

УДК 534.529

АКУСТИЧЕСКИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ПУЗЫРЬКОВ,  
ВМРОЖЕННЫХ В ЛЕДЯНОЙ ПОКРОВ

© 2011 г. А. О. Максимов

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН

690041 Владивосток, ул. Балтийская, 43

E-mail: maksimov@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 17.06.10 г.

Углеводородные источники на дне океана порождают скопления всплывающих пузырьков – газовые факелы. В зимнее время пузырьки, достигнув поверхности, вмораживаются в лед. Эти скопления вмороженных пузырьков наблюдаются в арктических морях и представляют собой обычный элемент ледяного покрова озер, в частности оз. Байкал. На основе общего решения задачи рассеяния на сфере в изотропной упругой среде найдено сечение рассеяния на пузырьке, вмороженном в ледяной покров. Построена теория многократного рассеяния на скоплении вмороженных пузырьков. Описана структура низкочастотных резонансов, отвечающих коллективным колебаниям пелены пузырьков.

*Ключевые слова:* лед, пузырек, газовый факел, многократное рассеяние.

## ВВЕДЕНИЕ

В течение последнего десятилетия скопления газовых гидратов были выявлены во многих окраинных морях Мирового океана [1]. Косвенные признаки присутствия газогидратов в осадках можно обнаружить по данным акустического зондирования. Углеводородные источники на дне океана порождают скопления всплывающих пузырьков – газовые факелы, которые легко регистрируются с помощью гидролокаторов, благодаря большому сечению рассеяния звука на отдельных включениях. Акустические проявления этого природного образования были предметом как экспериментальных [2–5], так и теоретических [6, 7] исследований.

В зимнее время и в арктических морях пузырьки газа вмораживаются в лед. Поскольку прозрачность льда в значительной степени определяется наличием в нем газовых включений, изучение их структуры и распределения были предметом многочисленных оптических исследований, например, [8, 9]. В то же время об акустических проявлениях вмороженных в лед пузырьков известно крайне мало [10, 11], при том, что акустика льда является достаточно развитой областью исследований [12–18]. Для низких частот, используемых для дистанционного зондирования в Арктике, выделить вклад пузырьков на фоне широкого спектра неоднородностей морского льда достаточно затруднительно. Однако поиски углеводородных источников и их проявлений в арктических морях делают востребованным развитие ди-

станционных методов регистрации скоплений метановых включений в ледяном покрове.

РАССЕЯНИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ  
НА ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Сферическое включение, ввиду существования аналитического решения, занимает доминирующее место в перечне исследований процесса рассеяния упругой волны на локализованной неоднородности (см., например, [19–21]). Для этой модели будет применяться описание с помощью полей смещений и напряжений [22], а не более широко используемый подход, базирующийся на введении потенциалов.

Взаимодействие падающей волны с включением радиуса  $R$  приводит к генерации возмущений как внутри полости, так и вне ее, для обозначения которых вводится индекс  $\nu$  ( $\nu = 1$  для параметров внутри, а  $\nu = 2$  – вне полости). Суммарное поле во внешней среде состоит из падающей и рассеянных волн  $U^{(2)} = U_0 + U^{sc}$ , удовлетворяющих линейному уравнению теории упругости

$$c_i^2 \Delta U - c_i^2 [\nabla \times [\nabla \times U]] + \omega^2 U = 0. \quad (1)$$

Скорости продольной  $c_l$  и поперечной  $c_t$  волн выражаются через параметры Ламэ  $\mu$  (модуль сдвига) и  $\lambda = K - (2/3)\mu$  ( $K$  – модуль всестороннего сжатия) следующим образом:  $c_l^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ ,  $c_t^2 = \mu/\rho$ .

Наличие сферической симметрии рассеивателя делает удобным представление решений в виде

рядов по сферическим гармоникам, однако в отличие от звуковых волн в жидкости, физические поля в упругой среде являются векторными, поэтому разложение осуществляется по векторным сферическим гармоникам [22]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_{lm}^0(\vartheta, \alpha) &= \mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}(\vartheta, \alpha), \\
 Y_{lm}(\vartheta, \alpha) &= e^{im\alpha} P_l^m(\cos \vartheta), \quad (l \geq 0, \quad -l \leq m \leq l), \\
 \mathbf{Y}_{lm}^+(\vartheta, \alpha) &= (l+1)Y_{lm}(\vartheta, \alpha)\mathbf{e}_r - r\nabla Y_{lm}(\vartheta, \alpha), \\
 \mathbf{Y}_{lm}^-(\vartheta, \alpha) &= lY_{lm}(\vartheta, \alpha)\mathbf{e}_r + r\nabla Y_{lm}(\vartheta, \alpha),
 \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$  — единичный вектор в радиальном направлении. Эти векторные гармоники удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{\Omega} \mathbf{Y}_{lm}^{(\kappa)*} \mathbf{Y}_{l'm'}^{(\kappa')} d\Omega = [c_{lm}^{(\kappa)}]^{-2} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{\kappa\kappa'},$$

$$\begin{aligned}
 c_{lm}^0 &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}, \\
 c_{lm}^+ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi(l+1)} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}, \\
 c_{lm}^- &= \sqrt{\frac{1}{4\pi l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}},
 \end{aligned} \quad (3)$$

здесь индекс  $\kappa$  пробегает значения  $(+0, -)$ , а  $(*)$  означает комплексное сопряжение.

Поле смещений традиционно разделяется на потенциальную (P) и соленоидальную (S) составляющие

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_P + \mathbf{U}_S, \quad \nabla \times \mathbf{U}_P = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{U}_S = 0,$$

разложение которых по векторным гармоникам имеет вид [22]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_P &= \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \{ F_{lm}^+(r) \mathbf{Y}_{lm}^+ + F_{lm}^-(r) \mathbf{Y}_{lm}^- \}, \\
 \mathbf{U}_S &= \sum_{l \geq 1} \sum_{m=-l}^l \{ f_{lm}^0(r) \mathbf{Y}_{lm}^0 + f_{lm}^+(r) \mathbf{Y}_{lm}^+ + f_{lm}^-(r) \mathbf{Y}_{lm}^- \}.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Подстановка этих выражений в (1) и использование условий ортогональности сферических гармоник позволяет получить представление радиальной части решения в виде линейных комбинаций сферических функций Бесселя  $j_l(w)$  и Ханкеля  $h_l(w)$

$$\begin{aligned}
 F_{lm}^+(r) &= a_{lm}^1 j_{l+1}(k_l r) + a_{lm}^2 h_{l+1}(k_l r), \\
 F_{lm}^-(r) &= -a_{lm}^1 j_{l-1}(k_l r) - a_{lm}^2 h_{l-1}(k_l r), \\
 f_{lm}^+(r) &= b_{lm}^1 j_{l+1}(k_l r) + b_{lm}^2 h_{l+1}(k_l r), \\
 f_{lm}^-(r) &= \frac{(l+1)}{l} [b_{lm}^1 j_{l-1}(k_l r) + b_{lm}^2 h_{l-1}(k_l r)],
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$f_{lm}^0(r) = c_{lm}^1 j_l(k_l r) + c_{lm}^2 h_l(k_l r).$$

В качестве примера приведем явный вид разложения в двух важных частных случаях. Для плоской продольной волны  $\mathbf{U}_0 = \mathbf{e}_z \exp(ik_l z)$ , распространяющейся в положительном направлении оси  $z - \mathbf{e}_z$  с волновым вектором  $k_l = \omega/c_l$ , коэффициенты разложения равны [22]

$$a_{lm}^{(0)} = e^{i\frac{\pi}{2}(l+1)} \delta_{m,0}, \quad b_{lm}^{(0)} = 0, \quad c_{lm}^{(0)} = 0, \quad (6)$$

а для плоской поперечной волны  $\mathbf{U}_0 = \mathbf{e}_x \exp(ik_l z)$ , распространяющейся в положительном направлении оси  $z - \mathbf{e}_z$  и поляризованной вдоль направления оси  $x - \mathbf{e}_x$ , коэффициенты разложения имеют следующий вид [22]

$$\begin{aligned}
 a_{lm}^{(0)} &= 0, \quad b_{lm}^{(0)} = \frac{1}{2l(l+1)} [l(l+1)\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}] e^{i\frac{\pi}{2}(l+1)}, \\
 c_{lm}^{(0)} &= -\frac{2l+1}{2l(l+1)} [l(l+1)\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}] e^{i\frac{\pi}{2}(l+1)}.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Если теперь ввести канонические волны [22]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{lm}^{\text{in}} &= j_{l+1}(k_l r) \mathbf{Y}_{lm}^+(\vartheta, \alpha) - j_{l-1}(k_l r) \mathbf{Y}_{lm}^-(\vartheta, \alpha) = \\
 &= -\frac{(2l+1)}{k_l} \nabla (j_l(k_l r) Y_{lm}(\vartheta, \alpha)), \\
 \mathbf{SH}_{lm}^{\text{in}} &= j_l(k_l r) \mathbf{Y}_{lm}^0(\vartheta, \alpha) = \\
 &= [\mathbf{r} \times \nabla (j_l(k_l r) Y_{lm}(\vartheta, \alpha))], \\
 \mathbf{SV}_{lm}^{\text{in}} &= l j_{l+1}(k_l r) \mathbf{Y}_{lm}^+(\vartheta, \alpha) + \\
 &+ (l+1) j_{l-1}(k_l r) \mathbf{Y}_{lm}^-(\vartheta, \alpha) = \\
 &= -\frac{(2l+1)}{k_l} [\nabla \times \mathbf{SH}_{lm}^{\text{in}}],
 \end{aligned} \quad (8)$$

то произвольная падающая волна может быть представлена как их линейная комбинация

$$\mathbf{U}^{\text{in}} = \sum_{l,m} [a_{lm}^{(\text{in})} \mathbf{P}_{lm}^{\text{in}} + b_{lm}^{(\text{in})} \mathbf{SV}_{lm}^{\text{in}} + c_{lm}^{(\text{in})} \mathbf{SH}_{lm}^{\text{in}}]. \quad (9)$$

Канонические отраженные волны  $\mathbf{P}_{lm}^{\text{out}}$ ,  $\mathbf{SV}_{lm}^{\text{out}}$ ,  $\mathbf{SH}_{lm}^{\text{out}}$  описываются выражениями (9), в которых функция Бесселя заменена на функцию Ханкеля первого рода.

Структурные коэффициенты рассеяния канонических волн определяются из граничных условий на поверхности сферы. После того как они найдены, общее решение задачи рассеяния имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 U^{sc} = & \sum_{l,m} \left\{ c_{lm}^{(in)} c_l^S h_l(k_l r) Y_{lm}^0 + \right. \\
 & + \left[ (a_{lm}^{(in)} a_l^{PP} + b_{lm}^{(in)} a_l^{SP}) h_{l+1}(k_l r) + \right. \\
 & + l (a_{lm}^{(in)} b_l^{PS} + b_{lm}^{(in)} b_l^{SS}) h_{l+1}(k_l r) \left. \right] Y_{lm}^+ + \\
 & + \left[ - (a_{lm}^{(in)} a_l^{PP} + b_{lm}^{(in)} a_l^{SP}) h_{l-1}(k_l r) + \right. \\
 & + (l+1) (a_{lm}^{(in)} b_l^{PS} + b_{lm}^{(in)} b_l^{SS}) h_{l-1}(k_l r) \left. \right] Y_{lm}^- \left. \right\}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Согласно [22], коэффициенты рассеяния канонических волн имеют вид:

$$\begin{aligned}
 a_l^{PP} = \frac{\Delta_{PP}}{\Delta}, \quad b_l^{PS} = \frac{\Delta_{PS}}{\Delta}, \quad a_l^{SP} = \frac{\Delta_{SP}}{\Delta}, \quad b_l^{SS} = \frac{\Delta_{SS}}{\Delta}, \\
 c_l^S = \frac{(l+2)j_l(\eta_2) - \eta_2 j_{l-1}(\eta_2)}{(l+2)h_l(\eta_2) - \eta_2 h_{l-1}(\eta_2)}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta = & \frac{\xi_2^3 \eta_2^2}{2l+1} \left\{ (2l+1) \frac{h_l(\xi_2)}{\xi_2} h_l(\eta_2) \left( j_{l+1}(\xi_1) - \frac{l}{\xi_1} j_l(\xi_1) \right) - \right. \\
 & - (2l+1) \frac{\rho_g j_l(\xi_1)}{\rho \xi_1} h_l(\eta_2) \left( h_{l+1}(\xi_2) - \frac{l}{\xi_2} h_l(\xi_2) \right) + \\
 & + \frac{2 \rho_g \Delta_2}{\eta_2 \rho} \left( 2j_{l+1}(\xi_1) - \frac{2l-1}{\xi_1} j_l(\xi_1) \right) + \\
 & + \frac{4}{\eta_2^3} (l-1)(l+2) \Delta_2 \left( j_{l+1}(\xi_1) - \frac{l}{\xi_1} j_l(\xi_1) \right), \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{PS} = & 2 \frac{\eta_2^3}{2l+1} \left\{ \left( j_{l+1}(\xi_1) - \frac{l}{\xi_1} j_l(\xi_1) \right) \times \right. \\
 & \times \left( 1 - (l-1)(l+2) \frac{2}{\eta_2^2} \right) + \frac{j_l(\xi_1) \rho_g}{\xi_1 \rho} \left. \right\}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\Delta_{SP} = \frac{c_l^2}{c_l} l(l+1) \Delta_{PS}. \quad (14)$$

Выражения для  $\Delta_{PP}$  и  $\Delta_{SS}$  получаются из  $\Delta$  заменой функции  $h_k(\xi_2)$  ( $k = l-1, l, l+1$ ) на функцию  $-j_k(\xi_2)$ . Соответственно, выражение для  $\Delta_{SS}$  может быть получено заменой в  $\Delta$  функций  $h_k(\eta_2)$  на  $-j_k(\eta_2)$ . При выводе формул (11), (12) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 = \omega R / c_g, \quad \xi_2 = \omega R / c_l, \quad \eta_2 = \omega R / c_l, \quad (15) \\
 \Delta_2 = (l+1) h_{l+1}(\xi_2) h_{l-1}(\eta_2) + l h_{l-1}(\xi_2) h_{l+1}(\eta_2).
 \end{aligned}$$

Для падающих P и S волн сечения рассеяния выражаются через структурные коэффициенты следующим образом:

$$\sigma^P = \sigma^{PP} + \sigma^{PS} = \frac{4\pi}{k_l^2} \sum_{l \geq 0} (2l+1) \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ |a_l^{PP}|^2 + l(l+1) (c_l / c_l)^3 |b_l^{PS}|^2 \right\}, \\
 & \sigma^S = \sigma^{SP} + \sigma^{SS} = \frac{2\pi}{(c_l / c_l)^3 k_l^2} \times \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\times \sum_{l \geq 1} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} |a_l^{SP}|^2 + \frac{2\pi}{k_l^2} \sum_{l \geq 1} (2l+1) \left\{ |b_l^{SS}|^2 + |c_l^S|^2 \right\}.$$

В длинноволновом приближении  $k_l R \ll 1$ ,  $k_l R \ll 1$  первые, значимые, структурные коэффициенты имеют следующее асимптотическое поведение:

$$a_0^{PP} = i \frac{(k_l R)^3 (3/2)(\gamma P_0 - \lambda) - \mu}{6 (3/4)\gamma P_0 + \mu},$$

$$a_1^{PP} = -i \frac{(k_l R)^3}{9} \left( \frac{\rho_g}{\rho} - 1 \right), \quad a_2^{PP} = -i \frac{4(k_l R)^3}{45} \frac{c_l^2}{c_l^2 D},$$

$$a_1^{SP} = i \frac{2(k_l R)^3}{9} \left( \frac{\rho_g}{\rho} - 1 \right), \quad a_2^{SP} = i \frac{4(k_l R)^3}{45} \frac{c_l}{c_l D},$$

$$b_1^{PS} = i \frac{(k_l R)^3}{9} \left( \frac{\rho_g}{\rho} - 1 \right), \quad b_2^{PS} = i \frac{2(k_l R)^3}{45} \frac{c_l}{c_l D}, \quad (17)$$

$$b_1^{SS} = -i \frac{2(k_l R)^3}{9} \left( \frac{\rho_g}{\rho} - 1 \right), \quad b_2^{SS} = -i \frac{2(k_l R)^3}{15} \frac{1}{D},$$

$$c_1^S = -i \frac{(k_l R)^5}{45} \left( \frac{\rho_g}{\rho} - 1 \right), \quad c_2^S = -i \frac{(k_l R)^5}{180},$$

$$D = 1 - \frac{2}{15} \left( 3 + 2 \frac{c_l^2}{c_l^2} \right).$$

Коэффициенты  $c_1^S, c_2^S$  являются малыми по сравнению с другими членами, и этими каналами рассеяния можно пренебречь. Существенным отличием от рассеяния на пузырьке в жидкости является наличие сопоставимого с монопольным ( $l = 0$ ) и дипольным ( $l = 1$ ) вклада в рассеяние от квадрупольной ( $l = 2$ ) составляющей.

### ОСОБЕННОСТИ РАССЕЯНИЯ НА ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКАХ, ВМОРОЖЕННЫХ В ЛЕД

Учтем специфику упругих характеристик льда, параметров газовых включений и диапазона частот, используемых в натуральных экспериментах. Результаты прецизионных лабораторных измерений дают следующие значения скоростей продольной и поперечных волн в чистом (без примесей и пузырьков) льду [23]

$$c_l(T) = c_l(0) + (dc_l/dT)T,$$

$$c_l(0) = 3837.9(\pm 5.3) \text{ м/с},$$

$$(dc_i/dT) = -2.812(\pm 0.012) \text{ м/(с } ^\circ\text{C)}, \quad (18)$$

$$c_i(T) = c_i(0) + (dc_i/dT)T,$$

$$c_i(0) = 1826(\pm 4.7) \text{ м/с},$$

$$(dc_i/dT) = -1.435(\pm 0.028) \text{ м/(с } ^\circ\text{C)}.$$

Плотность льда, образовавшегося при кристаллизации пресной воды при 0°C и нормальном давлении, составляет 917 кг/м<sup>3</sup>. Морской лед обладает сложной слоистой структурой и состоит из кристаллов пресного льда, рассола (brine), пузырьков воздуха и различных примесей [9]. Их соотношение зависит от условий льдообразования и последующих ледовых процессов и определяет плотность льда. Соленость льда оказывает относительно небольшое воздействие на плотность льда и в гораздо большей степени влияет на величину скорости звука. Натурные измерения скоростей звука во льду Берингова моря [24] демонстрируют вариации от 3000 до 3800 м/с при изменении солености от 3 до 12‰ и температуры от -5 до -13°C. Значения скорости звука сдвиговой волны располагаются в интервале от 1550 до 1800 м/с, и их вариации определяются главным образом зависимостью от температуры.

Использование высокочастотных источников звука (десятки кГц) позволяет измерить профиль скорости звука в льдине [25]. Скорость волны сжатия меняется от нескольких сот м/с в верхнем слое снега до нескольких тысяч в основном слое льда, с тем, чтобы быстро упасть до значений, меньших скорости звука в жидкости в дендритном слое [25, 26]. Еще большие вариации может претерпевать скорость сдвиговой волны: так, в водонаполненном льду дендритной структуры она может составлять всего 200 м/с, т.е. быть меньше скорости звука в воздухе.

Характерная область частот, используемая для анализа результатов наиболее масштабных полевых экспериментов [15, 27, 28] составляет от нескольких десятков Гц до 1 кГц. Только при проведении локальных измерений [25] применяются относительно высокочастотные источники с частотами 40–80 кГц.

Существенным отличием в поведении газовых включений, замороженных в лед, от поведения пузырьков в жидкости является то, что пузырек в жидкости – “мягкий” объект, его сжимаемость определяется сжимаемостью газа, которая на несколько порядков превышает сжимаемость окружающей среды. Газовая полость во льду, как правило “жесткий” объект, поскольку его сжимаемость определяется величиной сдвиговых модулей льда, которые в обычных условиях на по-

рядки превосходят сжимаемость газовой компоненты. Это означает, что газовая компонента не играет заметной роли, и рассеяние на пузырьке происходит, как на пустой полости.

Однако для нижнего, близкого к границе с жидкостью слоя, или для весеннего льда, когда велика доля жидких ячеек в его структуре, скорость поперечной составляющей уменьшается на порядок  $c_t/c_l \ll 1$ . Это поведение обусловлено тем, что изгибный модуль ледяного каркаса уменьшается с увеличением пористости [29]. В условиях, когда можно использовать континуальное описание, т.е. когда на минимальном характерном масштабе (радиусе пузырька или длине волны) находится много соляных ячеек, такой “жидкий” лед становится эффективно резиноподобной средой. Для описания характеристик рассеяния можно воспользоваться известными результатами [30]. Для наглядной физической величины – амплитуды рассеяния  $f_0^{PP} = ia_0^{PP}/k_l$  имеем:

$$f_0^{PP} = R_0 \frac{\omega^2 (1 - \gamma P_0/K) (1 + 4\mu/3K)^{-1}}{\frac{4\mu}{\rho R_0^2} + \frac{3\gamma P_0}{\rho R_0^2} - \omega^2 (1 + ik_l R_0)}, \quad (19)$$

здесь  $K = \lambda + (2/3)\mu$  – модуль всестороннего сжатия. В этом случае при  $k_l R \ll 1$ , но  $k_l R \sim 1$ , монополярная составляющая обладает резонансной особенностью. Собственные колебания полости  $\omega \approx \Omega_0 = 2\sqrt{\mu/\rho} R_0^{-1} = 2c_l/R_0$  определяются изгибной упругостью слоя окружающего льда, а сжимаемость газа представляет собой лишь малую поправку. Частота этих колебаний существенно превышает частоту собственных колебаний пузырька того же размера в жидкости. Добротность этих колебаний определяется радиационным затуханием. Именно из-за того, что эти колебания высокочастотны, диссипативные (тепловые) потери происходят в тонком пристеночном слое  $\Delta l \sim \sqrt{k/\omega}$  ( $k$  – коэффициент температуропроводности) и их вклад не столь значителен. Резонансное сечение рассеяния на замороженном пузырьке превышает его геометрические размеры в меру различия скоростей  $c_l/c_t \gg 1$  (или упругих модулей  $K \gg \mu$ ).

Размер полостей, замороженных в лед над метановыми источниками, может быть достаточно велик. Так, на фотографиях, сделанных в районе, прилегающем к дельте Лены [31], в качестве масштабной линейки использовался батометр Нансена, т.е. речь идет о характерном масштабе в десятки сантиметров. Подобные образования с тем же характерным размером наблюдались и на

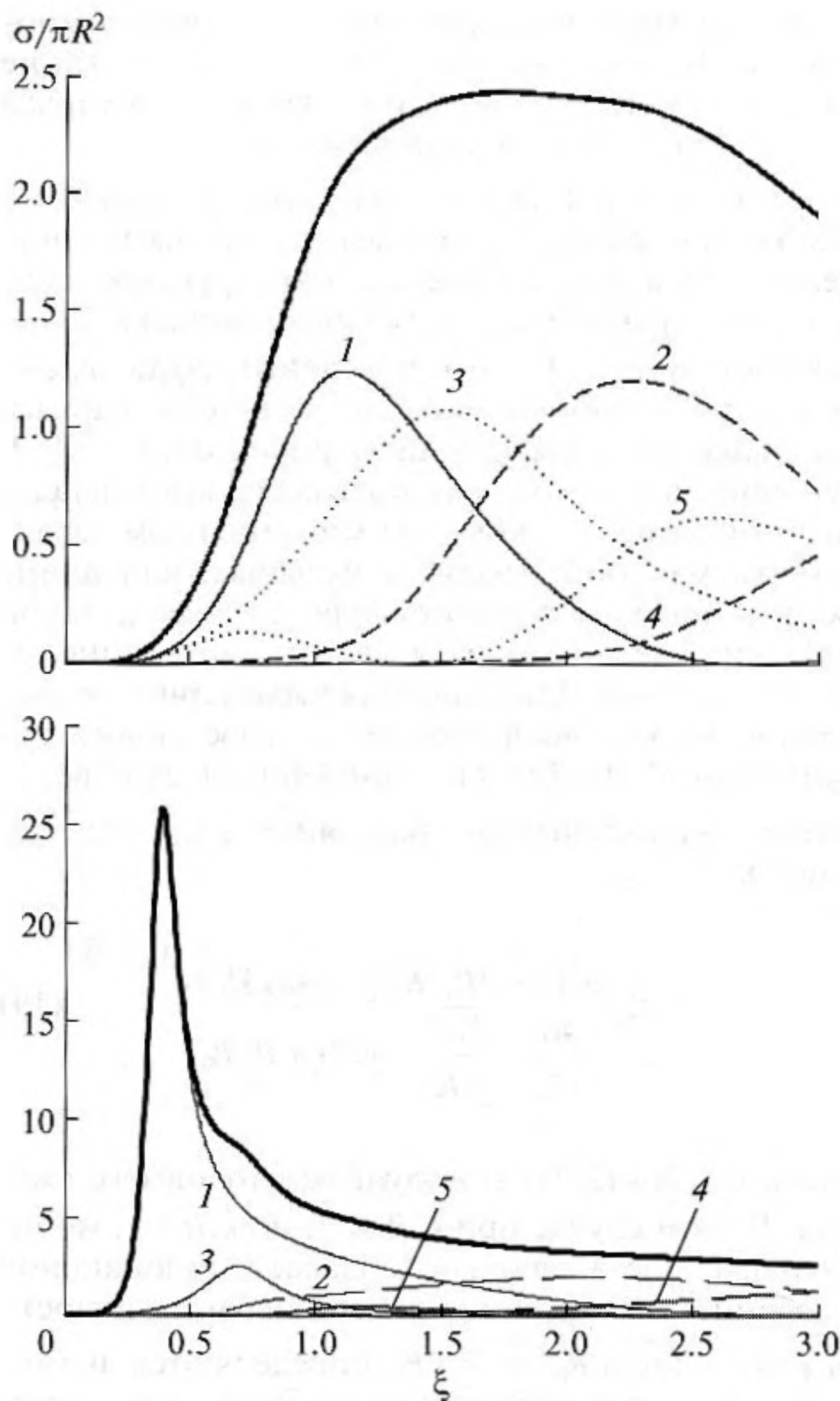


Рис. 1. (а, б) Зависимость нормированных частичных сечений рассеяния продольной волны ( $\sigma_l/\pi R^2$ ) от безразмерного волнового числа  $\xi = (\omega R/c_l)$ : 1 – монополярная составляющая ( $l=0$ ) (тонкая сплошная линия); 2 – дипольная составляющая ( $l=1$ ) рассеяния в продольную компоненту (штрихованная линия); 3 – дипольная составляющая ( $l=1$ ) рассеяния в поперечную компоненту (пунктирная линия); 4 – квадрупольная составляющая ( $l=2$ ) рассеяния в продольную компоненту (светлая штрихованная линия); 5 – квадрупольная составляющая ( $l=2$ ) рассеяния в поперечную компоненту (светлая пунктирная линия). Рис. 1а – расчет для обычного льда:  $c_l = 3200$  м/с,  $c_t = 1600$  м/с, рис. 1б – для “жидкого” льда  $c_l = 3200$  м/с,  $c_t = 600$  м/с. Суммарное сечение рассеяния изображено сплошной жирной линией.

оз. Байкал в дельте р. Селенга [32, 33]. По этой причине интерес представляет не только длинноволновая асимптотика рассеяния, но и область, где  $k_l R \sim 1$  ( $\xi \sim 1$ ). Следует, однако, отметить, что

форма включений большого размера отличается от сферической, поэтому результаты расчета справедливы не более чем по порядку величины (для случая, когда все геометрические размеры включения сопоставимы).

Для иллюстрации зависимости сечения рассеяния на пузырьке от частоты (безразмерного волнового вектора  $\xi$ ) на рис. 1 представлены результаты численных расчетов на основании выражений для структурных коэффициентов, полученных с помощью общих формул (11)–(14). Для падающей Р волны вида (6) сечение рассеяния монополярной составляющей ( $l=0$ ) (нормированное на площадь поперечного сечения включения) имеет вид

$$\left(\frac{\sigma_0^{PP}}{\pi R^2}\right) = \frac{4 \left[ \xi^2 \sin \xi - \left(4c_t^2/c_l^2\right) (\sin \xi - \xi \cos \xi) \right]^2}{\xi^2 \left[ \left(\xi^2 - 4c_t^2/c_l^2\right)^2 + \left(16c_t^4/c_l^4\right) \xi^2 \right]} \quad (20)$$

и зависит только от безразмерного волнового числа  $\xi = \omega R/c_l$  и отношения скоростей  $c_t/c_l$ . График (20) изображен на рис. 1а сплошной тонкой линией и помечен индексом 1. Для канала рассеяния в продольную составляющую дипольной компоненты ( $l=1$ ) имеем:

$$\left(\frac{\sigma_1^{PP}}{\pi R^2}\right) = \frac{3}{\xi^2 (1+\xi^2)} \left\{ \left[ \left(6 - \eta^2 - \frac{2\eta^2}{1+\eta^2}\right) \times \right. \right. \\ \times (\sin \xi - \xi \cos \xi) - \\ \left. \left. - 4(-2 \sin \xi + 2\xi \cos \xi + \xi^2 \sin \xi) \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{4\eta^6}{(1+\eta^2)^2} (\sin \xi - \xi \cos \xi)^2 \right\} \times \quad (21) \\ \times \left[ \left(18 - \eta^2 - \frac{2\eta^2}{1+\eta^2} - \frac{4\xi^2}{1+\xi^2}\right)^2 + \right. \\ \left. + 4 \left( \frac{\eta^3}{1+\eta^2} + 2 \frac{\xi^3}{1+\xi^2} \right)^2 \right]^{-1}.$$

Эта зависимость изображена штрихованной линией и снабжена индексом 2. Сечение рассеяния в поперечную составляющую той же дипольной компоненты имеет вид

$$\left(\frac{\sigma_1^{PS}}{\pi R^2}\right) = \frac{24\eta^6 (c_l/c_l)^3}{\xi^2(1+\xi^2)(1+\eta^2) \left[ \left(18 - \eta^2 - \frac{2\eta^2}{1+\eta^2} - \frac{4\xi^2}{1+\xi^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{\eta^3}{1+\eta^2} + 2\frac{\xi^3}{1+\xi^2}\right)^2 \right]} \quad (22)$$

и изображена пунктирной линией — ей присвоен индекс 3. Наконец, сечения рассеяния в продольную и поперечную составляющие квадрупольной компоненты ( $l = 2$ ) описываются следующими формулами:

$$\left(\frac{\sigma_2^{PP}}{\pi R^2}\right) = \frac{20(9 + 3\xi^2 + \xi^4)[A^2 + B^2]}{\xi^2[C^2 + D^2]}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_2^{PS}}{\pi R^2}\right) &= \\ &= \frac{480(8 - \eta^2)^2 \eta^8 (9 + 3\xi^2 + \xi^4)(9 + 3\eta^2 + \eta^4)}{[C^2 + D^2]}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} A &= [\eta^8 - 2\eta^6 + 27\eta^4 + 36\eta^2 + 864] \times \\ &\quad \times [(3 - \xi^2)\sin \xi - 3\xi \cos \xi] + \\ &\quad + 4[\eta^6 + 3\eta^4 + 2\eta^2 + 72] \times \\ &\quad \times [(-9 + 4\xi^2)\sin \xi + (9 - \xi^2)\xi \cos \xi], \\ B &= 16\eta^5 [(-9 + 4\xi^2)\sin \xi + (9 - \xi^2)\xi \cos \xi], \\ C &= [\eta^8 - 2\eta^6 + 27\eta^4 + 36\eta^2 + 864] \times \\ &\quad \times (9 + 3\xi^2 + \xi^4) - 4[\eta^6 + 3\eta^4 + 2\eta^2 + 72] \times \\ &\quad \times (27 + 6\xi^2 + \xi^4) + 16\xi^5 \eta^5, \\ D &= 4\xi^5 [\eta^6 + 3\eta^4 + 2\eta^2 + 72] + \\ &\quad + \eta^5 [16(27 + 6\xi^2 + \xi^4) + 2\eta^2(9 + 3\xi^2 + \xi^4)]. \end{aligned}$$

Поведение сечения при рассеянии в продольную компоненту  $\sigma_2^{PP}$  изображено светлой штрихованной линией с индексом 4, а в поперечную  $\sigma_2^{PS}$  — светлой пунктирной линией с индексом 5. Расчеты выполнены для пустого пузырька  $\rho_g = 0$  и ха-

рактерных значений скоростей звука, полученных на основе натуральных измерений в Беринговом море [24]:  $c_l = 1600$  м/с,  $c_l = 3200$  м/с. На рис. 16 представлены результаты расчета для “мокрого” льда, когда скорость звука поперечной волны существенно меньше продольной:  $c_l = 600$  м/с,  $c_l = 3200$  м/с. Хотя расчеты выполнены до значений  $\xi = 3$ , возможность ограничиться вкладом только трех первых мультипольных составляющих в полное сечение рассеяние допустима только при  $\xi < 1$ . На рис. 1а, 1б зависимость полного сечения рассеяния изображена сплошной жирной линией.

При падении на включение поперечной волны вида (7) вклад в монопольную составляющую отсутствует. Сечение рассеяние в поперечную составляющую дипольной компоненты имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_1^{SS}}{\pi R^2}\right) &= \frac{6}{\xi^2(1+\eta^2)} \left\{ \left[ \left(10 - \eta^2 - \frac{4\xi^2}{1+\xi^2}\right) \times \right. \right. \\ &\quad \times (\sin \eta - \eta \cos \eta) + 2(2 \sin \eta - 2\eta \cos \eta - \eta^2 \sin \eta) \left. \right]^2 + \\ &\quad + \frac{4\xi^6}{(1+\xi^2)^2} (\sin \eta - \eta \cos \eta)^2 \left. \right\} \times \\ &\quad \times \left[ \left(18 - \eta^2 - \frac{2\eta^2}{1+\eta^2} - \frac{4\xi^2}{1+\xi^2}\right)^2 + \right. \\ &\quad + 4 \left(\frac{\eta^3}{1+\eta^2} + 2\frac{\xi^3}{1+\xi^2}\right)^2 \left. \right]^{-1} + \\ &\quad + 6 \frac{[(3 \sin \eta - \eta \cos \eta) - \eta^2 \sin \eta]^2}{9 + 15\eta^2 + \eta^4}, \end{aligned} \quad (25)$$

а для канала рассеяния в продольную компоненту описывается формулой

$$\left(\frac{\sigma_1^{SP}}{\pi R^2}\right) = \frac{48\eta^4 (c_l/c_l)}{(1+\xi^2)(1+\eta^2) \left[ \left(18 - \eta^2 - \frac{2\eta^2}{1+\eta^2} - \frac{4\xi^2}{1+\xi^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{\eta^3}{1+\eta^2} + 2\frac{\xi^3}{1+\xi^2}\right)^2 \right]} \quad (26)$$

Следующие выражения характеризуют рассеяние квадрупольной моды:

$$\left(\frac{\sigma_2^{SS}}{\pi R^2}\right) = \frac{10(9 + 3\eta^2 + \eta^4)[E^2 + F^2]}{\xi^2 (c_t/c_l)^3 [C^2 + D^2]} + \frac{10\{4[(3 - \eta^2)\sin\eta - 3\eta\cos\eta] - \eta^2(\sin\eta - \eta\cos\eta)\}^2}{(c_t/c_l)^3 (144 + 48\eta^2 + \eta^4 + \eta^6)} \quad (27)$$

$$\left(\frac{\sigma_2^{SP}}{\pi R^2}\right) = \frac{240(8 - \eta^2)^2 \eta^6 (c_t/c_l)(9 + 3\xi^2 + \xi^4)(9 + 3\eta^2 + \eta^4)}{[C^2 + D^2]},$$

$$E = \left[ (96 - 22\eta^2 + \eta^4)(9 + 3\xi^2 + \xi^4) + 4(4 - \eta^2)(27 + 6\xi^2 + \xi^4) \right] \times \\ \times \left[ (3 - \eta^2)\sin\eta - 3\eta\cos\eta \right] + \left[ 2\eta^2(9 + 3\xi^2 + \xi^4) + 16(27 + 6\eta^2 + \eta^4) \right] \times \\ \times \left[ (-9 + 4\xi^2)\sin\xi + (9 - \xi^2)\xi\cos\xi \right], \quad (28)$$

$$F = 16\xi^5 \left[ (-9 + 4\eta^2)\sin\eta + (9 - \eta^2)\eta\cos\eta \right].$$

Результаты расчетов по формулам (25)–(28) представлены на рис. 2а, 2б. На рис. 2а представлены зависимости, полученные при  $c_t = 1600$  м/с,  $c_l = 3200$  м/с, а на рис. 2б — для  $c_t = 600$  м/с,  $c_l = 3200$  м/с. Нормированное сечение для канала рассеяния в поперечную составляющую дипольной компоненты ( $l = 1$ )  $\sigma_1^{SS}$  изображено штрихованной линией и помечено индексом 2, сечение для рассеяния в продольную составляющую той же дипольной компоненты  $\sigma_1^{SP}$  изображено пунктирной линией и снабжено индексом 3. Для квадрупольных компонент нормированное сечение  $\sigma_2^{SS}$  изображено светлой штрихованной линией и снабжено индексом 4, и, наконец, сечение  $\sigma_2^{SP}$  изображено светлой пунктирной линией с индексом 5.

Приведенные зависимости выбраны как типичные из достаточно широкого набора, получающегося варьированием единственного управляющего параметра  $c_t/c_l$  для имеющихся (экспериментально измеренных) значений скоростей продольных и поперечных волн. Отметим, что, как следует из выражений (21), (22) и рис. 1а, 1б и 2а, 2б, рассеяние дипольной компоненты не обладает резонансом с явно выраженной добротностью, что противоречит утверждениям работы [12]. Проверкой правильности приведенных выражений (20)–(28) является их длинноволновая асимптотика, совпадающая с (17).

Как следствие проведенных расчетов, для области  $\xi < 1$  могут быть использована упрощенная модель, характеризующая рассеяние на одиночном включении. Так, при падении Р волны значимыми являются лишь следующие каналы рассеяния: в монопольную компоненту продольной волны и в дипольную и квадрупольную компоненты поперечной волны. При рассеянии S вол-

ны значимыми являются лишь каналы рассеяния в поперечную компоненту.

### РАССЕЯНИЕ НА СКОПЛЕНИИ ВМРОЖЕННЫХ ПУЗЫРЬКОВ

В зависимости от интенсивности подводных источников и глубины водоема, поперечные размеры газового факела — скопления достигающих поверхности метановых пузырьков могут варьироваться от десятков сантиметров до нескольких десятков метров. Однако типичный размер, с которым сталкиваются при натуральных наблюдениях от побережья Калифорнии [34] до оз. Байкал [33] составляет несколько метров. Анализ реверберационных сигналов от взрывных или ударных источников [15, 27] является традиционным методом изучения характеристик морского льда. Оценим возможность проявления собственных частот замороженного облака включений в сигнал обратного рассеяния. В простейшем приближении однократного рассеяния — борновском приближении — в реверберационном сигнале будет присутствовать вклад от собственных колебаний отдельных включений. Однако в силу того, что замороженные пузырьки не столь добротны, как газовые пузырьки в жидкости, и собственные частоты этих колебаний существенно выше, наличие заметного вклада в обратное рассеяние на дистанции в 100 и более метров маловероятно.

Вместе с тем скопление включений может представлять собой эффективную среду, параметры которой (плотность и параметры Ламэ) существенно отличаются от параметров окружающего льда, поэтому в реверберационном сигнале могут проявляться низкочастотные резонансы всего облака. Приближение однократного рассеяния нельзя использовать для анализа этого эффекта, и мы сталкиваемся с необходимостью описать многократное рассеяние акустических волн в облаке замороженных пузырьков.

Волна от источника претерпевает многократные рассеяния на включениях, и поле деформаций в данной точке  $\mathbf{r}$  включает в себя смещение, вызванное как прямой волной, так и возмущениями, наведенными за счет рассеяния на включениях [35, 36]

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^N U^{sc}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (29)$$

Основная идея теории Фолди (Foldy) [35] состоит в том, что волну, падающую на  $i$ -е включение  $U^{in}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ , можно представить в виде суммы прямой волны и волн, рассеянных на всех включениях, за исключением  $i$ -го. В системе координат, совпадающей с центром  $i$ -го включения, имеем

$$U^{in}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = U_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N U^{sc}[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]. \quad (30)$$

Другой постулат этой теории состоит в том, что для того, чтобы найти связь между  $U^{in}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  и  $U^{sc}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ , достаточно решить задачу рассеяния на одиночном включении. Вводя для этой цели оператор рассеяния:  $U^{sc} = \hat{S}U^{in}$ , можно исключить переменную  $U^{sc}$ , и итерационное решение уравнения (30) дает формальное решение задачи. Процедура нахождения оператора рассеяния сводится к определению структурных коэффициентов (11)–(17). Однако для того чтобы эффективно вычислять члены итерационного ряда, необходимо установить связь между представлением поля, рассеянного на  $i$ -ом включении в виде ряда по векторным сферическим гармоникам, центрированных относительно этого включения, и полем, падающим на  $j$ -ое включение, которое описывается в виде разложения по функциям, центрированным уже относительно нового положения — центра  $j$ -го включения. Возможность нахождения в явном виде коэффициентов этого разложения обеспечивает так называемая теорема сложения для векторных волновых функций [37, 38]

$$P_{lm}^{out}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}) = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \times \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l+m)!(l'-m')!(n-k)!}{4\pi(2n+1)(l+m)!(n+k)!(l-m)!}} \times c(lm|l'm'|nk) \times h_r(k_l|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) Y_{l'm'}(\mathbf{e}_{ji}) P_{nk}^{in}(\Delta\mathbf{r}), \quad (31)$$

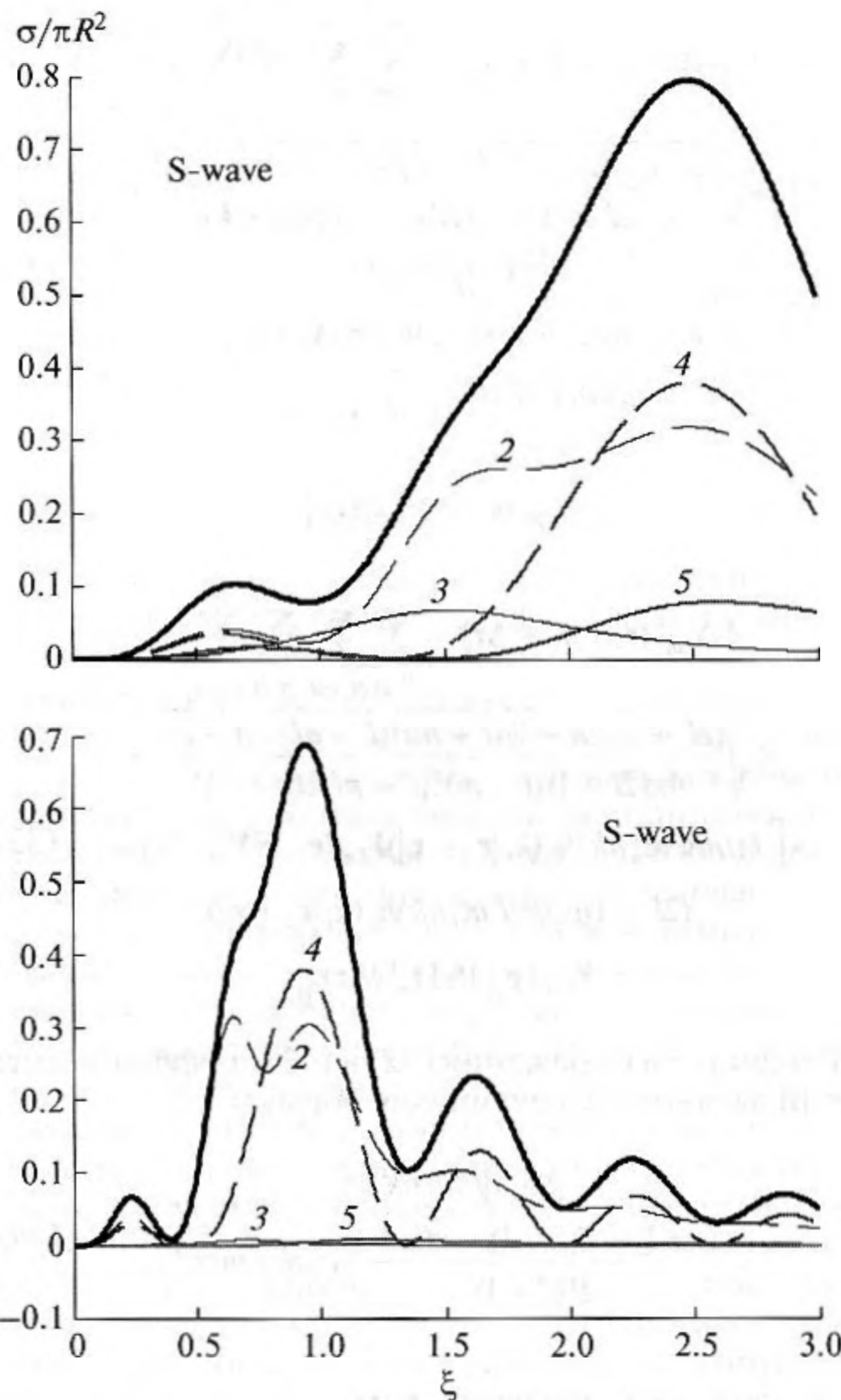


Рис. 2. (а, б) Зависимость нормированных парциальных сечений рассеяния поперечной волны ( $\sigma_l/\pi R^2$ ) от безразмерного волнового числа  $\xi = (\omega R/c_l)$ : 2 — дипольная составляющая ( $l = 1$ ) рассеяния в поперечную компоненту (штрихованная линия); 3 — дипольная составляющая ( $l = 1$ ) рассеяния в продольную компоненту (пунктирная линия); 4 — квадрупольная составляющая ( $l = 2$ ) рассеяния в поперечную составляющую квадрупольной моды (светлая штрихованная линия); 5 — квадрупольная составляющая ( $l = 2$ ) — рассеяние в продольную компоненту (светлая пунктирная линия). Рис. 2а — расчет для обычного льда:  $c_l = 3200$  м/с,  $c_t = 1600$  м/с, рис. 2б — для “жидкого” льда  $c_l = 3200$  м/с,  $c_t = 600$  м/с. Суммарное сечение рассеяния изображено жирной сплошной линией.

где  $c(lm|l'm'|nk) = i^{l'+n-l} (-1)^m [4\pi(2l+1)(2l'+1) \times (2n+1)]^{1/2} \begin{pmatrix} l & l' & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l' & n \\ -m & m' & k \end{pmatrix}$  — выражается через коэффициенты Клебша–Гордана (Clebsch–Gordan), а  $\mathbf{e}_{ji} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)/|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ ;

$$\begin{aligned} \mathbf{SH}_{lm}^{\text{out}}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}) = & \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \times \\ & \times \sqrt{\frac{(2l'+1)(2n+1)(l+m)!(l'-m)!(n-k)!}{4\pi(2l+1)(l-m)!(l'+m)!(n+k)!}} \times \\ & \times [f(lm|l'm|nk) \times \\ & \times h_l(k_l|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) Y_{l'm'}(\mathbf{e}_{ji}) \mathbf{SH}_{nk}^{\text{in}}(\Delta\mathbf{r}) - \\ & - \frac{g(lm|l'm|nk)}{(2l+1)} h_l(k_l|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \\ & \times Y_{l'm'}(\mathbf{e}_{ji}) \mathbf{SV}_{nk}^{\text{in}}(\Delta\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{SV}_{lm}^{\text{out}}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}) = & \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \times \\ & \times \sqrt{\frac{(2l'+1)(2n+1)(l+m)!(l'-m)!(n-k)!}{4\pi(2l+1)(l-m)!(l'+m)!(n+k)!}} \times \\ & \times [f(lm|l'm|nk) h_l(k_l|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) Y_{l'm'}(\mathbf{e}_{ji}) \mathbf{SV}_{nk}^{\text{in}}(\Delta\mathbf{r}) - \\ & - (2l'+1)g(lm|l'm|nk) h_l(k_l|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \\ & \times Y_{l'm'}(\mathbf{e}_{ji}) \mathbf{SH}_{nk}^{\text{in}}(\Delta\mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (33)$$

Входящие в выражения (32) и (33) коэффициенты описываются следующими формулами:

$$\begin{aligned} f(lm|l'm|nk) = & \\ = & \frac{l(l+1) + l'(l'+1) - n(n+1)}{2l'(l'+1)} c(lm|l'm|nk), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} g(lm|l'm|nk) = & \\ = & \frac{[(l+l'-n)(l+n-l')(l+n+l'+1)(-l+n+l'+1)]^{1/2}}{2l'(l'+1)} \times \\ & \times d(lm|l'm|nk), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} d(lm|l'm|nk) = & i^{l'+n-l} (-1)^{m+1} \times \\ & \times [4\pi(2l+1)(2l'+1)(2n+1)]^{1/2} \times \\ & \times \begin{pmatrix} l-1 & l' & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l' & n \\ -m & m' & k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поле в окрестности  $i$ -го включения полностью описывается заданием коэффициентов разложения по каноническим волнам

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{\text{in}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = & \sum_{l,m} [a_{lm}^{(in)}(\mathbf{r}_i) \mathbf{P}_{lm}^{\text{in}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \\ & + b_{lm}^{(in)}(\mathbf{r}_i) \mathbf{SV}_{lm}^{\text{in}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + c_{lm}^{(in)}(\mathbf{r}_i) \mathbf{SH}_{lm}^{\text{in}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)]. \end{aligned}$$

Если теперь воспользоваться формулой (30), то можно выразить ту же величину через поля перерассеянных волн

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{\text{in}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = & \sum_{l,m} \left\{ [a_{lm}^{(0)}(\mathbf{r}_i) \mathbf{P}_{lm}^{\text{in}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \right. \\ & \left. + b_{lm}^{(0)}(\mathbf{r}_i) \mathbf{SV}_{lm}^{\text{in}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + c_{lm}^{(0)}(\mathbf{r}_i) \mathbf{SH}_{lm}^{\text{in}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)] + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1, j \neq i}^N \left[ a_{lm}^{(in)}(\mathbf{r}_j) a_l^{PP}(R_j) + b_{lm}^{(in)}(\mathbf{r}_j) a_l^{SP}(R_j) \right] \mathbf{P}_{lm}^{\text{out}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) + \right. \\ & \left. + [b_{lm}^{(in)}(\mathbf{r}_j) b_l^{SS}(R_j) + a_{lm}^{(in)}(\mathbf{r}_j) a_l^{PS}(R_j)] \times \right. \\ & \left. \times \mathbf{SV}_{lm}^{\text{out}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) + c_{lm}^{(in)}(\mathbf{r}_j) c_l^S(R_j) \mathbf{SH}_{lm}^{\text{out}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Приравняем эти выражения и подставим в правую часть разложения (31)–(35), полученные на основе теоремы сложения. Приравняв коэффициенты при одинаковых канонических волновых функциях  $\mathbf{P}_{lm}^{\text{in}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ ,  $\mathbf{SV}_{lm}^{\text{in}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ ,  $\mathbf{SH}_{lm}^{\text{in}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ , получаем искомый результат – систему уравнений для коэффициентов  $a_{lm}^{(in)}(\mathbf{r}_i)$ ,  $b_{lm}^{(in)}(\mathbf{r}_i)$ ,  $c_{lm}^{(in)}(\mathbf{r}_i)$ :

$$\begin{aligned} a_{lm}^{(in)}(\mathbf{r}_i) = & a_{lm}^{(0)}(\mathbf{r}_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \times \\ & \times \sqrt{\frac{(2l'+1)(2n+1)(l'-m)!(n+k)!(l-m)!}{4\pi(2l+1)(l+m)!(l'+m)!(n-k)!}} \times \\ & \times c(nk|l'm|lm) h_l(k_l|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) Y_{l'm'}(\mathbf{e}_{ij}) \times \\ & \times [a_{nk}^{(in)}(\mathbf{r}_j) a_n^{PP}(R_j) + b_{nk}^{(in)}(\mathbf{r}_j) a_l^{SP}(R_j)], \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} b_{lm}^{(in)}(\mathbf{r}_i) = & b_{lm}^{(0)}(\mathbf{r}_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \times \\ & \times \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l-m)!(l'-m)!(n+k)!}{4\pi(2n+1)(l+m)!(l'+m)!(n-k)!}} \times \\ & \times \left\{ f(nk|l'm|lm) h_l(k_l|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) Y_{l'm'}(\mathbf{e}_{ij}) \times \right. \\ & \times [b_{nk}^{(in)}(\mathbf{r}_j) b_l^{SS}(R_j) + a_{nk}^{(in)}(\mathbf{r}_j) a_l^{PS}(R_j)] - \\ & - \frac{g(nk|l'm|lm)}{(2n+1)} h_l(k_l|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \\ & \left. \times Y_{l'm'}(\mathbf{e}_{ij}) c_{nk}^{(in)}(\mathbf{r}_j) c_n^S(R_j) \right\}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} c_{lm}^{(in)}(\mathbf{r}_i) = & c_{lm}^{(0)}(\mathbf{r}_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \times \\ & \times \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l-m)!(l'-m)!(n+k)!}{4\pi(2n+1)(l+m)!(l'+m)!(n-k)!}} \times \\ & \times \left\{ f(nk|l'm|lm) h_l(k_l|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \right. \\ & \times Y_{l'm'}(\mathbf{e}_{ij}) c_{nk}^{(in)}(\mathbf{r}_j) c_n^S(R_j) - \\ & - (2l'+1)g(nk|l'm|lm) h_l(k_l|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \\ & \left. \times Y_{l'm'}(\mathbf{e}_{ij}) [b_{nk}^{(in)}(\mathbf{r}_j) b_l^{SS}(R_j) + a_{nk}^{(in)}(\mathbf{r}_j) a_l^{PS}(R_j)] \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Аналог уравнений (37)–(38) первоначально был получен для описания рассеяния электромагнитных волн [39], а в настоящее время их анализ составляет содержание книг [40].

В рассматриваемом случае длина волны много больше размеров отдельных включений, поэтому в разложение поля по мультиполям можно ограничиться учетом только трех первых членов: монополюсного, дипольного и квадрупольного ( $l = 0, 1, 2$ ). Это приближение следует из поведения структурных коэффициентов (17). Мультиполи высших порядков содержат более высокие степени малых параметров  $\xi$  и  $\eta$ .

Более того, в данной работе мы приведем только частное решение системы уравнений (37)–(39), описывающее собственные частоты скопления включений в “жидком” льду ( $c_l/c_i \ll 1$ ), когда можно ограничиться учетом только одной монополюсной составляющей. В этом случае следует рассматривать только уравнение (37), которое принимает вид

$$a_{00}^{(in)}(\mathbf{r}_i) = a_{00}^{(0)}(\mathbf{r}_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N (-i) \frac{1}{4\pi |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} e^{ik_l |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} a_0^{PP}(R_j) a_{00}^{(in)}(\mathbf{r}_j). \quad (40)$$

Физический смысл коэффициентов  $a_{00}^{(in)}(\mathbf{r}_i)$  для продольных волн, которые распространяются в такой среде, — значение потенциала  $U^P = \nabla \phi$  в месте расположения  $i$ -го включения. Процедура усреднения по ансамблю случайных включений и переход к непрерывным функциям хорошо известны [35, 36], поэтому мы приводим окончательный результат — формулу Фолди для эффективного волнового числа распространяющейся (продольной) волны

$$k_{eff}^2 = k_l^2 + 4\pi \int f_0^{PP}(R_0, k_l) g(R_0) dR_0, \quad (41)$$

здесь  $g(R_0)$  — функция распределения пузырьков по размерам, а амплитуда рассеяния  $f_0^{PP}(R_0, k_l)$  описывается формулой (19). Скопление пузырьков может быть подобным по своим акустическим характеристикам одному включению с геометрическими размерами облака и эффективными параметрами среды. Так, для сферического облака включений радиуса  $R_*$  собственная частота низкочастотных колебаний имеет вид:

$$\Omega_* = \frac{\pi}{2R_*} \left[ \frac{1}{c_l} + 4\pi \int \frac{g(R_0) R_0 dR_0}{\Omega_0(R_0)} \right]^{-1}, \quad (42)$$

$$\Omega_0 = 2\sqrt{\mu/\rho} R_0^{-1} = 2c_l/R_0.$$

Нетрудно получить решение и для других простейших геометрий: цилиндра — когда размеры замороженной пелены в продольном направлении существенно превышают поперечные размеры и

пластины — когда в одном направлении размеры минимальны. При определении добротности этого резонанса учитывалось только радиационное затухание. Сопоставление с вкладом диссипативных процессов при многократном рассеянии требует дополнительного анализа, основанного на весьма громоздких вычислениях. Этот анализ, как и изложение общего решения системы уравнений (37)–(39) в длинноволновом приближении, составляют содержание отдельной публикации.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, специфической особенностью замороженных в лед скоплений газовых пузырей является наличие низкочастотных резонансов, связанных коллективными колебаниями включений. Эти акустические проявления отличают их от других неоднородностей ледяного покрова и позволяют разработать методы дистанционного обнаружения подводных газовых факелов в арктических морях. Конечно, данное исследование — только шаг на этом пути, но все необходимые элементы получены: выяснены особенности рассеяния звука на отдельных замороженных в лед включениях, выведены уравнения самосогласованного поля, описывающие процессы многократного рассеяния. Эти уравнения позволяют связать параметры распределения включений с эффективными упругими и плотностными характеристиками среды, что, в свою очередь, дает возможность исследовать в рамках простых геометрических моделей акустические проявления пузырьков в реальных условиях, т.е. упругого волновода, граничащего с воздухом и жидкостью.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-05-00388а).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Natural Gas Hydrate in Oceanic and Permafrost Environments / Coastal systems and continental margins Series, V. 5. Ed. M.D. Max, 2003. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 415 p.
2. Naudts L., Greinert J., Artemov Y., et al. Anomalous sea-floor backscatter patterns in methane venting areas, Dnepr paleo-delta, NW Black Sea // Marine Geology. 2008. V. 251. № 3–4. P. 253–267.
3. Greinert J., Nutzal B. Hydroacoustic experiments to establish a method for the determination of methane bubble fluxes at cold seeps // Geo-Marine Letts. 2004. V. 24. P. 75–85.
4. Leifer I., Tang D. The acoustic signature of marine seep bubble // J. Acoust. Soc. Am. 2007. V. 121. № 1. P. EL35–EL40.
5. Nikolovska A., Sahling H., Bohrmann G. Hydroacoustic methodology for detection, localization, and quantification of gas bubbles rising from the seafloor at gas

- seeps from the eastern Black Sea // *Geochem. Geophys. Geosystems*. 2008. V. 9. Article Number: Q10010.
6. Максимов А.О. Спектр шума "газового факела" // *Акуст. журн.* 2005. Т. 50. № 4. С. 435–442.
  7. Maksimov A.O., Sosedko E.V. Acoustic manifestations of gas hydrate shelled bubbles // *Acoustical Physics*. 2009. V. 55, № 6. P. 776–784.
  8. Гаврило В.П., Гайцхоки Б.О. К вопросу о статистике воздушных включений во льду // *Труды Арктического и Антарктического НИИ*. Т. 295. Физика льда Л.: Гидрометеиздат, 1970. С. 149–153.
  9. Perovich D.K., Gow A.J. A quantitative description of sea ice inclusions // *J. Geophys. Res.* 1996. V. 101. № C8. P. 18327–18343.
  10. Guigne J.Y., Crocker G.B., Hunt P. Nonlinear acoustic imaging of ice properties // *J. Glaciology* 1992. V. 38. № 128. P. 93–100.
  11. Zhang X., Inada T., Tezuka A. Ultrasonic-induced nucleation of ice in water containing air bubbles // *Ultrasonics Sonochemistry*. 2003. V. 10. № 2. P. 71–76.
  12. Студеничник Н.В., Глотов В.П. Скорость звука в мелководных водоемах с газонасыщенными границами раздела вода–грунт (лед) // *Акуст. журн.* 2004. Т. 50. № 1. С. 111–115.
  13. McCammon D.F., McDaniel S.T. The influence of the physical properties of ice on reflectivity // *J. Acoust. Soc. Am.* 1985. V. 77. P. 499–507.
  14. Sammelmann G.S. Biot-Stoll model of the high-frequency reflection coefficient of sea ice // *J. Acoust. Soc. Am.* 1993. V. 94. № 1. P. 371–385.
  15. Xie Y.B., Farmer D.M. Seismic-acoustic sensing of sea-ice wave mechanical properties // *J. Geophys. Res.* 1994. V. 99. № C4. P. 7771–7786.
  16. Александров И.А. Классификация морских льдов по характеру рельефа нижней поверхности и отражение звука от различных типов негладких льдов // *Акуст. журн.* 1994. Т. 40. № 5. С. 738–742.
  17. Александров И.А. Пространственная и акустическая модели ледовой поверхности // *Акуст. журн.* 1995. Т. 41. № 1. С. 13–18.
  18. Александров И.А., Саморуков С.Б. О характеристиках отражения звука от морских льдов // *Акуст. журн.* 1995. Т. 41. № 4. С. 547–553.
  19. Сивухин Д.В. Дифракция плоской звуковой волны на сферической полости // *Акуст. журн.* 1955. Т. 1. № 1. С. 78–88.
  20. Ying C.F., Truell R. Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid // *J. Appl. Phys.* 1956. V. 27. P. 1086–1097.
  21. Исакович М.А. Сферические волны в твердом теле // *Общая акустика*. М.: Наука, 1973. С. 477–495.
  22. Korneev V.A., Johnson L.R. Scattering of P and S waves by a spherically symmetric inclusion // *Pure and Applied Geophysics*. 1996. V. 147. № 4. P. 675–718.
  23. Vogt C., Laihem K., Wiebusch C. Speed of sound in bubble free ice // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 124. № 6. P. 3613–3618.
  24. Богородский В.В. и др. Измерения скорости ультразвуковых волн во льду Берингова моря // *Акуст. журн.* 1975. Т. 21. № 3. С. 464–466.
  25. Subramaniam D. et al. Determination of compressional wave and shear wave speed profiles in sea ice by cross-hole tomography — Theory and experiment // *J. Acoust. Soc. Am.* 1993. V. 92. № 2. P. 721–738.
  26. Богородский В.В., Гаврило В.П., Никитин М.А. Распространение звука во льду, кристаллизовавшегося из соленой воды // *Акуст. журн.* 1975. Т. 22. № 2. С. 282–283.
  27. Kapoor T.K., Schmidt H. Matched-field evaluation of acoustic scattering from Arctic ice // *J. Acoust. Soc. Am.* 1997. V. 102. № 2. P. 865–878.
  28. Dosso S.E., Brooke G.H. Measurements of seismo-acoustic ocean-bottom properties of the high Arctic // *J. Acoust. Soc. Am.* 1995. V. 98. № 3. P. 1657–1666.
  29. Williams K.L., Francois R.E. Sea ice elastic moduli: Determination of Biot parameters using in-filed velocity measurements // *J. Acoust. Soc. Am.* 1992. V. 91. № 5. P. 2627–2636.
  30. Алексеев В.Н., Рыбак С.А. Колебания газовых пузырьков в упругих средах // *Акуст. журн.* 1999. Т. 45. № 5. С. 603–609.
  31. Шахова Н.Е., Сергиенко В.И., Семилетов И.П. Вклад Восточно-Сибирского шельфа в современный цикл метана // *Вестник РАН*. 2009. Т. 79. № 6. С. 507–518.
  32. Клеркс Я., Земская Т.И., Матвеева Т.В. и др. Гидраты метана в поверхностном слое глубоководных осадков оз. Байкал // *ДАН*. 2003. Т. 393. № 6. С. 822–826.
  33. Клеркс Я., де Батист М., Гранин Н., Земская Т., Хлыстов О. Газогидраты пресноводного "океана" // *Наука в Сибири*. 2006. № 3. С. 82–91 ([http://www.sciencefirsthand.ru/c27\\_baykal\\_granin.shtml](http://www.sciencefirsthand.ru/c27_baykal_granin.shtml)).
  34. <http://www.bubbleology.com/seeps>.
  35. Foldy L.L. Multiple scattering of waves // *Phys. Rev.* 1945. V. 67. № 3/4. P. 107–119.
  36. Исимару И. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. Т. 2. С. 5–47.
  37. Danos M., Maximon L.C. Multipole matrix elements of the translation operator // *J. Math. Phys.* 1965. V. 6. № 5. P. 766–768.
  38. Felderhof B.U., Jones R.B. Additional theorems for spherical wave solutions of the vector Helmholtz equations // *J. Math. Phys.* 1987. V. 28. № 5. P. 836–839.
  39. Brunning J.H., Lo Y.T. Multiple scattering of EM waves by spheres. Part I and II // *IEEE Trans. Antennas Propag.* 1971. V. 19. № 3. P. 378–400.
  40. Martin P.A. Multiple Scattering: Interaction of Time-harmonic Waves with N Obstacles. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.