$.

Описанные выше стационарные решения уравнения (13) с правой частью (15) — лишь один из двух возможных классов. Как отмечалось выше, второй класс получается из сингулярных решений однородного уравнения Бюргерса $u = -U_\infty / \tanh[U_\infty(x - x_0)/(2\delta)]$. Из формул (11) и (14) в этом случае для $\tilde{U} = \tilde{u}/(2\delta)$ получим двухпараметрическое семейство кривых:

$$\tilde{U} = \frac{\gamma \tanh x + (\cosh^{-2} x - \gamma^2) \tanh[\gamma(x - x_0)]}{\gamma - \tanh x \tanh[\gamma(x - x_0)]}, \quad (17)$$

где константы $\gamma = U_\infty/(2\delta)$ и x_0 — параметры, причем $\gamma \geq 1$, а x_0 — любое число.

На рис. 2 приведены характерные стационарные профили для различных параметров γ и x_0 . Заметим, что при $x \ll x_0$ можно считать $\tanh[\gamma(x - x_0)] \approx -1$, тогда из (17) получим формулу (16) $\tilde{U} \approx \alpha - \cosh^{-2} x / (\alpha + \tanh x)$, где $\alpha = \gamma$. Точно так же в приближении $x \gg x_0$ опять получим формулу (16) $\tilde{U} \approx \alpha - \cosh^{-2} x / (\alpha + \tanh x)$, где $\alpha = -\gamma$. Таким образом, стационарные решения вида (17) описывают решения в виде перехода между сверхзвуковыми ($\alpha = \gamma$) и дозвуковыми ($\alpha = -\gamma$) профилями семейства (16). Координата центра этого перехода задается параметром x_0 . В случае невязкой среды соответствующие стационарные профили могут быть построены как слабые решения соответствующего неоднородного уравнения путем введения при $x = x_0$ скачкообразного перехода от сверхзвукового при $x < x_0$ стационарного потока к дозвуковому при $x > x_0$ стационарному потоку.

Наряду с описанными выше регулярными стационарными решениями, существуют сингулярные стационарные решения, подобно тому, как в случае однородного уравнения Бюргерса наряду с гладкими решениями в виде гиперболического

тангенса имеются решения с особенностью в виде гиперболического котангенса. Такие сингулярные решения неоднородного уравнения Бюргерса нефизичны, поэтому здесь не анализируются. Однако в случае многократного применения преобразования Дарбу (см. ниже) и сингулярные стационарные решения представляют ценность, так как при подстановке в формулу (11) они позволяют получить гладкие решения. Пример получения семейства (17) уже проиллюстрировал такую возможность.

Применим технику преобразования Дарбу для получения нестационарных решений уравнения (13) с правой частью (15). В качестве примера рассмотрим волну, имеющую вид набегающего на область неоднородности ступенчатого перехода между стационарными решениями, изображенными на рис. 1а. Напомним, что указанные стационарные решения получались путем подстановки в преобразование Дарбу (11) стационарного решения однородного уравнения Бюргерса вида $u = U_0$. Рассмотрим теперь в качестве порождающего решения u нестационарное решение уравнения (1) в виде сглаженного вязкостью перехода от стационарного потока с $u(\infty) = U_0 - A/2$ к другому стационарному потоку с $u(\infty) = U_0 + A/2$:

$$u = U_0 - \frac{A}{2} \tanh \left[\frac{A}{4\delta} (x - x_0 - U_0 t) \right]. \quad (18)$$

Применяя преобразование Дарбу (11), получим отсюда искомое выражение для $\tilde{U} = \tilde{u}/(2\delta)$:

$$\tilde{U} = \alpha - \Delta\alpha \tanh[\Delta\alpha(x - x_0 - 2\alpha\delta t)] + \frac{\Delta\alpha^2 \cosh^{-2}[\Delta\alpha(x - x_0 - 2\alpha\delta t)] - \cosh^{-2} x}{\alpha - \Delta\alpha \tanh[\Delta\alpha(x - x_0 - 2\alpha\delta t)] + \tanh x}, \quad (19)$$

где $\Delta\alpha = A/(4\delta)$. Согласно (3) и (18), для решения (19) производящая функция равна $w = \exp[-\alpha x + \delta(\alpha^2 + \Delta\alpha^2)t] \cosh[\Delta\alpha(x - x_0 - 2\alpha\delta t)]$. Характер эволюции волны, описываемой выражением (19),

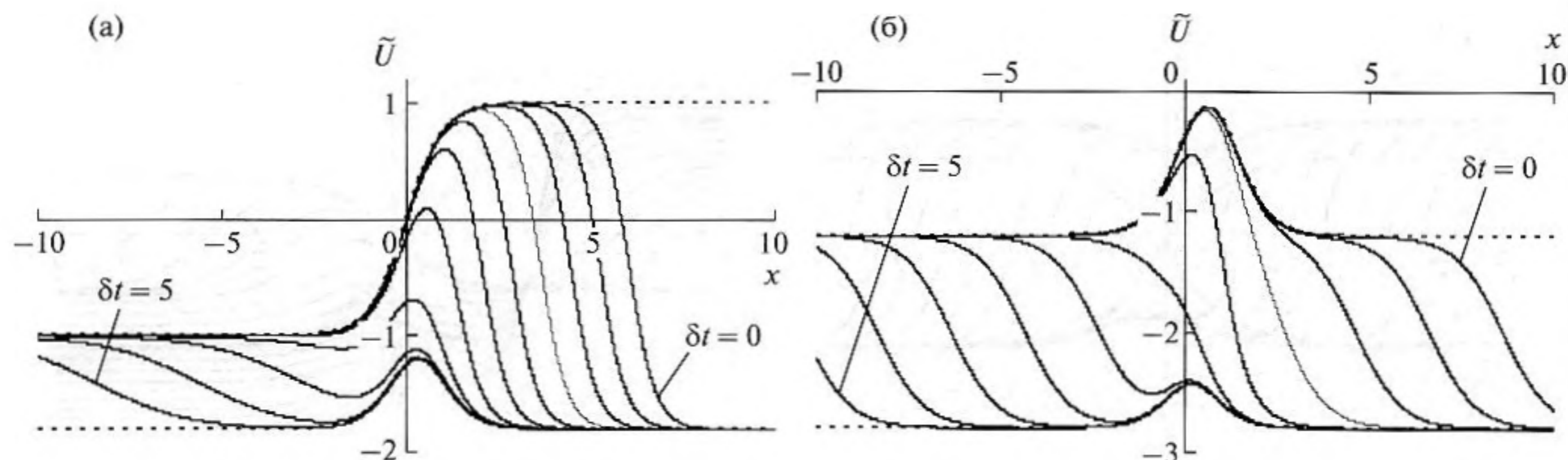


Рис. 3. Прохождение ступенчатого возмущения через область неоднородности (перестройка потока в сопле Лавалья). Показаны профили волны в последовательные моменты времени. (а) Случай перестройки трансзвукового потока в дозвуковой: $\alpha = -1.4$, $\Delta\alpha = 0.4$, $x_0 = 20$, $\delta t = 0, 1, \dots, 10$. (б) Случай перестройки одного дозвукового режима в другой: $\alpha = -2$, $\Delta\alpha = 0.8$, $x_0 = 10$, $\delta t = 0, 0.5, 1, \dots, 5$.

показан на рис. 3. Стационарные решения, соответствующие двум уровням исходного ступенчатого возмущения, показаны штриховыми линиями и построены по формуле (16). Исходное возмущение задано справа от области неоднородности, с течением времени оно продвигается влево и перестраивает поток с исходного стационарного режима на новый.

Похожим образом анализируются возмущения, имеющие вид скачкообразного перехода между сверхзвуковыми ($\alpha > 1$) стационарными решениями. Поскольку уравнение (13) с правой частью (15) не меняет вида при замене $\tilde{u} \rightarrow -\tilde{u}$, $x \rightarrow -x$, то можно использовать результат проведенного выше анализа случая $\alpha < -1$.

МНОГОКРАТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ

Заметим, что посредством преобразования Дарбу каждое из стационарных решений (16) и (17) может быть использовано для получения неоднородных уравнений с новыми правыми частями, причем решения этих новых уравнений будут выражаться известным образом через решения исходного уравнения. Далее эта процедура может быть многократно повторена.

Рассмотрим цепочку неоднородных уравнений Бюргерса, получающихся друг из друга в результате повторяющегося применения преобразования Дарбу. Будем помечать индексом $n = 0, 1, 2, \dots$ решение и правую часть на n -м шаге такой процедуры:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = F_n(x). \quad (20)$$

В качестве исходного ($n = 0$) уравнения выберем однородное уравнение Бюргерса, т.е. примем $F_0 = 0$. В соответствии с преобразованием (12), при многократном применении преобразования Дарбу правая часть принимает вид:

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + 2\delta \frac{d^2 s_{n-1}}{dx^2} = \dots = \\ &= F_0 + 2\delta \frac{d^2 s_0}{dx^2} + \dots + 2\delta \frac{d^2 s_{n-1}}{dx^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $s_n(x)$ — одно из стационарных решений уравнения (20). В соответствии с (14) $s_0(x) = -2\delta \tanh x$, и на 1-м шаге формула (21) сводится к (15): $F_1 = 2\delta d^2 s_0 / dx^2$. В качестве $s_1(x)$ может быть выбрано любое из стационарных решений вида (16) и (17), т.е. уже на первом шаге преобразование Дарбу порождает многопараметрическое семейство возможных источников.

Из всего многообразия возможных неоднородностей $F_n(x)$ будем интересоваться теми, которые для каждого n описывают один и тот же (рассмотренный выше) пространственный профиль сопла Лавалья: $F_n(x) = \Lambda_n d^2 s_0 / dx^2$, где $\Lambda_n > 0$ — некоторый множитель, растущий с номером n . Такое возможно лишь если для каждого n уравнение (20) имеет стационарное решение вида $s_n = \lambda_n s_0$, где λ_n — масштабный коэффициент, $\lambda_0 = 1$. Подставим эту форму s_n в выражение (21) и рассмотрим для $n \geq 1$ стационарные решения уравнения (20) с получившейся правой частью:

$$\lambda_n^2 s_0 \frac{ds_0}{dx} - \delta \lambda_n \frac{d^2 s_0}{dx^2} = F_n, \quad (22)$$

$$F_n = (1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}) 2\delta \frac{d^2 s_0}{dx^2}. \quad (23)$$

С учетом того, что $s_0 ds_0/dx = \delta d^2 s_0/dx^2$, получим из (22): $\lambda_n^2 - \lambda_n = 2(1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})$, что с учетом требования роста F_n с увеличением номера приводит к рекуррентной формуле для нахождения λ_n : $\lambda_n = (1 + \sqrt{1 + 8(1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})})/2$, $n \geq 1$. Отсюда $\lambda_n = n + 1$. Следовательно, решения искомого вида действительно существуют, причем

$$s_n = (n + 1)s_0 = -2\delta(n + 1) \tanh x. \quad (24)$$

Например, $s_1 = 2s_0$ — решение из семейства (17), соответствующее параметрам $\gamma = 2$ и $x_0 = 0$. Последовательность стационарных решений (24) дает алгоритм увеличения “силы” неоднородности при сохранении ее пространственного профиля:

$$F_n(x) = -2\delta^2 n(n + 1) \frac{d}{dx} (\cosh^{-2} x). \quad (25)$$

Из выражения (25) видно, что путем многократного применения преобразования Дарбу можно в принципе смоделировать неоднородность какой угодно силы и тем самым сделать ее не зависящей от коэффициента вязкости. Примечательной особенностью здесь является дискретный характер возможного увеличения силы источника: $F_n(x) = F_1(x)n(n + 1)/2$. В реальной задаче о сопле Лавала вязкий член обычно мал, т.е. скачки $F_{n+1} - F_n$ (“кванты” неоднородности) также малы.

Увеличение (25) правой части при фиксированном профиле сопла можно также трактовать как переход к менее вязкой среде. Действительно, если обозначить $\hat{\delta} = \delta\sqrt{n(n + 1)}/2$, то уравнение (20) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t} + u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{\hat{\delta}}{\sqrt{n(n + 1)}/2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \\ = -4\hat{\delta}^2 \frac{d}{dx} (\cosh^{-2} x), \end{aligned} \quad (26)$$

т.е. n -кратное преобразование Дарбу приводит к задаче о распространении волны в том же самом сопле, но в среде с уменьшенным в $\sqrt{n(n + 1)}/2$ раз коэффициентом вязкости.

НАХОЖДЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ В СОПЛЕ ЛАВАЛЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ВЯЗКОСТИ

Вместо последовательности (20) рассмотрим цепочку уравнений типа (4), решения которого связаны с решениями уравнения Бюргерса преобразованием Хопфа–Коула. Пусть в результате

n -кратного преобразования Дарбу получено уравнение с потенциалом V_n :

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} - \delta \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + V_n w_n = 0. \quad (27)$$

Правая часть F_n неоднородного уравнения Бюргерса (20) выражается через потенциал V_n : $F_n = 2\delta \partial V_n / \partial x$, в соответствии с (5). Функции w_n и u_n связаны преобразованием Хопфа–Коула (3). Напомним, что в рассматриваемом случае $V_0 = 0$.

Решения w_n на n -м шаге многократного преобразования Дарбу могут быть выражены в явном виде через набор решений лишь исходного уравнения, т.е. удастся избежать операций с решениями на промежуточных шагах. Соответствующий результат был изложен в работе [22] и называется теоремой Крама. Поясним подход применительно к нашему уравнению. Пусть n функций $w_0^{(0)}$, $w_0^{(1)}$, ..., $w_0^{(n-1)}$ описывают некоторые выбранные решения исходного уравнения с потенциалом V_0 , которые зададут конкретное многократное преобразование, а w — еще одно решение того же уравнения, выбором которого будет получаться решение на n -м шаге. Согласно теореме Крама, первые n решений позволяют получить при n -кратном преобразовании Дарбу потенциал

$$V_n = V_0 - 2\delta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln W(w_0^{(0)}, \dots, w_0^{(n-1)}), \quad (28)$$

а решения уравнения (27) при этом выражаются следующим образом:

$$w_n = \frac{W(w_0^{(0)}, \dots, w_0^{(n-1)}, w)}{W(w_0^{(0)}, \dots, w_0^{(n-1)})}, \quad (29)$$

где $W(\dots)$ — соответствующие определители Вронского. Например, при однократном преобразовании имеется лишь одна функция $w_0^{(0)} = v_0 = e^{\delta t} \cosh x$, которая соответствует стационарному решению уравнения Бюргерса $s_0 = -2\delta \partial \ln v_0 / \partial x$ из (14). Тогда $W(w_0^{(0)}) = v_0$, $W(w_0^{(0)}, w) = v_0 \partial w / \partial x - w \partial v_0 / \partial x$, и формула (29) принимает вид преобразования Дарбу (8) $w_1 = (s_0 / (2\delta) + \partial / \partial x) w$, как и должно быть.

Для того чтобы с помощью формул (28) и (29) анализировать последовательность неоднородностей (25), нужно найти явный вид функций $w_0^{(k)}(x, t)$. Так как нужные нам неоднородности уравнения Бюргерса связаны с функциями V_n соотношением (5), мы можем выбирать V_n не зависящими от t . Пусть v_n — те решения уравнения теплопроводности с потенциалом V_n , которые используются для построения следующего по по-

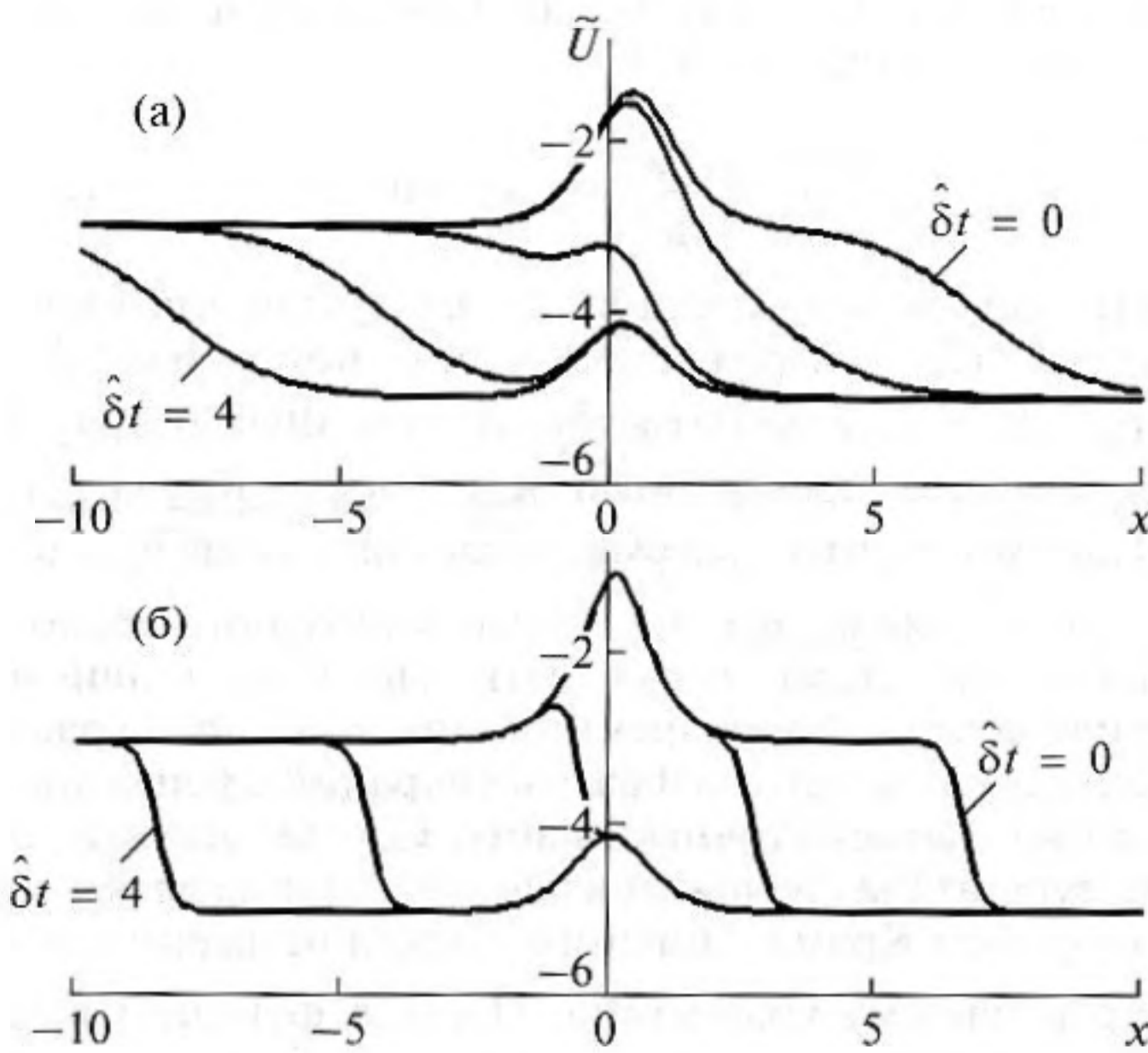


Рис. 4. Прохождение ступенчатого возмущения через область неоднородности при различной вязкости среды, рассчитанное на основе уравнения (26). Показаны профили волны $\tilde{U} = u_n/(2\delta)$ в последовательные моменты времени $\tilde{d}t = 0, 1, 2, 3, 4$. (а) Решение, полученное с применением 1-кратного преобразования Дарбу. (б) Решение, полученное 8-кратным преобразованием Дарбу; при этом коэффициент вязкости в 6 раз меньше, чем в предыдущем случае.

ряду потенциала в процедуре многократного преобразования Дарбу: $V_{n+1} = V_n - 2\delta \partial^2 \ln v_n / \partial x^2$. Напомним, что v_n связаны с s_n преобразованием Хопфа–Коула. Согласно формуле (29), $w_0^{(n)}$ — это то решение исходного уравнения с нулевым потенциалом, которое при подстановке в (29) в качестве w дает v_n :

$$v_n = \frac{W(w_0^{(0)}, \dots, w_0^{(n-1)}, w_0^{(n)})}{W(w_0^{(0)}, \dots, w_0^{(n-1)})}. \quad (30)$$

Выразим решение v_n уравнения теплопроводности с потенциалом

$$V_n = -\delta n(n+1) \cosh^{-2} x, \quad (31)$$

соответствующим $F_n = 2\delta \partial V_n / \partial x$ из формулы (25). Согласно преобразованию Хопфа–Коула, решение уравнения Бюргерса $s_n = (n+1)s_0$ соответствует решению уравнения теплопроводности вида $v_n = C(t)(\cosh x)^{n+1}$, где C — некоторая функция только времени. Явный вид $C(t)$ получаем из условия, что v_n является решением уравнения теплопроводности (27) с потенциалом (31):

$$v_n(x, t) = e^{\delta(n+1)^2 t} (\cosh x)^{n+1}. \quad (32)$$

Так как операторы преобразования Дарбу с выбранными $s_n(x) \sim s_0(x)$ на каждом шаге не зависят от t , то на каждом шаге преобразований Дарбу в качестве прообраза можно выбирать функцию с экспоненциальной зависимостью от t вида (32). В результате временная зависимость $w_0^{(n)}$ должна быть такой же, как у v_n , т.е. $w_0^{(n)}(x, t) = e^{\delta(n+1)^2 t} \Psi_n(x)$. Подставляя такой вид решения в уравнение теплопроводности, приходим к уравнению $d^2 \Psi_n / dx^2 = (n+1)^2 \Psi_n$. Отсюда

$$\Psi_n = A_n \cosh[(n+1)x] + B_n \sinh[(n+1)x], \quad (33)$$

где A_n и B_n — произвольные константы. Заметим, что при преобразовании Дарбу $w_n = \hat{D} w_{n-1}$, где $\hat{D} = (s_{n-1}/(2\delta) + \partial/\partial x)$, изменяется четность, поскольку и функция $s_{n-1}(x)$, и оператор дифференцирования $\partial/\partial x$ являются нечетными. Согласно (32), функция $v_n(x, t)$ является четной функцией координаты. Это означает, что если она является результатом четного количества преобразований Дарбу, то исходная функция $w_0^{(n)}$ должна быть четной по x , а если количество преобразований нечетно, то — нечетной. С учетом этого в выражении (33) один из коэффициентов A_n и B_n должен быть равен нулю. В итоге получаем искомое выражение для функций $w_0^{(n)}$ (произвольный множитель без ограничения общности можно положить равным единице):

$$w_0^{(n)}(x, t) = e^{\delta(n+1)^2 t} \times \begin{cases} \cosh[(n+1)x], & n = 0, 2, 4, \dots \\ \sinh[(n+1)x], & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (34)$$

Отметим, что соответствующие решения однородного уравнения Бюргерса имеют вид гиперболического тангенса (для четных n) или котангенса (для нечетных n), т.е. используются и гладкие, и сингулярные стационарные профили.

Таким образом, решения неоднородного уравнения Бюргерса (20) с правой частью (25) могут быть выражены в явном виде через решения $w(x, t)$ уравнения теплопроводности с нулевым потенциалом $\partial w / \partial t = 2\delta \partial^2 w / \partial x^2$. Применяя преобразование Хопфа–Коула к выражению (29), запишем решение в виде:

$$u_n = -2\delta \frac{\partial}{\partial x} \ln \left[\frac{W(w_0^{(0)}, \dots, w_0^{(n-1)}, w)}{W(w_0^{(0)}, \dots, w_0^{(n-1)})} \right], \quad (35)$$

С учетом (5), (25) и (28) формулу (35) можно переписать в виде, требующем меньшего количества расчетов:

$$u_n = 2\delta \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \tanh x - \frac{\partial}{\partial x} \ln \left[W(w_0^{(0)}, \dots, w_0^{(n-1)}, w) \right] \right\}. \quad (36)$$

На рис. 4б приведен пример решения, построенного путем применения формулы (36) при $n \gg 1$ ($n = 8$). Для сравнения на рис. 4а приведено решение для случая 1-кратного преобразования Дарбу. Рассматривается прохождение ступенчатого возмущения через область неоднородности, аналогично случаю, рассмотренному на рис. 3б. Видно, что если решение при $n = 1$ описывает скачки с шириной вязкого перехода порядка размера области неоднородности, то решение при $n \gg 1$ уже соответствует волне с намного меньшей шириной перехода — фактически ударной волне.

ОБСУЖДЕНИЕ

Подход, использованный в данной статье для анализа неоднородного уравнения Бюргерса, основан на совместном использовании двух эффективных математических методов. Первый метод — преобразование Хопфа—Коула — связывает решения нелинейного уравнения Бюргерса с описывающей неоднородность правой частью с решениями линейного уравнения теплопроводности с соответствующим этой правой части потенциалом. Второй метод — преобразование Дарбу — связывает решения уравнений теплопроводности с разными потенциалами. Однократным или многократным применением преобразования Дарбу из одного интегрируемого уравнения теплопроводности (например, с нулевым потенциалом) получается новое интегрируемое уравнение теплопроводности с новым потенциалом. Это новое интегрируемое уравнение теплопроводности за счет преобразования Хопфа—Коула приводит к новому интегрируемому неоднородному уравнению Бюргерса.

В данной статье указанный подход применен для анализа неоднородных уравнений Бюргерса с правой частью, описывающей сопло Лаваля с разной степенью сужения. На этом примере проиллюстрирована возможность получения явных аналитических формул в случае n -кратного применения преобразования Дарбу. Отметим, что хотя соответствующая формула (36) выглядит компактной, при раскрытии имеющегося в ней вронскиана окончательные выражения для решения могут оказаться весьма громоздкими. Поэтому ручное вычисление выражений может представить значительные трудности. Однако поскольку вычисление определителей и производных являются рутинными процедурами, расчет может быть проведен с помощью стандартных математических программ символьных вычислений. В

частности, приведенный на рис. 4 пример решения для $n = 8$ был рассчитан с использованием пакета Maple на персональном компьютере с процессором 1.7 ГГц, при этом вычисления заняли менее минуты машинного времени.

За счет имеющегося произвола в выборе функции, входящей в преобразование Дарбу, и возможности многократного применения преобразования Дарбу подход может быть применен для анализа широкого класса стационарных и нестационарных правых частей неоднородного уравнения Бюргерса.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 08-02-00368-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Burgers J.M. Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion // Trans. Roy. Neth. Acad. Sci. Amsterdam. 1939. V. 17. P. 1–53.
2. Mendousse J.S. Nonlinear dissipative distortion of progressive sound waves at moderate amplitudes // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. P. 51–54.
3. Хохлов P.B. К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6. № 6. С. 917–925.
4. Руденко O.B. О возможности генерации мощного гиперзвука с помощью лазерного излучения // Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20. № 7. С. 445–448.
5. Карабутов A.A., Лапшин E.A., Руденко O.B. О взаимодействии светового излучения со звуком в условиях проявления акустической нелинейности // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. № 1(7). С. 111–121.
6. Васильева O.A., Карабутов A.A., Лапшин E.A., Руденко O.B. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд. МГУ, 1983.
7. Moulana M. and Nariboli G.A. On Backlund transformations of some 2nd-order nonlinear equations // J. Math. Phys. Sci. 1977. V. 11. P. 491–504.
8. Nimmo J.J.C and Crighton D.G. Backlund transformations for nonlinear parabolic equations: the general results // Proc. R. Soc. Lond. 1982. A384. P. 381–401.
9. Pasmantier R.A. Stability and Backlund transform of the forced Burgers equation // J. Math. Phys. 1986. V. 29. P. 2744–2746.
10. Sachdev P.L. Nonlinear Diffusive Waves. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 246 p.
11. Forsyth A.R. Theory of differential equations, v. VI. Cambridge: Cambridge University Press, 1906. 582 p.
12. Cole J.D. On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. 1951. V. 9. P. 225–236.
13. Hopf T. The partial differential equation // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V. 3. P. 201–230.
14. Benton E.R., Platzman G.W. A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation // Quart. Appl. Math. 1972. V. 30. P. 195–212.
15. Бэйли M.P., Хохлова B.A., Сапожников O.A., Каргл C.Г., Крам Л.А. Физические механизмы воз-

- действия терапевтического ультразвука на биологическую ткань (обзор) // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 4. С. 437–464.
16. *Matveev V.B., Salle M.A.* Darboux transformations and solitons. Springer, 1991.
 17. *Захарьев Б.Н., Чабанов В.М.* Послушная квантовая механика. Новый статус теории в подходе обратной задачи. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
 18. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the inverse scattering transform. SIAM. Philadelphia, 1981.
 19. *Schulze-Halberg A., Jimenez J.M.* Darboux transformations for the time-dependent nonhomogeneous Burgers equation in (1+1) dimensions // Phys. Scr. 2009. V. 80. P. 1–8.
 20. *Карabutov A.A., Сапожников O.A.* Об отражении акустических возмущений от околосзвуковой области сопла Лаваля // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 538–542.
 21. *Карabutov A.A., Сапожников O.A.* Акустические волны конечной амплитуды в околосзвуковой области течения сжимаемого газа // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 5. С. 865–870.
 22. *Crum M.M.* Associated Sturm-Liouville systems // Quart. J. Math. 1955. V. 6. P. 121–127.