АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2011, том 57, № 3, с. 409–419

АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

УДК 534.221

ЛУЧЕВЫЕ И ДИФРАКЦИОННЫЕ СЛАБОРАСХОДЯЩИЕСЯ ПУЧКИ В ОКЕАНИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

© 20011 г. Ю. В. Петухов

Институт прикладной физики РАН

603950 Нижний Новгород, ул.Ульянова 46

E-mail: petukhov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 22.06.09 г.

Сформулированы условия, которым должен удовлетворять профиль скорости звука океанического волновода, чтобы в зависимости длины цикла лучей от их фазовой скорости присутствовали гладкие экстремумы, которым отвечают слаборасходящиеся пучки лучей, формирующие "каустические" пучки. Установлено, что дифракционные эффекты приводят к существенному сглаживанию острых экстремумов зависимости периода интерференции соседних мод от их фазовой скорости. В результате могут формироваться дополнительно к лучевым – дифракционные слаборасходящиеся пучки и отвечающие им "дифракционные" каустики.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, слаборасходящиеся пучки лучей в стратифицированных по глубине океанических волноводах формируются лишь при наличии достаточно гладких экстремумов [1–7] или точек перегиба [2, 4] у зависимости длины цикла лучей от лучевого параметра, обратно пропорционального их фазовой скорости. Вполне естественно, что аналогичными свойствами должна обладать зависимость длины цикла лучей и от их угла выхода из источника, если только положения ее экстремальных точек не совпадают с нулевым значением этого угла, отвечающему горизонтально выходящему лучу [1, 4]. Такие лучевые слаборасходящиеся пучки проявляются в пространственном (по глубине и горизонтальному расстоянию) распределении интенсивности акустического поля в виде формируемых ими каустических линий, определенные части которых образуют "каустические" пучки [1]. При этом в рамках модового описания полей в океанических волноводах соответствующие каустические структуры [1] могут проявляться лишь при относительно высоких частотах излучения, когда в диапазоне изменения фазовых скоростей бриллюэновских волн, характерном для лучевых слаборасходящихся пучков, возбуждается достаточно большое число модовых пучков [3].

При кусочно-линейной аппроксимации скорости звука у зависимости длины цикла лучей от их фазовой скорости гладкими экстремумами являются лишь относительные минимумы [1, 4–10]. При этом, как впервые было замечено в [9, 10], таким гладким минимумам предшествуют взаимосвязанные с ними острые максимумы, характеризующиеся разрывом производных, и соответствующие лучам, горизонты поворота которых совпадают со слабыми границами раздела, где градиент скорости звука терпит разрыв. Последнее означает, что острому максимуму длины цикла лучей соответствует сильнорасходящийся пучок лучей [9, 10].

Естественно, что при корректной аппроксимации скорости звука в классе непрерывно-дифференцируемых функций исчезнут лишь "ложные" экстремумы длины цикла лучей, а физически значимые острые максимумы длины цикла рефрагированных лучей трансформируются в соответствующие им гладкие максимумы без разрыва производных. При этом следующие за ними гладкие минимумы остаются практически неизменными. Очевидно также, что при такой аппроксимации останется без каких-либо принципиальных изменений острый максимум длины цикла, отвечающий лучу, горизонт поворота которого (верхний или нижний) совпадает с соответствующей резкой границей раздела (свободной поверхностью или дном).

В этой связи представляется важным, во-первых, выяснить условия, каким должна удовлетворять глубинная зависимость скорости звука, чтобы в зависимости длины цикла лучей от их фазовой скорости присутствовали физически значимые экстремумы. Следует отметить, что корректный учет дифракционных эффектов в рамках строгой модовой теории приводит к существенному сглаживанию, характерных для геометроакустического приближения, острых максимумов у зависимости периода интерференции соседних мод от их фазовой скорости [3]. Поэтому также важно, во-вторых, рассмотреть возможность формирования в типичных океанических

волноводах модовых дифракционных слаборасходящихся пучков, отвечающих уже гладким максимумам периода интерференции соседних мод, и соответствующих им "дифракционных" каустик.

Настоящая работа посвящена рассмотрению этих вопросов, касающихся формирования лучевых и дифракционных слаборасходящихся пучков в океанических волноводах.

ЭКСТРЕМУМЫ ДЛИНЫ ЦИКЛА ЛУЧЕЙ. ЛУЧЕВЫЕ СЛАБОРАСХОДЯЩИЕСЯ ПУЧКИ

В этом разделе остановимся на выяснении характерных особенностей в поведении зависимости скорости звука $c(z)$ от глубины z, которые могут приводить к появлению экстремумов у зависимости длины цикла лучей от лучевого параметра $\beta = \cos\chi_0$

$$D(\beta) = 2\beta\int_{z_B}^{z_H}\frac{dz}{\sqrt{n^2(z)-\beta^2}}, \qquad (1)$$

достигающих соответственно минимальных $z_B(\beta)$ и максимальных $z_H(\beta)$ глубин [5]. Здесь χ_0 – угол скольжения лучей на горизонте расположения оси звукового канала $z = z_0$, где достигается минимальное значение скорости звука $c_0 = c(z_0) = \min\{c(z)\}$; $n(z) = c_0/c(z)$ – показатель преломления акустических волн.

С целью упрощения дальнейших рассуждений введем, как и в [9, 10], следующие безразмерные величины

$$S = 1/\beta, \quad p = 1/n(z), \qquad (2)$$

а также учтем выполнение очевидного дифференциального соотношения

$$\frac{dD}{d\beta} = -S^2\frac{dD}{dS}. \qquad (3)$$

Поскольку для существования у зависимости $D(S)$ (1)–(3) острых максимумов при $S = S_g$ (в случае кусочно-линейной аппроксимации $c(z)$) и взаимосвязанных с ними гладких минимумов при $S = S_c > S_g$ необходимо выполнение условий [8–10]

$$\left(\frac{dD}{dS}\right)_{|S=S_g-0} > 0, \quad \left(\frac{dD}{dS}\right)\xrightarrow[S\to S_g+0]{} -\infty, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{dD}{dS}\right)_{|S=S_c} = 0, \quad \left(\frac{d^2D}{dS^2}\right)_{|S=S_c} > 0, \qquad (5)$$

то ниже достаточно лишь определить особенности в поведении зависимости $p(z)$, соответствующей соотношениям (4), (5).

Следует отметить, что условия (4) являются в определенном смысле предельными, поскольку для рефрагированных лучей реализуются, например, при предельно максимально-скачкообразных изменениях градиента скорости звука dc/dz, которые возникают на так называемых слабых границах раздела, расположенных на соответствующих глубинах $z = z_{j,f}$ $(j = 1,2,\ldots)$. Аналогичная ситуация имеет место и для взаимодействующих с поверхностью лучей при $z_{j,f} > z_*$, где z_* – характерная ширина подводного звукового канала, определяемая из равенства $p(0) = p(z_*)$. Тем не менее условия (4) позволяют достаточно точно оценивать возможности появления у зависимости $D(S)$ физически значимых экстремумов в характерных диапазонах $S_{j,f} \le S \le S_{j+1,f}$, граничные значения которых отвечают лучам с горизонтами поворота $z = z_{j,f}$ и $z = z_{j+1,f}$. В реальных же условиях, как отмечалось выше, зависимость $c(z)$ аппроксимируется в классе непрерывно-дифференцируемых функций. В результате исчезают обусловленные кусочно-линейной аппроксимацией $c(z)$ "ложные" экстремумы. При этом оставшиеся у зависимости $D(S)$ физически значимые экстремумы являются гладкими, за исключением лишь не устранимых в рамках лучевой теории острых максимумов, которые рассмотрены в следующем разделе.

Для решения поставленной задачи, предполагая непрерывность производных $\frac{dp}{dz}$ и $\frac{d^2p}{dz^2}$, перепишем выражение (1) в виде [9, 10]:

$$D(S) = 2\int_{p_B}^{p_H}\frac{p(dz/dp)\,dp}{\sqrt{S^2-p^2}}, \qquad (6)$$

в котором $p_B = p(z_B)$, $p_H = p(z_H)$. При нахождении необходимой для дальнейшего анализа производной dD/dS преобразуем (6) таким образом, чтобы подынтегральная функция в нем была непрерывна от S. С этой целью, как и в [9, 10], воспользуемся интегрированием по частям, в результате приходим к выражению

$$D(S) = 2\int_{z_B(S)}^{z_H(S)}\left(\frac{d^2z}{dp^2}\Big/\frac{dz}{dp}\right)\sqrt{S^2-p^2}\,dz + 2\left(\frac{dz}{dp}\sqrt{S^2-p^2}\right)\Bigg|_{z_H(S)}^{z_B(S)}, \qquad (7)$$

удовлетворяющему условиям дифференцирования по параметру S. Тогда, с учетом дифференциального соотношения

$$\frac{d^2z}{dp^2} = -\frac{d^2p}{dz^2}\Big/\left(\frac{dp}{dz}\right)^3$$

и (7) находим корректное выражение для производной

$$\frac{dD}{dS} = -2S\int\limits_{z_B(S)}^{z_H(S)} \frac{U(z)}{\sqrt{S^2-p^2}}dz + D_{1S} + D_{2S}, \qquad (8)$$

где

$$U(z) = \frac{d^2p}{dz^2}\Big/\left(\frac{dp}{dz}\right)^2, \qquad (9)$$

$$D_{1S} = 2\frac{d}{dS}\left\{\left(\frac{dz}{dp}\sqrt{S^2-p^2}\right)\Bigg|_{z_H(S)}^{z_B(S)}\right\}, \qquad (10)$$

$$D_{2S} = 2\left\{F(S,z_B)\frac{dz_B}{dS} - F(S,z_H)\frac{dz_H}{dS}\right\}, \qquad (11)$$

$$F(S,z) = \sqrt{S^2-p^2}U(z). \qquad (12)$$

Нетрудно убедиться в том, что для всех классов геометроакустических лучей выполняется тождество

$$D_{2s} \equiv 0. \qquad (13)$$

В самом деле, если $z_B(S)$ или $z_H(S)$ отвечают горизонтам поворота лучей, то, как следует из (12), тождество (13) является следствием равенства $F(S,z_B) = F(S,z_H) = 0$. Если же $z_B(S)$ или $z_H(S)$ соответствуют фиксированным границам раздела ($z_B = \text{const}$, $z_H = \text{const}$), то, как следует из (11), тождество (13) является следствием равенства $dz_B/dS = dz_H/dS = 0$.

Рассмотрим для рефрагированных лучей влияние зависимости $p(z)$ на поведение величины dD/dS (8), которым, согласно (10), отвечает аналогичное (13) тождество:

$$D_{1S}(S,z_B) = D_{1S}(S,z_H) \equiv 0.$$

Как следует из (8), возможность появления экстремумов у $D(S)$ (6), в том числе и острых максимумов в предельном случае (4), целиком определяется особенностями поведения функции $U(z)$ (9). В самом деле, если величина $U(z)$ резко возрастает до существенно больших значений на определенных глубинах $z = z_f$ в предельной ситуации $U(z) \to \infty$ при $z \to z_f$ [9], то можно ожидать выполнения условий (4) при $z_B \to z_f$ (или $z_H \to z_f$), поскольку такое поведение $U(z)$ будет определяться знаменателем подынтегрального выражения (8).

Проиллюстрируем сказанное приближенными аналитическими расчетами, предполагая, что величина $U(z)$ (9) существенно отличается от нуля лишь в малой ε окрестности верхнего горизонта поворота луча:

$$\begin{cases} |U(z)| \gg 1, & z_f = z_B \le z < z_B + \varepsilon, \\ |U(z)| \ll 1, & z > z_B + \varepsilon. \end{cases} \qquad (14)$$

В этом случае, раскладывая функцию $p(z)$ (2) в ряд вблизи $z = z_B$ с точностью до члена второго порядка малости

$$p(z) \approx p_0 + p_1(z-z_B) + \frac{1}{2}p_2(z-z_B)^2,$$
$$p_0 = p(z_B),\ p_1 = \left(\frac{dp}{dz}\right)_{|z=z_B} < 0,\ p_2 = \left(\frac{d^2p}{dz^2}\right)_{|z=z_B}, \qquad (15)$$

из (9) с учетом (15) находим для производной при $S = S_g = p_0$ оценку

$$\left(\frac{dD}{dS}\right)_{|S=p_0} \approx -\frac{2p_2}{|p_1|^2}\sqrt{2p_0\varepsilon/|p_1|}. \qquad (16)$$

Отвечающее малому диапазону глубин $z_B \le z \le z_B + \varepsilon$ приращение длины цикла лучей ΔD будет оцениваться как

$$\Delta D \approx -\frac{4}{3}p_2\sqrt{2p_0(\varepsilon/|p_1|)^3}. \qquad (17)$$

Предположим теперь, что с уменьшением диапазона глубин ($\varepsilon \to 0$) коэффициенты p_1 и p_2 в разложении (15), характеризующие скорость возрастания скорости звука при удалении от оси канала $z \to z_B + 0$ ($z < z_0$), также уменьшаются по законам

$$|p_1| = \varepsilon p_{01},\ p_2 = \varepsilon^{2-q}p_{02}, \qquad (18)$$

обеспечивающих выполнение условий (14)

$$|U(z_f)| = \frac{|p_{02}|}{(p_{01})^2\varepsilon^q} \gg 1 \qquad (19)$$

при $q > 0$. В этом случае из (16), (17), используя (18), (19), находим асимптотическое поведение величин:

$$\left(\frac{dD}{dS}\right)_{|S=p_0} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \begin{cases} -\infty, & p_{02} > 0, \\ +\infty, & p_{02} < 0, \end{cases} \qquad (20)$$

$$\Delta D \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \begin{cases} -0, & p_{02} > 0, \\ +0, & p_{02} < 0, \end{cases} \qquad (21)$$

$$U(z_f) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \begin{cases} +\infty, & p_{02} > 0, \\ -\infty, & p_{02} < 0. \end{cases} \qquad (22)$$

Как следует из (20)–(22), разрыв производной dD/dS будет иметь место не только при наличии слабой границы раздела, на которой терпит раз-

рыв производная dp/dz [9, 10], но и при наличии горизонта, где зависимость $p(z)$ имеет либо максимум $z = z_m$, либо точку перегиба $z = z_p$. Однако, что ранее не отмечалось в [9, 10], острые максимумы у $D(S)$, а следовательно, и взаимосвязанные с ними гладкие минимумы будут присутствовать при наличии либо слабых границ раздела z_f, либо горизонтов z_p, отвечающих точкам перегиба у $p(z)$, если только при их пересечении градиент скорости звука возрастает с удалением от оси канала [5, 6]:

$$\left(\left|\frac{dp}{dz}\right|\right)_{|z=z_1} < \left(\left|\frac{dp}{dz}\right|\right)_{|z=z_2},$$

$$z_1 = \begin{cases} z_f + 0, & z_f < z_0 \\ z_p + 0, & z_p < z_0 \\ z_f - 0, & z_f > z_0 \\ z_p - 0, & z_p > z_0 \end{cases}, \quad z_2 = \begin{cases} z_f - 0, & z_f < z_0 \\ z_p - 0, & z_p < z_0 \\ z_f + 0, & z_f > z_0 \\ z_p + 0, & z_p > z_0 \end{cases}.$$

Положим, что достаточно резкое возрастание величины $|U(z)|$ (9), т.е. фактически градиента скорости звука, происходит в переходном слое конечной толщины (14) ($\varepsilon \neq 0$). Тогда, как следует из (16), (17), в том диапазоне изменения лучевого параметра, где уменьшение длины цикла лучей из-за возрастания градиента скорости звука начнет преобладать над увеличением длины цикла лучей, вызванном увеличением их угла выхода из источника, при значении $S = \bar{S}_g$ появится гладкий максимум вместо острого при $S = S_g$ (4). В самом деле, как видно из (16), при $p_2 > 0$ имеет место характерная для максимума смена знака производной: $dD/dS|_{S<S_g} > 0$, $dD/dS|_{S\geq S_g} < 0$. При этом приращение длины цикла лучей, согласно (17), также становится отрицательным, $\Delta D < 0$.

Вполне естественно, что при достаточно широком диапазоне допустимых значений лучевого параметра для рефрагированных лучей $\bar{S}_g < S < p(0)$ за этим максимумом появится также и гладкий минимум при $S = S_c$. Причем даже в том случае, если за нижним переходным слоем с резким увеличением градиента скорости звука будет располагаться верхний переходный слой толщиной h_t с уменьшающимся в нем градиентом скорости звука. Действительно, в такой ситуации $p_2 < 0$ (15) и при определенных значениях лучевого параметра $S \approx S_t$, отвечающих лучам, горизонты поворота которых совпадают с расположением верхнего переходного слоя, производная (16) снова сменит свой знак на положительный, $dD/dS|_{S\approx S_t} > 0$, с соответствующим ей положительным приращением длины цикла лучей, $\Delta D > 0$ (17). Последнее и означает наличие при значении $S = S_c < S_t$ гладкого минимума. Таким образом, для рефрагированных лучей возможно парное существование взаимосвязанных между собой слаборасходящихся пучков с соответствующими при $S = \bar{S}_g$ и $S = S_c$ опорными лучами.

Если скорость возрастания градиента скорости звука во всем переходном слое уменьшается, то эти экстремумы будут сближаться $\bar{S}_g \leftrightarrow S_c$ и становиться все более гладкими:

$$D(\bar{S}_g) - D(S_c) \to 0, \quad \left(\frac{d^2D}{dS^2}\right)_{|S=\bar{S}_g} \to 0, \quad \left(\frac{d^2D}{dS^2}\right)_{|S=S_c} \to 0.$$

В результате, при определенном значении $S = S_p = \bar{S}_g = S_c$ у зависимости $D(S)$ образуется одна лишь точка перегиба

$$\left(\frac{dD}{dS}\right)_{|S=S_p} = \left(\frac{d^2D}{dS^2}\right)_{|S=S_p} = 0, \quad \left(\frac{d^3D}{dS^3}\right)_{|S=S_p} \neq 0,$$

которой также соответствует слаборасходящийся пучок лучей [4]. Дальнейшее же уменьшение скорости возрастания градиента скорости звука во всем переходном слое приведет к исчезновению также и точки перегиба у зависимости $D(S)$ и, тем самым, к исчезновению слаборасходящихся пучков лучей.

Рассмотрим теперь взаимодействующие со свободной поверхностью океанического волновода лучи с нижними горизонтами поворота, расположенными в диапазоне глубин $z_* < z < H$. Можно убедиться, что даже при достаточно плавном изменении величины $U(z)$ (9) в представляющем интерес диапазоне глубин, у зависимости $D(S)$ (6) имеет место разрыв производной (8) при $S \to p_0$. Действительно, из (10) при $z_B(S) = 0$ находим

$$D_{1S} = \frac{2S}{\sqrt{S^2 - p_0^2}} \Big/ \left(\frac{dp}{dz}\right)_{|z=0}, \tag{23}$$

из которого, с учетом характерного для подводного звукового канала отрицательного значения градиента скорости звука вблизи поверхности $(dp/dz)_{|z=0} < 0$, следует отвечающее (4) асимптотическое поведение производной:

$$\begin{cases} D_{1S} \xrightarrow[S \to p_0]{} -\infty, \\ \dfrac{dD}{dS} \xrightarrow[S \to p_0 + 0]{} -\infty. \end{cases} \tag{24}$$

Поэтому у зависимости $D(S)$ (6) при $S = p_0$ будет иметь место острый максимум. Появление же следующего за ним гладкого минимума при $S = S_c > p_0$ обусловлено взаимно противополож-

ным поведением различных частей длины цикла $D(S) = D_S(S) + D_H(S)$, отвечающих распространению лучей от источника до свободной поверхности $D_S(S)$ и от источника до нижнего горизонта поворота $D_H(S)$. Дело в том, что с ростом S в диапазоне $p_0 < S < S_c$ уменьшение $D_S(S)$ преобладает над увеличением $D_H(S)$:

$$\frac{dD_S}{dS} < 0, \ \frac{dD_H}{dS} > 0, \qquad \left|\frac{dD_S}{dS}\right| > \left|\frac{dD_H}{dS}\right|, \ (p_0 < S < S_c). \tag{25}$$

В диапазоне же $S_c < S < p(H)$ имеет место противоположная (25) ситуация, при которой увеличение $D_H(S)$ преобладает над уменьшением $D_S(S)$:

$$\left|\frac{dD_S}{dS}\right| < \left|\frac{dD_H}{dS}\right|, \ (S_c < S < p(H)).$$

В результате уравновешивания скорости изменения величин $D_S(S)$ и $D_H(S)$ при $S = S_c$ у зависимости $D(S)$ и появляется характерный гладкий минимум [1, 3, 5].

Важно отметить, что существование у $D(S)$ острого максимума при $S = S_g = p(0)$, отвечающего граничному лучу, разделяющему пространственные области акустической освещенности и тени [12, 13], как следует из (23) и (24), не зависит от типа аппроксимации $c(z)$. Другими словами, характерный разрыв производной (4), а следовательно, и акустического поля при $S = p_0$ не устраним в рамках стандартного геометроакустического приближения [12, 13]. Поэтому здесь, согласно (23), (24), наряду со слаборасходящимся пучком при $S = S_c$, сформированного взаимодействующими с поверхностью лучами, будет всегда присутствовать сильнорасходящийся пучок, сформированный рефрагированными и взаимодействующими с поверхностью лучами. Если же градиент скорости звука вблизи поверхности положителен $(dp/dz)|_{z\to 0} > 0$, то для взаимодействующих с поверхностью лучей существование у зависимости $D(S)$ экстремумов, а следовательно, и соответствующих им пучков в общей структуре поля, возможно лишь, как и для рефрагированных лучей, при достаточно резком, в предельном случае (4) скачкообразном возрастании градиента скорости звука при удалении от оси канала в переходных слоях, расположенных на глубинах $z > z_*$. Последнее наглядно проиллюстрировано в [1, 7] результатами аналитических расчетов и численного моделирования для приповерхностных каналов $(z_0 = 0)$ с различными зависимостями $c(z)$.

ОСТРЫЕ МАКСИМУМЫ ДЛИНЫ ЦИКЛА ЛУЧЕЙ. ДИФРАКЦИОННЫЕ СЛАБОРАСХОДЯЩИЕСЯ ПУЧКИ

Острые максимумы в зависимости длины цикла лучей от их фазовой скорости наряду с взаимосвязанными с ними гладкими минимумами представляют определенный интерес. Последний обусловлен возможностями существенного сглаживания аналогичных им максимумов у соответствующей зависимости пространственного периода интерференции соседних мод [3], и, тем самым, формирования дифракционных слаборасходящихся пучков и отвечающих им "дифракционных" каустик. Для описания обсуждаемых закономерностей удобнее использовать строгое модовое представление для поля в стратифицированных волноводах, что вызвано следующими причинами. Во-первых, приближение ВКБ [5] и его обобщения, основанные на методе эталонного уравнения [14], разработаны и применимы для неоднородных сред, параметры которых являются бесконечно дифференцируемыми функциями координат. Поэтому в стратифицированных океанических волноводах со слабыми границами раздела для корректного использования отмеченных приближенных методов [5, 14] необходимо на соответствующих границах, также как и на резких границах раздела сред [5], задавать стандартные граничные условия непрерывности ортонормированных собственных функций волновода и их первых производных по глубине. Во-вторых, если горизонты поворота бриллюэновских волн совпадают с расположением резких или слабых границ раздела сред, либо находятся в достаточной близости от них, то для корректного приближенного описания ортонормированных собственных функций волновода можно использовать лишь метод эталонного уравнения [14]. Однако при таком подходе получается достаточно сложное выражение даже для поля отдельной моды, включающее специальные функции [15]. В результате стандартным переходом от суммирования к интегрированию по номерам мод l не удается определить приближенную аналитическую зависимость для полного поля вдоль лучевых траекторий, близких к траектории граничного луча с $S = S_g$. Кроме того, из отвечающего этому приближению дисперсионного уравнения для горизонтальных волновых чисел мод k_l, записываемого через функции параболического цилиндра и их производные см. [15], не удается получить в представляющем интерес диапазоне изменения фазовых скоростей мод c_l соответствующую $D(S)$ аналитическую зависимость

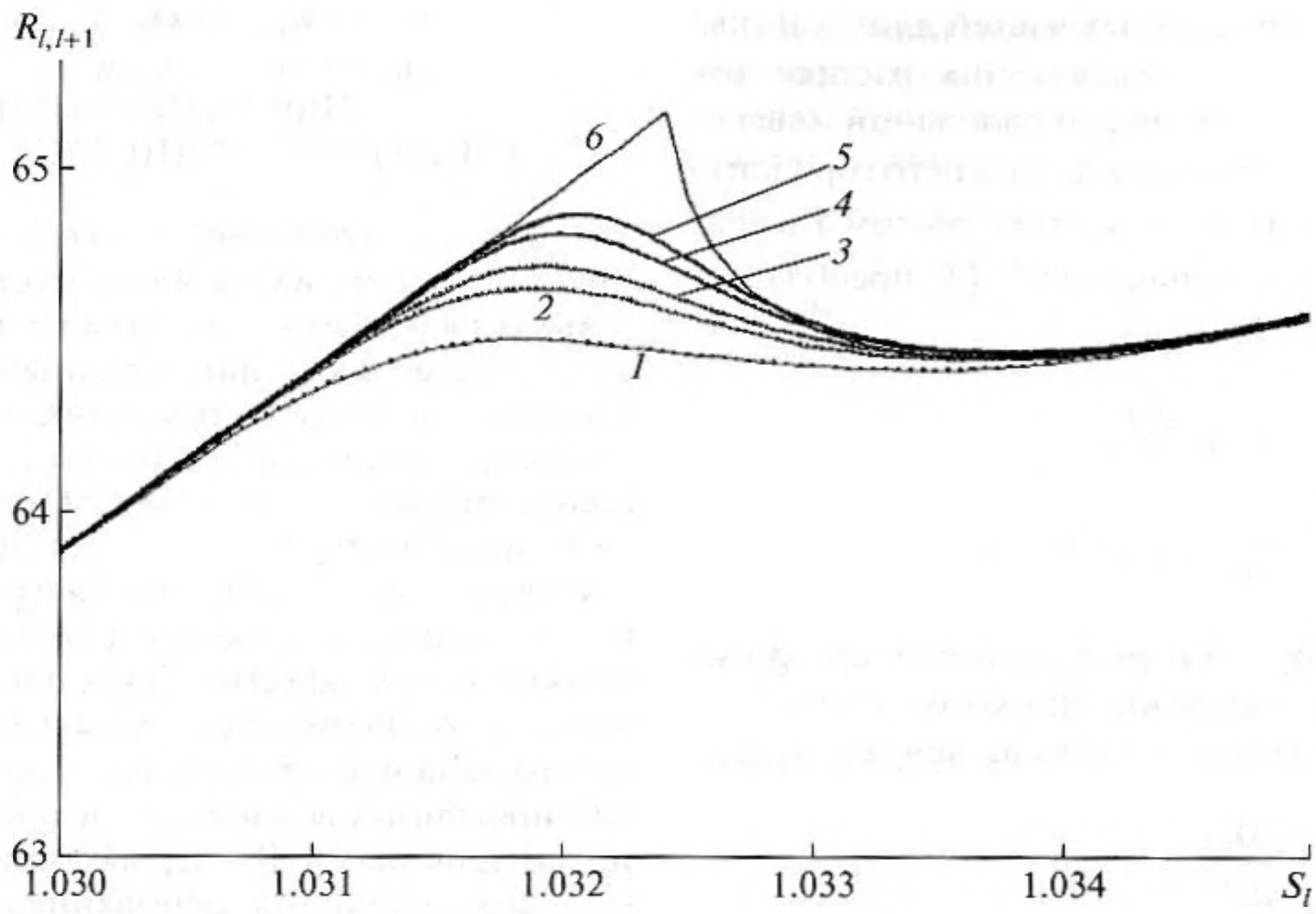

Рис. 1. Зависимость пространственного периода интерференции $R_{l,l+1}(S_l)$ (26) соседних мод от их безразмерной фазовой скорости $S_l = k_0/k_l$ при различных частотах излучения: $f = 0.5$ кГц (кривая *1*), $f = 0.8$ кГц (кривая *2*), $f = 1$ кГц (кривая *3*), $f = 1.5$ кГц (кривая *4*), $f = 2$ кГц (кривая *5*); кривая *6* отвечает зависимости длины цикла лучей $D(S)$ при значениях лучевого параметра $S = S_l$.

пространственного периода интерференции соседних мод

$$R_{l,l+1} = 2\pi/(k_l - k_{l+1}), \tag{26}$$

у которой бы отсутствовал разрыв производной $dR_{l,l+1}/dS_l$ при $S_l = c_l/c_0 = S_g$. Здесь $k_l = \omega/c_l$, $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота излучения.

После сделанных выше замечаний остановимся на рассмотрении дифракционных эффектов, которые заметно могут проявляться в достаточно узком диапазоне изменения лучевого параметра, включающем значение $S = S_g = p_0$, отвечающее лучу, касающемуся свободной поверхности океанического волновода. Такая постановка задачи представляет наибольший интерес, поскольку соответствующая ей типичная ситуация чаще всего возникает в реальных условиях распространения акустических волн, которую и рассмотрим здесь на примере океанического волновода с каноническим подводным звуковым каналом [5]:

$$c(z) = c_0\left[1 + \varepsilon_0\left(e^{\eta} - \eta - 1\right)\right], \quad 0 \le z \le H,$$
$$\eta = 2(z_0 - z)/B, \quad B = z_0 = 1.3 \text{ км}, \quad H = 7 \text{ км}, \tag{27}$$
$$c_0 = 1.492 \text{ км/с}, \quad \varepsilon_0 = 1.14 \times 10^{-2}(B/2).$$

Обратимся сначала к сравнительному анализу поведения зависимостей $D(S)$ (6) и $R_{l,l+1}(S_l)$ (26) в таком океаническом волноводе. Из представленных на рис. 1 результатов численных расчетов, полученных с использованием строгой модовой теории для $R_{l,l+1}(S_l)$ и лучевого приближения для $D(S)$, видны следующие закономерности в поведении соответствующих зависимостей. Во-первых, при относительно высоких частотах излучения зависимость $R_{l,l+1}(S_l)$ заметно отличается от $D(S)$ лишь в достаточно узком диапазоне изменения S_l, включающем значение $S = p_0$, характерное для луча, касающегося свободной поверхности океанического волновода. Во-вторых, на этих же относительно высоких частотах излучения гладкий минимум у $R_{l,l+1}(S_l)$ практически совпадает с аналогичным ему минимумом у $D(S)$ при $S = S_c$. Однако, что, несомненно, является принципиально важным, у зависимости $R_{l,l+1}(S_l)$ при $S_l = S_r < p_0$ имеет место соответствующий $D(p_0)$ достаточно гладкий максимум, в отличие от острого максимума у $D(S)$ при $S = p_0$. В-третьих, с ростом частоты излучения зависимость $R_{l,l+1}(S_l)$ в целом стремится к $D(S)$. При этом максимум у $R_{l,l+1}(S_l)$ для $S_l = S_r$ хотя и становится все более резким при своем сближении с острым максимумом у $D(S)$ $(S_r \to p_0 - 0)$, тем не менее, всегда остается достаточно гладким $\left(dR_{l,l+1}/dS_l\right)_{|S_l = S_r} = 0$. Последнее обусловлено тем, что даже при $\omega \to \infty$, но конечном значении длины волны излучения,

свободная поверхность океанического волновода всегда будет существенно влиять на поведение зависимостей фазовых скоростей $c_l(l)$ и амплитуд $A_l(l)$ мод, горизонты поворота которых расположены достаточно близко к свободной поверхности, т.е. при $S_l \to p_0$; поскольку соответствующее каждой такой моде поле давления за горизонтом поворота будет еще достаточным по величине для заметного взаимодействия с этой границей раздела.

Результаты численных расчетов (рис. 1) и аналитических исследований [1, 2] позволяют утверждать о наличии при $S_l = S_r$ и $S_l = S_c$ достаточно резких максимумов у зависимости

$$R_g(S_l) = 1\Big/\left|\frac{1}{R_{l,l+1}} - \frac{1}{R_{l+1,l+2}}\right|, \qquad (28)$$

характеризующей пространственный период переформирования интерференционной структуры поля соседних пар мод. Последнее подтверждается приведенной на рис. 2 зависимостью $R_g(S_l)$ в рассматриваемом океаническом волноводе (27).

Отмеченные закономерности в поведении зависимостей $R_{l,l+1}(S_l)$ (рис. 1) и $R_g(S_l)$ (рис. 2) представляются весьма важными. Они характеризуют изменения с расстоянием пространственной интерференционной структуры акустического поля модовых пучков, параметр дифракционной расходимости P_d которых обратно пропорционален пространственному масштабу $R_g(S_{\max})$ дифракционной фокусировки, отвечающему расположенному при $S_l = S_{\max}$ максимуму зависимости амплитуд мод $A_l(S_l)$ для определенной, достаточно узкой группы мод, формирующих соответствующий пучок [2]. Именно поэтому максимумам зависимости $R_g(S_l)$ при $S_l = S_r$ и $S_l = S_c$ (рис. 2), которым отвечают минимумы дифракционного параметра, будут соответствовать слаборасходящиеся пучки. Это означает, что наряду с лучевым слаборасходящимся пучком при $S_l = S_c$ и характерной для него системы каустических линий, будет формироваться при $S_l = S_r$ дифракционный слаборасходящийся пучок с характерной для него системой "дифракционных" каустик.

С целью наглядной иллюстрации обсуждаемых закономерностей на рис. 3 представлены результаты численных расчетов пространственных (по глубине z и горизонтальному расстоянию r) распределений нормированной на цилиндрическое расхождение волнового фронта интенсивности $J_0(r,z) = rJ(r,z)$ акустического поля, полученных с использованием модифицированного геометроакустического приближения [16] и строгой модовой теории при различных частотах излучения и глубине источника $z_S = 0.2$ км. Из анализа приведенных на рис. 3 зависимостей можно сделать следующие выводы. Во-первых, лучевая и модовая теории одинаково точно описывают формирование рефрагированного "каустического" пучка около горизонтально выходящего из источника луча, а также — взаимодействующего со свободной поверхностью океанического волновода "каустического" пучка, формируемого лучами (модами) соответствующего ему слаборасходящегося пучка при $S = S_l = S_c$ [1]. Во-вторых, следующей из модовой теории зависимости $J_0(r,z)$ на плоскости $r - z$ просматриваются дополнительные, по сравнению с $J_0(r,z)$ в лучевом приближении, линии с повышенной интенсивностью акустического поля, начинающиеся вблизи свободной поверхности и заканчивающиеся на самом нижнем горизонте каждой каустики для рефрагированных лучей своеобразной точкой возврата. Такие линии, заметнее всего проявляющиеся за каждой второй лучевой каустикой для отраженных от свободной поверхности лучей, можно классифицировать как "дифракционные" каустики, поскольку их возникновение обусловлено существованием при $S_l = S_r$ слаборасходящегося модового пучка, формируемого модами, умеренно и сильно взаимодействующими со свободной поверхностью. Здесь следует отметить, что впервые "дифракционные" каустики прояви-

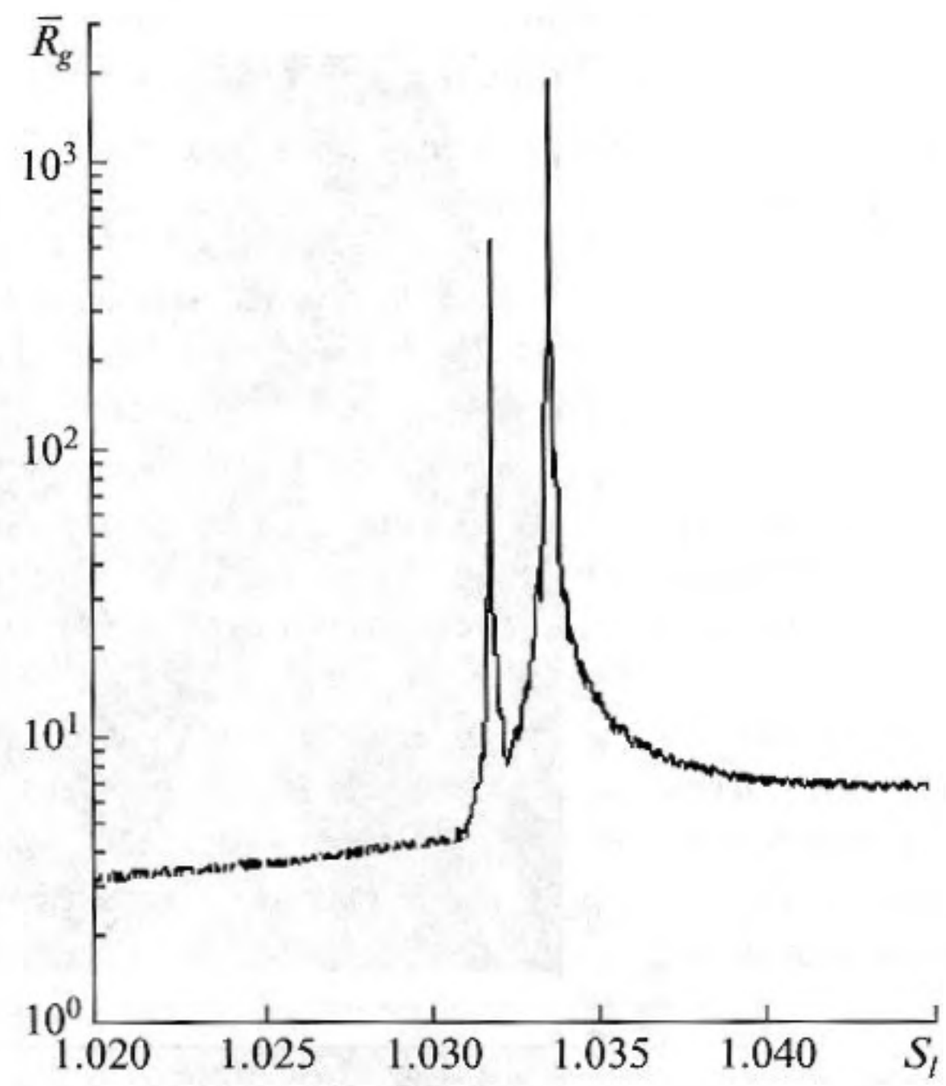

Рис. 2. Зависимость нормированной величины $\bar{R}_g = R_g(S_l)/R_g(S_1)$ пространственного масштаба дифракционной фокусировки поля $R_g(S_l)$ (28) для соседних пар мод от их безразмерной фазовой скорости $S_l = k_0/k_l$ при $f = 1$ кГц.

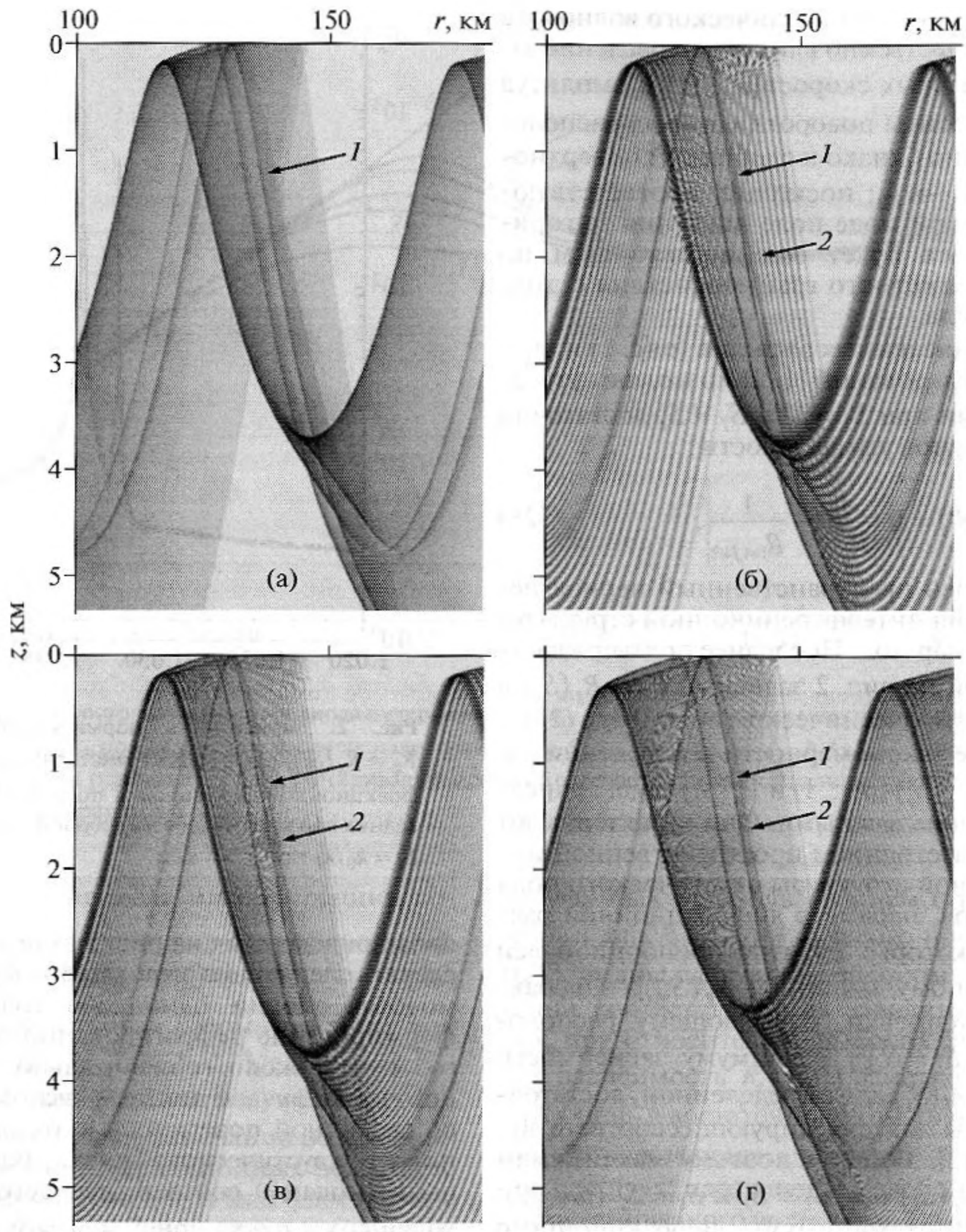

Рис. 3. Представленные в плотностной записи с динамическим диапазоном 30 дБ пространственные (по глубине z и горизонтальному расстоянию r) распределения нормированной на цилиндрическое расхождение волнового фронта интенсивности акустического поля $J_0(r, z)$, рассчитанные при $z_s = 0.2$ км с использованием модифицированного геометроакустического приближения [16] (а) и строгой модовой теории [5] при различных частотах излучения $f = 0.5$ кГц (б); $f = 0.8$ кГц (в) $f = 1$ кГц (г). Цифрами 1 и 2 указаны взаимосвязанные между собой участки лучевой и "дифракционной" каустик соответственно.

лись в пространственном распределении интенсивности акустического поля при численном моделировании соответствующих процессов в [3], где также использовалась строгая модовая теория при аналогичных (27) условиях распространения и параметрах излучения (см. рис. 3д) в [3]). Однако в [3] не проводилось подробного обсуждения физического механизма формирования таких "дифракционных" каустик, которое стало возможным здесь лишь после выполнения дополнительных исследований [1, 2].

Важно обратить внимание и на тот факт, что с увеличением частоты излучения проявление "дифракционных" каустик сначала заметно усиливается, а затем ослабляется (см. рис. 3). Последнее означает, что должна существовать оптимальная частота излучения, при которой "дифракционные" каустики заметнее всего будут проявляться в зависимости $J_0(r, z)$. В самом деле, с увеличением частоты ω в каждой паре каустик для взаимодействующих со свободной поверхностью лучей

наблюдается проявление характерных для "дифракционных" каустик линий повышенной интенсивности акустического поля даже у передней части дальней и задней части ближней каустик. Это объясняется тем, что с ростом ω заметно расширяется диапазон значений

$$\Delta R_{l,l+1} = R_{l,l+1}(S_r) - R_{l,l+1}(p_0)$$

пространственных периодов интерференции соседних мод, эффективнее других участвующих в формировании "дифракционных" каустик. Однако при дальнейшем увеличении частоты излучения ($\omega \to \infty$) над процессом расширения диапазона $\Delta R_{l,l+1}$ начинает преобладать процесс сужения соответствующего ему диапазона значений фазовых скоростей мод

$$\Delta S_l = p_0 - S_r,$$

что приводит к ослаблению "дифракционных" каустик, которые трансформируются в слабо интенсивные ореолы около соответствующих частей лучевых каустик. В распределении $J_0(r,z)$, полученном с использованием модифицированного геометроакустического приближения, также присутствуют аналогичные слабо интенсивные ореолы около соответствующих частей лучевых каустик (см. рис. 3). Такой, на первый взгляд, парадоксальный результат обусловлен формально адекватным, хотя и не зависящим от частоты излучения учетом дифракционных эффектов в рамках этого приближения, в котором изначально определяются усредненные по r и z с масштабами Δr и Δz зависимости $J(r,z)$ [16]. В самом деле, наличие масштабов усреднения Δr и Δz в исходных положениях модифицированного геометроакустического приближения [16] равносильно замене производной $\partial r/\partial\chi_0$ в знаменателе выражения для $J(r,z)$, отвечающего стандартному лучевому приближению [5], на отношение соответствующих этим переменным конечных приращений $\Delta r/\Delta\chi_0$. Естественно, что при таком подходе усредненная зависимость $J_0(r,z)$ будет принимать конечные значения не только на лучевых каустиках, где $\partial r/\partial\chi_0 = 0$, но и на особой лучевой траектории с $S = p_0$, где $1/(\partial r/\partial\chi_0) = 0$. Это означает, что при определенных масштабах усреднения Δr и Δz, превышающих длину волны излучения, модовая теория при $\omega \to \infty$ и модифицированное геометроакустическое приближение позволяют получать не только качественно, но и количественно совпадающие зависимости $J_0(r,z)$. Таким образом, модифицированное геометроакустическое приближение формально может описывать проявление тех дифракционных эффектов, которые при соответствующих высоких частотах излучения еще проявляются у получаемой с использованием модовой теории зависимости $J_0(r,z)$.

Остается лишь отметить, что аналогичные закономерности будут проявляться при формировании дифракционных слаборасходящихся пучков и соответствующих им "дифракционных" каустик при наличии точек перегиба у зависимости $c(z)$. Поскольку, согласно (18)–(22), в этом случае у зависимости $D(S)$ также присутствует острый максимум, отвечающий лучу с горизонтом поворота на соответствующей точке перегиба глубине и неустранимый в рамках стандартного геометроакустического приближения. При наличии же переходного слоя толщиной h_f с соответствующим (14) изменением градиента скорости звука влияние дифракционных эффектов будет приводить к заметному сглаживанию у $R_{l,l+1}$ лишь наиболее резкого экстремума из двух взаимосвязанных между собой экстремумов у $D(S)$.

Сказанное относительно различий в поведении зависимостей $D(S)$ (6) и $R_{l,l+1}(S_l)$ (26) вблизи одновременно присущих им гладких экстремумов подтверждается следующим из (26) в приближении ВКБ выражением [17]:

$$R_{l,l+1} \approx D_l \Big/ \left(1 + \frac{D_l}{2!\,R_d^{(2)}} - \frac{D_l}{3!\,R_d^{(3)}}\right). \tag{29}$$

Здесь $D_l(\beta_l)$ – зависимость длины цикла бриллюэновских волн, определяемая аналогичным (1) выражением с $\beta \to \beta_l = 1/S_l$;

$$R_d^{(2)} = \frac{k_0}{2\pi} D_l^3 \Big/ \left(\frac{dD_l}{d\beta_l}\right),$$

$$R_d^{(3)} = \left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2 D_l^4 \Big/ \left[\frac{d^2 D_l}{d\beta_l^2} - \frac{3}{D_l}\left(\frac{dD_l}{d\beta_l}\right)^2\right]$$

– характерные пространственные масштабы проявления аберрационных эффектов второго $R_d^{(2)}$ и третьего $R_d^{(3)}$ порядков; $k_0 = \omega/c_0$, а параметр β_l является решением соответствующего ВКБ приближению дисперсионного уравнения

$$k_0 \int_{z_B}^{z_H} \sqrt{n^2(z) - \beta_l^2}\,dz = \pi(l - \nu),$$

в котором параметр ν принимает значения $\nu = 1/2$ или $\nu = 1/4$ в зависимости от того, являются ли глубины z_B и z_H горизонтами поворота бриллюэновских волн или абсолютно отражающими границами раздела [5]. Из (34) находим, что при значениях $\beta_l = \beta_c$, отвечающих гладким экстремумам,

отличия экстремальных значений пространственного периода интерференции

$$R_{l,l+1}(\beta_c) \approx D_l(\beta_c) \Big/ \left(1 - \frac{D_l(\beta_c)}{3!\,R_{cd}^{(3)}}\right)$$

от $D_l(\beta_c)$ заметно возрастают с понижением частоты излучения и увеличением остроты максимума

$$\left(\frac{d^2 D_l}{d\beta_l^2}\right)\Bigg|_{\beta_l=\beta_c} < 0, \quad D_l(\beta_c)/R_{l,l+1}(\beta_c) > 1$$

или минимума

$$\left(\frac{d^2 D_l}{d\beta_l^2}\right)\Bigg|_{\beta_l=\beta_c} > 0, \quad D_l(\beta_c)/R_{l,l+1}(\beta_c) < 1.$$

При этом, как следует из получаемой с использованием (28), (29) зависимости

$$R_g \approx \left|R_d^{(2)}\right| \left|\frac{1 - D_l/R_d^{(2)}}{1 - R_d^{(2)}/R_d^{(3)}}\right|,$$

возрастает также дифракционная расходимость слаборасходящихся пучков, поскольку увеличивается их дифракционный параметр, обратно пропорциональный величине

$$R_g(\beta_c) = \left|R_{cd}^{(3)}\right|,$$

$$R_{cd}^{(3)} = \left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2 D_l^4(\beta_c) \Big/ \left(\frac{d^2 D_l}{d\beta_l^2}\right)\Bigg|_{\beta_l=\beta_c}.$$

Дальнейшее же понижение частоты излучения может, по аналогии с приведенными на рис. 1 закономерностями, приводит к тому, что в результате все более существенного сглаживания взаимосвязанных между собой экстремумов $R_{l,l+1}(S_l)$ сформируется вместо них лишь одна точка перегиба, которая также исчезнет на еще более низких частотах, удовлетворяющих условию $k_0 h_f \le 2\pi$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем результаты выполненных исследований.

Установлено, что для существования лучевых слаборасходящихся пучков, которым отвечают гладкие экстремумы у зависимости длины цикла лучей от их фазовой скорости, необходимо наличие либо переходных слоев с достаточно резким возрастанием градиента скорости звука или резких границ раздела сред, либо точек перегиба в профиле скорости звука при возрастании градиента этой величины в направлении от оси канала в соответствующих диапазонах глубин. Отмечено, что гладкому минимуму у зависимости длины цикла лучей от их фазовой скорости всегда предшествуют либо гладкий, либо острый (с разрывом производной) максимум, причем последнему соответствует сильнорасходящийся пучок лучей.

Показано, что при наличии характерных переходных слоев и физически корректной аппроксимации профилей скорости звука в классе непрерывно-дифференцируемых функций возможно парное существование взаимосвязанных между собой слаборасходящихся лучевых пучков, которым отвечают гладкие максимум и следующий за ним минимум у зависимости длины цикла лучей от их фазовой скорости. Выявлено, что такая возможность реализуется как для рефрагированных, так и для взаимодействующих с одной из резких границ раздела сред лучей. При этом максимум появляется в диапазоне изменения фазовых скоростей, где уменьшение длины цикла лучей из-за возрастания градиента скорости звука в переходном слое начинает преобладать над увеличением длины цикла лучей из-за увеличения их угла выхода из источника, а минимум – в том диапазоне, где имеет место обратная ситуация с влиянием соответствующих процессов на поведение длины цикла лучей. Замечено также, что при кусочно-линейной аппроксимации профиля скорости звука максимум, предшествующий гладкому минимуму у длины цикла лучей, всегда является острым.

Доказано, что у зависимости длины цикла лучей от их фазовой скорости всегда присутствует острый максимум, отвечающий лучу, один из горизонтов поворота которого совпадает либо с резкой границей раздела, либо с глубиной точки перегиба в профиле скорости звука. Установлено также, что такому максимуму с разрывом производной отвечает достаточно гладкий максимум у зависимости пространственного периода интерференции соседних мод от их фазовой скорости, который характеризует формирование в океаническом волноводе дифракционного слаборасходящегося пучка с соответствующей ему системой "дифракционных" каустик. Замечено, что существует оптимальная частота излучения, при которой "дифракционные" каустики заметнее всего проявляются в пространственном распределении интенсивности акустического поля. Выяснено также, что на частотах излучения, существенно превышающих эту оптимальную частоту, адекватное описание проявляющихся при этом дифракционных эффектов возможно в рамках модифицированного геометроакустического приближения, основанного на усредненном описании лучевой структуры поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петухов Ю.В., Абросимов Д.И., Бородина Е.Л.* Каустики и слаборасходящиеся пучки лучей в океанических волноводах // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 3. С. 367–374.

2. *Петухов Ю.В., Хилько А.А.* Формирование, распространение и фокусировка акустических пучков в океанических волноводах. Квазиоптическое приближение // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 5. С. 796–806.

3. *Абросимов Д.И., Петухов Ю.В.* Влияние дифракционных эффектов на формирование слаборасходящихся акустических пучков в подводном звуковом канале // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 4. С. 437–447.

4. *Petukhov Yu.V.* Conditions for forming weaks diverging acoustic bundles in ocean waveguides // Acoust. Phys. 2009. V. 55. № 6. P. 785–793.

5. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370 с.

6. *Гончаров В.В., Куртепов В.М.* О формировании и распространении слаборасходящихся пучков лучей в горизонтально неоднородном океане // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 5. С. 773–781.

7. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В., Куртепов В.М.* Слаборасходящиеся пучки лучей в Арктике // Изв. РАН. Физ. атм. и океана. 1995. Т. 31. № 3. С. 640–646.

8. *Ивинг М., Ворцель Д.* Сверхдальнее распространение звука. В кн.: Распространение звука в океана / Под ред. Бреховских Л.М. М.: ИЛ, 1951. С. 17–47.

9. *Pedersen M.A.* Acoustic intensity anomalies introduced by constant velocity gradients // J. Acoust. Soc. Amer. 1961.V. 33. №. 4. P. 465–474.

10. *Pedersen M.A., Gordon D.E.* Comparison of curvilinear and linear profile approximation in the calculation of underwater sound intensities by ray theory // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. V. 41. № 2. P. 419–438.

11. *Duda T.F., Bowlin J.B.* Ray – acoustic formation and timing effects from ocean sound – speed relative curvature // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. V. 96. Pt. 1. № 2. P. 1033–1046.

12. *Фельсен Л.* Квазиоптические методы в дифракции. В кн.: Квазиоптика / Под ред. Каценеленбаума Б.З., Шевченко В.В. М.: Мир, 1966. С. 12–62.

13. *Боровиков В.А., Кинбер Б.Е.* Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 247 с.

14. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.

15. *Булдырев В.С., Буслаев В.С.* Асимптотические методы в задачах распространения звука в океанических волноводах и их численная реализация // Математические вопросы теории распространения волн / Под ред. Бабича В.М. Л.: Наука, 1981. Т. 117. № 2. С. 39–77.

16. *Пискарев А.Л.* О расчете усредненных распределений интенсивности звуковых полей в океане // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 724–731.

17. *Петухов Ю.В.* Периодическое пространственное переформирование интерференционной структуры и дифракционая фокусировка акустических полей в океанических волноводах // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 3. С. 384–391.