АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2011, том 57, № 5, с. 633–641

АКУСТИКА ОКЕАНА.
ГИДРОАКУСТИКА

УДК 534.231.1

ИНТЕРФЕРИРУЮЩИЕ МОДЫ И ОСЕВАЯ ВОЛНА В ПОДВОДНОМ ЗВУКОВОМ КАНАЛЕ

© 2011 г. Н. С. Григорьева, Г. М. Фридман

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
190008 Санкт-Петербург, ул. Лоцманская 3
E-mails: nsgrig@natalie.spb.su; grifri@peterlink.ru

Поступила в редакцию 21.09.10 г.

Эксперименты по дальнему распространению низкочастотного звука, проведенные с середины 80-х годов, указывают на сложный характер распространения в подводном звуковом канале, когда источник и приемник расположены вблизи оси волновода. На графиках акустической интенсивности, как функции времени распространения и глубины гидрофона, за ранними приходами, которые хорошо описываются формулами геометрической акустики, следует всплеск энергии, распространяющейся вдоль оси. Этот всплеск энергии невозможно описать, используя геометрическую акустику, из-за расположенных вблизи оси волновода каустик с каустическими клювами. В окрестности таких каустик имеют место очень сложные интерференционные процессы. С увеличением расстояния от источника размеры окрестностей интерференции возрастают и начинают перекрываться, порождая своеобразную "осевую волну". Для произвольного двумерного подводного звукового канала осевая волна может быть представлена в виде суммы первых нормальных мод и остатка. Вывод основан на использовании двух представлений акустического поля. Первое из них включает сумму лучевых слагаемых и осевую волну. Второе представление состоит из лучевых слагаемых, суммы первых нормальных мод и остатка. Численные результаты получены для канонического профиля скорости звука на частоте 200 Гц для расстояний (1600–1650) км.

Ключевые слова: осевая волна, нормальные моды, подводный звуковой канал, дальнее распространение.

ВВЕДЕНИЕ

В многомодовом подводном звуковом канале, как известно, поле группы мод имеет интерференционный максимум вдоль выходящей из источника траектории, эквивалентной "модовому лучу", соответствующему центральной моде группы [1–4]. Это полезное свойство поясняет поведение мод, которые по отдельности охватывают всю глубину волновода, но в совокупности являются существенно локализованными. Первоначальный анализ, проведенный в статьях [1–4], не позволял строго описать поведение амплитуды поля группы мод. Такое строгое описание, основанное на формуле суммирования Пуассона, было дано в [5–7]. Формула Пуассона позволяет перейти от лучевого представления поля к модовому и обратно. В работе [8], также использующей эту формулу, совокупность полей всех лучей или мод преобразовывалась соответственно в совокупность полей всех мод или лучей. В статьях [5–7] суммирование Пуассона было применено к группе лучей или мод, что привело к частичному обращению с появлением дополнительного остатка. Как было показано в [7], это свойство лучевого эквивалента остается справедливым и вблизи каустики, где формулы геометрической акустики не могут быть использованы. В этом случае лучевой интеграл в формуле Пуассона имеет две близкие седловые точки и равномерное асимптотическое разложение такого интеграла будет содержать функции Эйри [8].

Во многих экспериментах по дальнему распространению звука источник и приемник располагаются вблизи оси волновода, чтобы минимизировать взаимодействие акустического поля с поверхностью океана и его дном. Распространение энергии вдоль оси волновода не может быть описано формулами геометрической акустики из-за расположенных вблизи оси многочисленных каустик с каустическими клювами [9]. Для описания акустического поля в окрестности каустического клюва необходимо использовать интеграл Пирси [10]. Продольный и поперечный размеры окрестности каустического клюва, где простые формулы геометрической акустики неприменимы, растут с расстоянием. В результате, начиная с некоторого расстояния, окрестности соседних каустических клювов пересекаются. В таких зонах пересечения акустическое поле уже не может быть описано интегралом Пирси. Возникает более сложная интерференционная структура. Для идеализированной модели симметричного волновода Булдырев [11] показал, что интерференция волновых полей, соответствующих распространяющимся вблизи оси лучам, приводит к формированию особой когерентной структуры

(осевой волны), которая распространяется вдоль оси. Для подводного звукового канала в произвольном горизонтально стратифицированном океане формула для осевой волны была получена в [12].

Цель этой статьи состоит в том, чтобы получить представление осевой волны в виде суммы первых мод и остатка, что позволит лучше понять интерференционную структуру поля вблизи оси подводного звукового канала в глубоком море. Вывод основан на использовании двух представлений акустического поля. Первое было получено в [12]. Оно включает сумму лучевых слагаемых и осевую волну. Второе представление, состоящее из лучевых слагаемых, суммы первых мод и остатка, выведено в данной статье. Для простейшей модели с параболическим квадратом коэффициента преломления второе представление было получено в [13].

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Для простоты рассмотрим случай, когда волновое поле зависит от двух пространственных координат: расстояния X и глубины Z, измеряемой относительно оси волновода. Зависимость от времени, задаваемая множителем $\exp(-i\omega t)$, где ω – циклическая частота и t – время, в последующих формулах не выписывается.

Рассмотрим интерференцию волны, распространяющейся непосредственно вдоль оси волновода, и волн, распространяющихся вдоль лучей с малыми углами выхода. Такие лучи не достигают поверхности океана или его дна, что позволяет использовать модель бесконечного океана.

Предполагается, что скорость звука в случае малых Z может быть представлена разложением

$$c(Z) = c_0 + \frac{c_2}{2!}Z^2 + \frac{c_3}{3!}Z^3 + \ldots, \quad c_2 > 0. \tag{1}$$

При $Z \to \pm\infty$ скорость звука стремится к постоянным $c_\infty^\pm > c_0$.

Так как в формуле (1) $c_1 = c'(0) = 0$ и $c_2 = c''(0) > 0$, то распространение звука в океане характеризуется образованием глубоководного волновода с осью $Z = 0$.

Положим, что источник находится в точке с координатами $X = 0$, $Z = Z_0$. Введем безразмерные координаты $x = X/a$, $z = Z/a$, где $a = \sqrt{c_0/c_2}$ – характерный масштаб волновода, и безразмерное волновое число $\kappa = (\omega/c_0)a$.

Искомые волновые поля $U_j(x,z)$, $j = 1, 2$ соответственно над источником и ниже его должны удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial z^2} + \kappa^2 n^2(z) U_j = 0, \tag{2}$$

где $n(z) = c_0/c(a\,z) = 1 - n_2 z^2 + n_3 z^3 + \ldots$, $n_2 > 0$ – показатель преломления. Уравнение (2) должно быть дополнено условием непрерывности на глубине источника

$$U_1(x, z_0) = U_2(x, z_0), \tag{3}$$

где $z_0 = Z_0/a$, условием сопряжения

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\partial U_2}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=z_0} = 2\pi\delta(x), \tag{4}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция и условием отсутствия волнового поля на бесконечности

$$U_j(x,z) \to 0 \quad \text{при} \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \to \infty. \tag{5}$$

Обозначим через $\Phi_1(z,\zeta)$ и $\Phi_2(z,\zeta)$ два линейно независимых решения уравнения

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \kappa^2\left(n^2(z) - \zeta^2\right)\Phi = 0, \tag{6}$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \Phi_1(z,\zeta) &\to 0 \quad \text{при} \quad z \to -\infty, \\ \Phi_2(z,\zeta) &\to 0 \quad \text{при} \quad z \to +\infty, \end{aligned} \tag{7}$$

и через $W(\zeta)$ – определитель Вронского этих решений. Решение задачи (1)–(5) строится методом разделения переменных и имеет вид

$$U_j(x_r, z_r; z_0) = \kappa \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_l(z_0,\zeta)\Phi_j(z_r,\zeta)}{W(\zeta)} e^{i\kappa x_r \zeta}\, d\zeta, \tag{8}$$

$$j, l = 1, 2; \quad j \neq l,$$

где (x_r, z_r) – безразмерные координаты приемника. Для сходимости интеграла в формуле (8) контур интегрирования при $x_r > 0$ должен быть приподнят во второй квадрант плоскости, а при $x_r < 0$ – опущен в четвертый квадрант. В дальнейшем мы будем рассматривать только $x_r > 0$.

Безразмерное волновое число $\kappa = (\omega/c_0)a$, где $a = \sqrt{c_0/c_2}$, является большим параметром задачи даже при невысоких частотах. Например, для канонического профиля скорости звука [14] и частоты источника 75 Гц мы получаем для k значение 2089.76. Это означает, что для функций $\Phi_1(z,\zeta)$ и $\Phi_2(z,\zeta)$ могут быть использованы их асимптотики при $\kappa \to \infty$, которые выражаются через функции параболического цилиндра $D_t(\pm\nu)$. Функции $D_t(\pm\nu)$ при $|\nu| \to \infty$ ведут себя следующим образом [15, 16]:

$$D_t(\nu) \sim e^{-\nu^2/4}\nu^t 2^{t/2}\left\{1 - \frac{t(t-1)}{2\nu^2} + \ldots\right\}, \quad |\arg\nu| < \frac{3\pi}{4}; \tag{9}$$

$$\begin{gathered} D_t(-\nu) \sim e^{-\nu^2/4}(-\nu)^t 2^{t/2}\left\{1 - \frac{t(t-1)}{2\nu^2} + \ldots\right\}, \\ |\pi - \arg\nu| < \frac{3\pi}{4}. \end{gathered} \tag{10}$$

Формулы, связывающие $\Phi_j(z,\zeta)$ с $D_t(\pm\nu)$, при $k \to \infty$ имеют вид

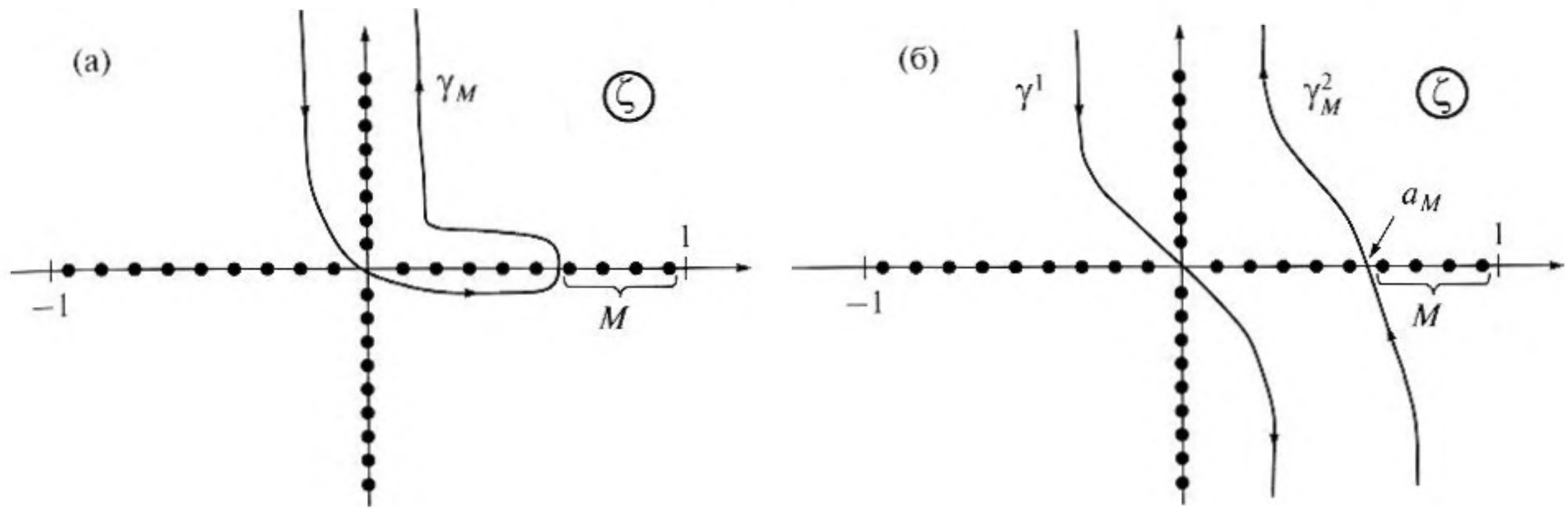

Рис. 1. (а) Контур интегрирования γ_M в (19) и (б) контуры интегрирования γ^1, γ_M^2. Полюса подынтегральной функции в (8) отмечены точками.

$$\Phi_1(z,\zeta) \sim \frac{D_{\kappa\Delta-1/2}\left(\sqrt{\kappa}\,\Xi(z,\zeta)\right)}{\sqrt{\Xi'(z,\zeta)}}, \tag{11}$$

$$\Phi_2(z,\zeta) \sim \frac{D_{\kappa\Delta-1/2}\left(-\sqrt{\kappa}\,\Xi(z,\zeta)\right)}{\sqrt{\Xi'(z,\zeta)}}. \tag{12}$$

Здесь $\Xi(z,\zeta)$ находится из неявного уравнения

$$\int\limits_{z^-(\zeta)}^{z} \sqrt{n^2(z)-\zeta^2}\,dz = \int\limits_{-2\sqrt{\Delta}}^{\Xi(z,\zeta)} \sqrt{\Delta - \frac{s^2}{4}}\,\mathrm{d}s, \tag{13}$$

где

$$\Delta = \Delta(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{z^-(\zeta)}^{z^+(\zeta)} \sqrt{n^2(z)-\zeta^2}\,\mathrm{d}z \tag{14}$$

– фазовый интеграл и $z^-(\zeta) < z^+(\zeta)$ – два корня уравнения $n^2(z)-\zeta^2 = 0$; $\Xi'(z,\zeta) = \partial\Xi(z,\zeta)/\partial z$.

Исследуем на плоскости ζ расположение особых точек подынтегральной функции в (8). Используя формулу [16]

$$D_t(\nu)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}D_t(-\nu) - D_t(-\nu)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}D_t(\nu) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-t)},$$

где $\Gamma(-t)$ – гамма функция, мы получаем для определителя Вронского при $k \to \infty$ следующее выражение

$$W(\zeta) \sim \sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}}\Gamma(1+t)\sin\pi t. \tag{15}$$

Здесь

$$t = t(\zeta) = \kappa\Delta(\zeta) - \frac{1}{2}. \tag{16}$$

Так как функции параболического цилиндра являются целыми функциями на плоскости значка t, то подынтегральное выражение в (8) имеет простые полюса только в корнях уравнения $\Gamma(1+t)\sin\pi t = 0$ или $\Gamma^{-1}(-t) = 0$, т.е. при

$$t = \kappa\Delta(\zeta) - \frac{1}{2} = m, \quad m = 0, 1, \ldots . \tag{17}$$

Поскольку выражение $n^2(z)-\zeta^2$ содержит ζ^2, полюса $\zeta = \pm\zeta_m$ располагаются на плоскости ζ симметрично относительно начала координат. При вещественных k и $m \le m_0$, где m_0 – некоторое целое число, полюса $\pm\zeta_m$ вещественны, а при $m > m_0$ – чисто мнимые.

Асимптотики (11), (12) являются равномерными относительно расположения точек поворота уравнения (6). Если $\kappa\Delta \gg 1$, то функции параболического цилиндра могут быть, в свою очередь, выражены с точностью до величин порядка $O\left((\kappa\Delta)^{-1}\right)$ через функции Эйри и экспоненты. Заметим, что в силу (17), неравенство $\kappa\Delta \gg 1$ эквивалентно условию $m \gg 1$. Таким образом, при вычислении нормальных волн малых номеров, которые играют определяющую роль в настоящей работе, должны использоваться именно асимптотики (11) и (12), содержащие функции параболического цилиндра.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

Ниже мы подробно рассмотрим случай, когда источник и точка наблюдения расположены на оси волновода, т.е. $z_r = z_0 = 0$. Используя асимптотические формулы для функций параболического цилиндра $D_t(\pm\nu)$, можно показать, что контур интегрирования в (8) может быть продеформирован в контур γ, охватывающий интервалы $0 < \mathrm{Re}\,\zeta \le 1$, $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$ и $0 < \mathrm{Im}\,\zeta < +\infty$, $\mathrm{Re}\,\zeta = 0$. Затем продеформируем контур γ так, чтобы выделить сумму первых M вычетов подынтегральной функции в (8) в полюсах $+\zeta_m$, $m = 0, 1, \ldots, M-1 < m_0$ (см. рис. 1а). Эти вычеты дают сумму первых M распространяющихся нормальных волн. Условия, которым должно

удовлетворять число M, будут сформулированы ниже. В результате (8) принимает вид:

$$U(x_r,0;0)=\sum_{m=0}^{M-1}u_m^{\text{mode}}(x_r,0;0)+I(x_r), \tag{18}$$

где

$$I(x_r)\sim\kappa\int\limits_{\gamma_M}\frac{D_t(\sqrt{\kappa}\Xi(0,\zeta))D_t(-\sqrt{\kappa}\Xi(0,\zeta))}{\Xi'(0,\zeta)W(\zeta)}\times \tag{19}$$
$$\times\exp(i\kappa x_r\zeta)d\zeta,$$

$$u_m^{\text{mode}}(x_r,0;0)\sim\frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}i(-1)^{m+1}}{\sqrt{\kappa}m!\zeta_m\Xi'(0,\zeta_m)}\times$$
$$\times\left(\int\limits_{z^-(\zeta_m)}^{z^+(\zeta_m)}\frac{1}{\sqrt{n^2(z)-\zeta_m^2}}dz\right)^{-1}\exp(i\kappa x_r\zeta_m)\times \tag{20}$$
$$\times D_m(\sqrt{\kappa}\Xi(0,\zeta_m))D_m(-\sqrt{\kappa}\Xi(0,\zeta_m))$$

и t задается формулой (16).

Мы изучаем соотношение между первыми нормальными модами и осевой волной, которая описывает интерференцию волновых полей, соответствующих лучам с малыми углами выхода, и волны, распространяющейся непосредственно вдоль оси волновода. В этом случае, как правило, $M\le 10$ и полюса ζ_m близки к 1.

Преобразуем теперь интеграл (19). Используя формулы из [16], он может быть при $k\to\infty$ записан в форме

$$I(x_r)\sim -i\frac{\sqrt{\pi\kappa}}{2\sqrt{2}}\int\limits_{\gamma_M}G(\zeta)R(t)\frac{1+e^{i\pi t}}{1-e^{i\pi t}}e^{i\kappa x_r\zeta}d\zeta. \tag{21}$$

Здесь

$$G(\zeta)=\frac{D_t(\sqrt{\kappa}\Xi(0,\zeta))\,D_t(-\sqrt{\kappa}\Xi(0,\zeta))}{\Xi'(0,\zeta)\,D_t^2(0)}, \tag{22}$$

$$R(t)=2^{-t}\frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma^2(1+t/2)}. \tag{23}$$

Для того, чтобы установить поведение множителя $R(t)$ на плоскости t, воспользуемся формулой Стирлинга [17]. При $|t|\to\infty$ эта формула дает

$$R(t)\sim\begin{cases}\sqrt{2/\pi t}, & |\arg t|<\pi-\quad/\\ i\sqrt{2/\pi}\;/\operatorname{tg}(\pi t/2), & \varepsilon<|\arg t|<2\pi-\varepsilon,\end{cases} \tag{24}$$

где ε – произвольная положительная постоянная.

В интеграле (21) разложим функцию $(1+e^{i\pi t})/(1-e^{i\pi t})$ в геометрическую прогрессию

$$\frac{1+e^{i\pi t}}{1-e^{i\pi t}}=1+2\sum_{l=1}^{L-1}e^{i\pi tl}+2\frac{e^{i\pi tL}}{1-e^{i\pi t}}. \tag{25}$$

Выбор целого числа L и связь между M и L будет обсуждаться ниже. Интегралы

$$\int\limits_{\gamma_M}G(\zeta)R(t)\exp(i\pi tl+i\kappa x_r\zeta)d\zeta$$

для $l=0,1,\ldots,L-1$ обращаются в нуль, т.к. их подынтегральные функции не имеют особенностей в области, расположенной слева от контура интегрирования γ_M, и они достаточно быстро стремятся к нулю в этой области при $|\zeta|\to\infty$.

Что касается последнего члена в (25), то в верхней полуплоскости он не превосходит $|\exp(i\pi t(L-1))|$ и, следовательно, интеграл от этого члена вдоль контура γ_M будет сходиться. Таким образом,

$$I(x_r)\sim -i\sqrt{\frac{\pi\kappa}{2}}\int\limits_{\gamma_M}G(\zeta)R(t)\frac{e^{i\kappa\varphi_L(\zeta)}}{1-e^{i\pi t}}d\zeta, \tag{26}$$

где введено обозначение

$$\varphi_L(\zeta)=\frac{\pi tL}{\kappa}+x_r\zeta. \tag{27}$$

Интеграл по контуру γ_M в формуле (26) разобьем на два: интеграл по контуру γ^1 и интеграл по контуру γ_M^2 (рис. 1б). Контур γ^1 идет из бесконечности к $\zeta=0$ в секторе $\pi/2<\arg\zeta<3\pi/4$, а затем уходит на бесконечность в области $-\pi/2<\arg\zeta<-\pi/4$. Контур γ_M^2 располагается в секторах $-\pi/2<\arg\zeta<-\pi/4$ и $\pi/4<\arg\zeta<\pi/2$. Он пересекает вещественную ось при $\zeta=a_M$, где:

$$\zeta_M<a_M<\zeta_{M-1} \tag{28}$$

и ζ_M – это M-й полюс подынтегрального выражения в (8), который находится из уравнения (17). Тогда

$$I(x_r)=I_L(x_r)+F_{L,M}(x_r), \tag{29}$$

где при $k\to\infty$

$$I_L(x_r)\sim -i\sqrt{\frac{\pi\kappa}{2}}\int\limits_{\gamma^1}G(\zeta)R(t)\frac{e^{i\kappa\varphi_L(\zeta)}}{1-e^{i\pi t}}d\zeta, \tag{30}$$

$$F_{L,M}(x_r)\sim -i\sqrt{\frac{\pi\kappa}{2}}\int\limits_{\gamma_M^2}G(\zeta)R(t)\frac{e^{i\kappa\varphi_L(\zeta)}}{1-e^{i\pi t}}d\zeta. \tag{31}$$

Нетрудно показать, что интегралы (30) и (31) существуют.

В интеграле (30) разложим знаменатель в геометрическую прогрессию

$$\frac{\exp(i\pi tL)}{1-\exp(i\pi t)}=$$
$$=\sum_{j=0}^{J-1}\exp(i\pi t(L+j))+\frac{\exp(i\pi t(L+J))}{1-\exp(i\pi t)}. \tag{32}$$

Это разложение позволяет представить интеграл $I_L(x_r)$ в виде суммы интегралов

$$I_L = \sum_{j=0}^{J-1} s_{L+j} + S_{L+J}, \tag{33}$$

где при $k \to \infty$

$$s_{L+j} \sim -i\sqrt{\frac{\pi\kappa}{2}}\int_{\gamma^1} G(\zeta)\, R(t) \exp(i\kappa\varphi_{L+j}(\zeta))d\zeta, \tag{34}$$

$$S_{L+J} \sim -i\sqrt{\frac{\pi\kappa}{2}}\int_{\gamma^1} \frac{G(\zeta)R(t)}{1-\exp(i\pi t)} \exp(i\kappa\varphi_{L+J}(\zeta))d\zeta. \tag{35}$$

В интеграле (34) фазовая функция $\varphi_{L+j}(\zeta)$ имеет вид (27); $G(\zeta)$ и $R(t)$ задаются соответственно формулами (22) и (23) и являются медленно меняющимися функциями, причем для $R(t)$ справедлива асимптотическая формула (24). Это означает, что интегралы s_{L+j} могут быть вычислены по методу перевала. В результате получаем

$$s_{L+j} = -i\sqrt{\frac{\pi}{\kappa}}\frac{\exp(-i(\pi/4)\operatorname{sign} b)}{\sqrt{|\pi(L+j)-x_r|}}\exp\left(i\kappa \times \right.$$
$$\left. \times \left(x_r + \frac{\pi(L+j)}{2b}\left(1-\frac{x_r}{\pi(L+j)}\right)^2\right) - \frac{i\pi}{2}(L+j)\right) \times \tag{36}$$
$$\times \left\{1 + O\left(\frac{1}{\kappa\left(1-\hat{\zeta}_{L+j}\right)}\right) + O\left(\frac{1}{\kappa x_r |b|\left(1-\hat{\zeta}_{L+j}\right)^2}\right)\right\},$$

где

$$b = \frac{5}{8} - 3n_4 - \frac{15}{2}n_3^2 \tag{37}$$

и седловая точка $\hat{\zeta}_{L+j}$ находится из уравнения

$$x_r - \zeta(L+j)\int_{z^-(\zeta)}^{z^+(\zeta)} \frac{dz}{\sqrt{n^2(z)-\zeta^2}} = 0. \tag{38}$$

В формуле (36) первое порядковое слагаемое связано с применением формулы (24) для $R(t)$. Это слагаемое можно уменьшить, если в асимптотической формуле (24) учесть не только главный член, но и поправочные члены. Второе порядковое слагаемое в (36) характеризует погрешность метода перевала. Это слагаемое будет убывать с ростом κx_r, если седловые точки $\hat{\zeta}_{L+j}$ подчинить условию

$$|b|^{1/2}\left(1-\hat{\zeta}_{L+j}\right) > (\kappa x_r)^{-0.5+\delta}, \tag{39}$$

где $\delta < 1/2$ – фиксированная положительная постоянная. Оптимальный выбор значения δ мы обсудим позже. Для большинства задач дальнего распространения δ близко к 0.1. Неравенство (39) будет справедливо при всех $j = 0, 1, \ldots$, если

$$L > \frac{x_r}{\pi}\left(1 + b^{1/2}(\kappa x_r)^{-0.5+\delta}\right), \quad \text{для } b > 0, \tag{40}$$

$$L < \frac{x_r}{\pi}\left(1 - |b|^{1/2}(\kappa x_r)^{-0.5+\delta}\right), \quad \text{для } b < 0. \tag{41}$$

Как было показано в [12], если неравенства

$$\frac{x_r}{\pi} < m \le \frac{x_r}{\pi}\left(1 + b^{1/2}(\kappa x_r)^{-0.5+\delta}\right), \quad \text{для } b > 0, \tag{42}$$

$$\frac{x_r}{\pi}\left(1 - |b|^{1/2}(\kappa x_r)^{-0.5+\delta}\right) \le m < \frac{x_r}{\pi}, \quad \text{для } b < 0 \tag{43}$$

выполняются, то волна u_m с номером m, которая пересекает ось волновода в точке наблюдения m-й раз, интерферирует с волной u_0, распространяющейся вдоль оси. Если $b > 0$, то первым в точку приемника приходит возмущение, распространяющееся вдоль оси волновода, и только после этого регистрируются волны, распространяющиеся вдоль лучей, пересекающих ось какое-то число раз. Если же $b < 0$, то волна, распространяющаяся вдоль оси волновода, приходит в точку наблюдения последней. В соответствии с определением, данным в [18], при $b > 0$ волновод является анормальным, а при $b < 0$ – нормальным. В большинстве экспериментов по дальнему распространению звука подводные звуковые каналы являются нормальными, поэтому ниже мы рассмотрим случай $b < 0$.

Если условие (41) выполнено, то в терминах геометрической оптики применение метода перевала к интегралу s_{L+j} дает

$$s_{L+j} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{\hat{J}_{L+j}}} \times$$
$$\times \exp\left\{i\left(\omega T_{L+j} - \frac{\pi}{2}(L+j)\right)\right\} \times \tag{44}$$
$$\times \left\{1 + O\left((\kappa x_r)^{-\delta}\left(\frac{|b|x_r}{\kappa}\right)^{1/2}\right) + \left((\kappa x_r)^{-2\delta}\right)\right\},$$

где множитель $\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\exp(-i\pi/4)$ характеризует источник, T_{L+j} – время распространения волны u_{L+j}, которая пересекает ось в точке наблюдения $(L+j)$-й раз и $\hat{J}_{L+j}$ – геометрическое расхождение.

Очевидно, что интеграл $S_{L+J}(x_r)$ в формуле (35) описывает волны, пересекающие ось волновода $L+J$ и большее число раз.

Первой задачей этой статьи является получение представления акустического поля, включающего лучевые слагаемые, сумму первых нормальных мод и остаток. Условие (41), которое позволяет использовать метод перевала для вычисления интегралов s_{L+j} при $b < 0$, накладывает следующие ограничения на точку a_M, в которой контур интегрирования γ_M^2 пересекает вещественную ось (см. рис. 1б),

$$\hat{\zeta}_{L-1} < a_M < \hat{\zeta}_L. \tag{45}$$

Здесь $\hat{\zeta}_L$ – седловая точка интеграла $s_L(x_r)$, которая находится из уравнения (38). Кроме того, как было

отмечено выше, число a_M должно удовлетворять неравенствам

$$\zeta_M < a_M < \zeta_{M-1}, \tag{46}$$

где ζ_M – M-й полюс подынтегральной функции интеграла (8). Нетрудно показать, что при выполнении условий (45) интеграл $F_{L,M}(x_r)$, описывающий остаток в формуле (29), сходится.

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ОСЕВОЙ ВОЛНОЙ И ПЕРВЫМИ НОРМАЛЬНЫМИ МОДАМИ

Для описанной выше модели среды, где скорость звука $c(Z)$ задается разложением (1), акустическое поле может быть представлено в форме, отличной от (18), (29). Это представление включает лучевые слагаемые, соответствующие лучам, приходящим в точку наблюдения после $L + j$, $j \geq 0$ пересечений оси волновода, и осевую волну, описывающую интерференцию возмущения, распространяющегося вдоль оси, и волн, распространяющихся вдоль других лучей с малыми углами выхода. Формула для осевой волны также может быть получена с помощью преобразования контурного интеграла (8).

В статье [12] использован другой способ, основанный на результатах работы [11], где, в частности, исследована эталонная задача с параболической зависимостью квадрата коэффициента преломления от глубины. В этом частном случае решениями уравнения (6) являются функции параболического цилиндра и вывод формулы для осевой волны существенно упрощается.

В [12] в случае произвольной зависимости $c(Z)$ (см. (1)) интегральное представление осевой волны ищется в форме суперпозиции решений уравнения Гельмгольца, сосредоточенных в окрестности оси волновода, по аналогии с выражением для осевой волны, полученным для эталонной задачи. Формулы для осевой волны имеют разный вид в анормальном ($b > 0$) и нормальном ($b < 0$) волноводах и в случае симметричного волновода переходят в формулы, полученные в [11].

В случае нормального волновода, в котором волна, распространяющаяся вдоль оси волновода, приходит в точку наблюдения последней ($b < 0$), число L равно N, где $N - 1$ – наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству (41)

$$\begin{gathered}\frac{x_r}{\pi}\left(1 - |b|^{1/2}(\kappa x_r)^{-0.5+\delta}\right) \leq N < \\ < \frac{x_r}{\pi}\left(1 - |b|^{1/2}(\kappa x_r)^{-0.5+\delta}\right) + 1.\end{gathered} \tag{47}$$

В этом случае осевая волна $H_N(x_r)$ описывается формулой

$$\begin{gathered}H_N(x_r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa}}\exp\left(-i\frac{\pi}{2}(N+1)\right)\times \\ \times \exp\left\{i\left(\kappa x_r - \frac{1}{8}\left(b - 1 + \frac{3}{4}\chi^2\right)\frac{x_r}{\kappa}\right)\right\}\times \\ \times \int\limits_{\infty\exp(-3i\pi/4)}^{\infty\exp(i\pi/4)} \Lambda_N(\tau, x_r)d\tau\left\{1 + O\left(\frac{1}{(\kappa x_r)^{0.5-3\delta}}\right)\right\}.\end{gathered} \tag{48}$$

Контур интегрирования в (48) идет из бесконечности вдоль прямой $\arg\tau = -3\pi/4$ к $\tau = 0$, а затем уходит на бесконечность вдоль прямой $\arg\tau = \pi/4$; $\chi = -4n_3/\sqrt{3}$, $0 < \delta < 1/2$. Подынтегральная функция в (48) имеет вид

$$\begin{gathered}\Lambda_N(\tau, x_r) = 2^{-\tau}\frac{\Gamma(\tau + 1/2)}{\Gamma^2(\tau/2 + 3/4)}\frac{e^{i\pi N\tau}}{1 + e^{i\pi\tau}}\times \\ \times D_{\tau-1/2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\chi}{\sqrt{\kappa}}\tau\right)D_{\tau-1/2}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\chi}{\sqrt{\kappa}}\tau\right)\times \\ \times \left(D_{\tau-1/2}(0)\right)^{-2}\exp\left(-ix_r\tau - \frac{i}{2}b\frac{x_r}{\kappa}\tau^2\right).\end{gathered}$$

Сравнивая два представления акустического поля, мы получаем, что при $L = N$

$$H_N(x_r) = \sum_{m=0}^{M-1} u_m^{\text{mode}}(x_r, 0; 0) + F_{L,M}(x_r), \tag{49}$$

где M должно удовлетворять условиям (45), (46). Таким образом, осевая волна может быть также представлена в виде суммы первых нормальных мод и остатка. Хотя вклад остаточного члена в осевую волну мал по сравнению с вкладом группы первых мод, им нельзя пренебречь.

Полюса ζ_m подынтегральной функции в (8) зависят от частоты, но не зависят от расстояния между источником и приемником. Что же касается седловых точек $\hat{\zeta}_{L+j}$ интегралов (34), то они зависят от расстояния, но не зависят от частоты. Таким образом, число интерферирующих мод, формирующих осевую волну, зависит от частоты, расстояния между источником и приемником и свойств звукового канала около оси (эти свойства определяют характерный масштаб волновода, a, и параметры b и χ).

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

В качестве численного примера рассмотрим волновод с каноническим профилем скорости звука [14, 18], который является нормальным волноводом. В этом случае

$$c(Z) = c_0\left(1 + \frac{1}{2}h\beta(e^{2\xi} - 2\xi - 1)\right),$$

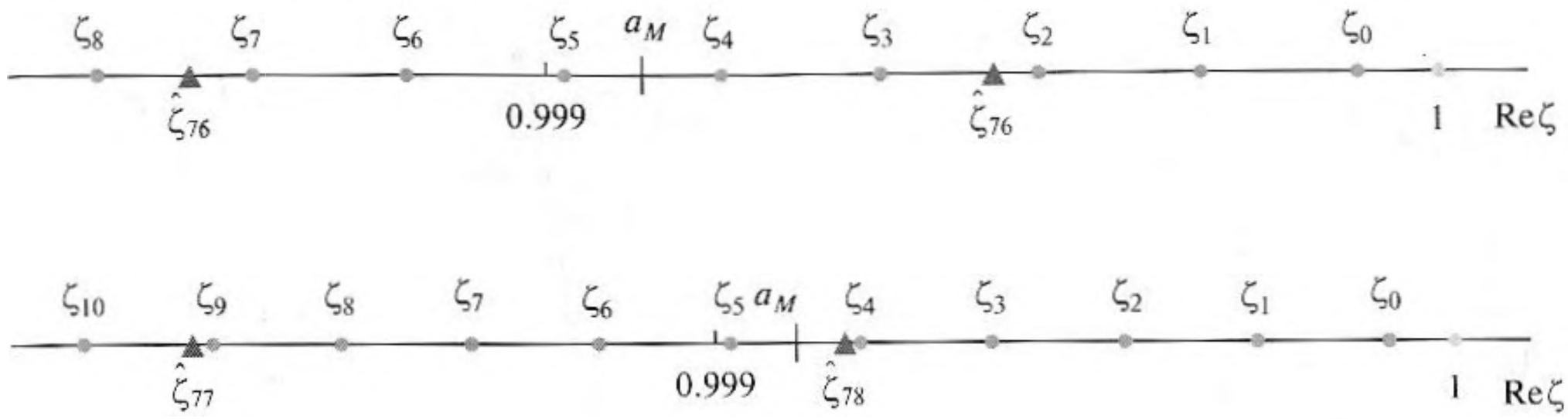

Рис. 2. Первые 11 полюсов ζ_M подынтегральной функции в (8) и две наибольшие седловые точки 1 $\zeta_m = \cos\psi_m$: (а) для расстояния $X_r = 1600$ км и (б) для $X_r = 1650$ км.

где

$$\xi = (Z - Z_0)/h, \quad \beta = 0.0113\times10^{-3}\,\text{м}^{-1},$$

$$c_0 = 1500\ \text{м/с},\ h = 1000\ \text{м},\ Z_0 = -1000\ \text{м}.$$

Тогда в разложении для показателя преломления $n(z)$ мы получаем $n_2 = 0.5$, $n_3 = -2.21730$, $n_4 = -7.12463$ и основные параметры задачи будут иметь следующие значения

$$a = 6651.90\ \text{м}, \quad b = -14.87430, \quad \chi = 5.12064.$$

Пусть частота источника равна 200 Гц, что типично для задач дальнего распространения звука. Тогда $\omega = 400\pi\ \text{с}^{-1}$ и для безразмерного волнового числа к получаем $\kappa = (\omega/c_0)a = 5572.68$.

Акустическое поле вычисляется для расстояний $1600 \le X_r \le 1650$ км (или для безразмерных расстояний $240.533 \le x_r \le 248.049$).

Постоянная $0 < \delta < 1/2$ выбирается таким образом, чтобы минимизировать погрешности, возникающие при вычислении лучевых слагаемых (44), и погрешность в формуле (48) для осевой волны. В результате мы получаем $\delta = 0.101502$.

Для описанной выше модели среды первые полюса ζ_m, $m = 0, 1, \ldots$ подынтегральной функции в (8) (см. формулы (17) и (14)) имеют следующие значения

$$\zeta_0 = 0.999910, \quad \zeta_1 = 0.999731, \quad \zeta_2 = 0.999553,$$
$$\zeta_3 = 0.999375, \quad \zeta_4 = 0.999197, \quad \zeta_5 = 0.999020,$$
$$\zeta_6 = 0.998844, \quad \zeta_7 = 0.998667, \quad \zeta_8 = 0.998492,$$
$$\zeta_9 = 0.998316, \quad \zeta_{10} = 0.998142.$$

Седловые точки $\hat{\zeta}_m$ зависят от x_r (см. уравнение (38)). Луч, приходящий в точку наблюдения $(x_r, 0)$ после m пересечений оси волновода, выходит из источника под углом $\Psi_m = \arccos\hat{\zeta}_m$, $m \le x_r/\pi$. Волна u_m, соответствующая этому лучу, интерферирует с волной u_0, распространяющейся вдоль оси $(\Psi = 0)$, если выполняется неравенство (43). Для рассматриваемой модели среды на расстоянии 1600 км от источника с волной u_0 интерферирует только одна волна — u_{76}; ей соответствует $\hat{\zeta}_{76} = 0.999501$ (см. рис. 2а). Предыдущая седловая точка — $\hat{\zeta}_{75} = = 0.998598$ соответствует волне u_{75}, которая наблюдается независимо от u_0.

Для $X_r = 1650$ км имеем аналогичную ситуацию с единственной интерферирующей волной u_{78}; $\hat{\zeta}_{78} = 0.999176$. Волна u_{77} не интерферирует с волной u_0, распространяющейся вдоль оси волновода; $\hat{\zeta}_{77} = 0.998292$ (см. рис. 2б).

Для всего промежутка $1600 \le X_r \le 1650$ км в качестве постоянной a_M можно выбрать середину интервала (ζ_5, ζ_4), т.е. положить $M = 5$. В этом случае справа от a_M будет располагаться единственная седловая точка $\hat{\zeta}_m$, соответствующая интерферирующей волне, а слева от a_M — только $\hat{\zeta}_m$, соответствующие волнам u_m, которые не участвуют в интерференционном процессе.

Пусть $N - 1$ — наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству (11) (см. также (47)). Тогда для рассматриваемой модели среды $N = 76$ для $1600 \le X_r < 1610$ км, $N = 77$ для расстояний $1610 \le X_r < 1631.2$ км и $N = 78$ в промежутке $1631.2 \le X_r \le 1650$ км. Если a_M выбрано так, что $\zeta_5 < a_M < \zeta_4$, то $L = N$, где $\hat{\zeta}_{L-1} < a_M < \hat{\zeta}_L$ (см. неравенства (45)) и, как было показано в этой статье, для осевой волны справедливо представление (49).

На рис. 3 и 4 показаны зависимости от размерного расстояния X_r модуля осевой волны, модуля суммы первых пяти нормальных мод и $\left|\sum_{m=0}^{4} u_m^{\text{mode}}(x_r, 0; 0) + F_{L,M}(x_r)\right|$. Результаты вычислений показывают, что осевая волна не может быть представлена в виде суммы первых пяти нормальных мод, однако принимая во внимание остаток $F_{L,M}(x_r)$, мы получаем практически совпадающие кривые.

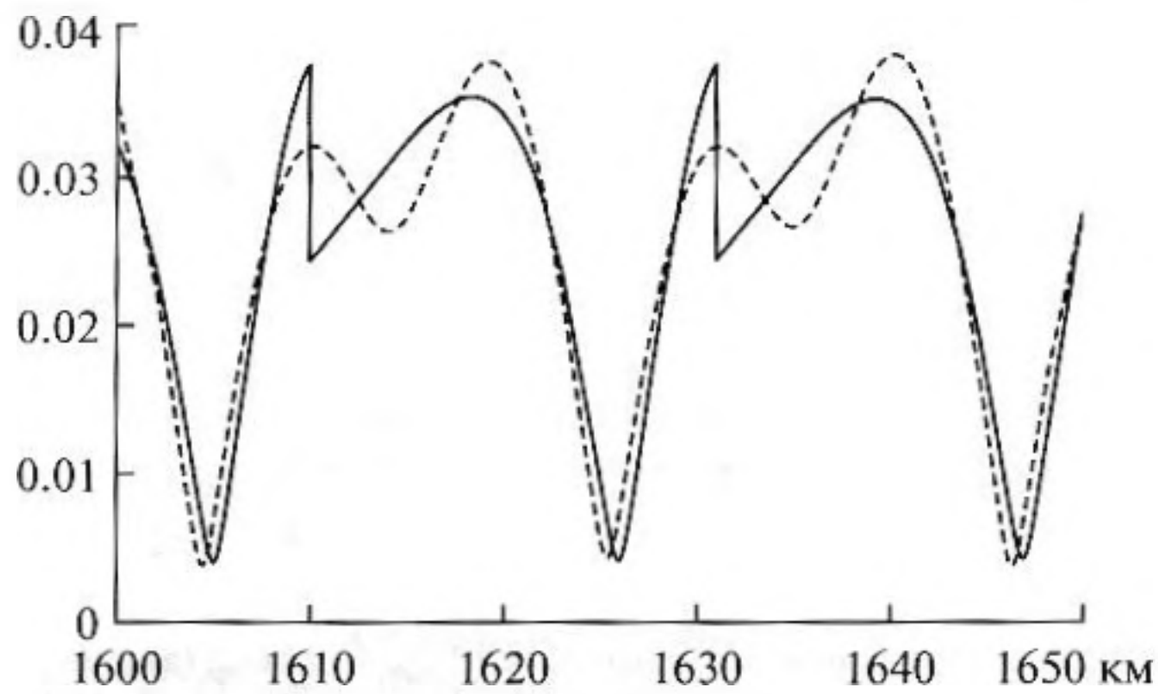

Рис. 3. Зависимости $|H_N(x_r)|$ (сплошная линия) и $\left|\sum_{m=0}^{4} u_m^{\text{mode}}(x_r, 0; 0)\right|$ (пунктир) от размерного расстояния X_r в промежутке $1600 \le X_r \le 1650$ км.

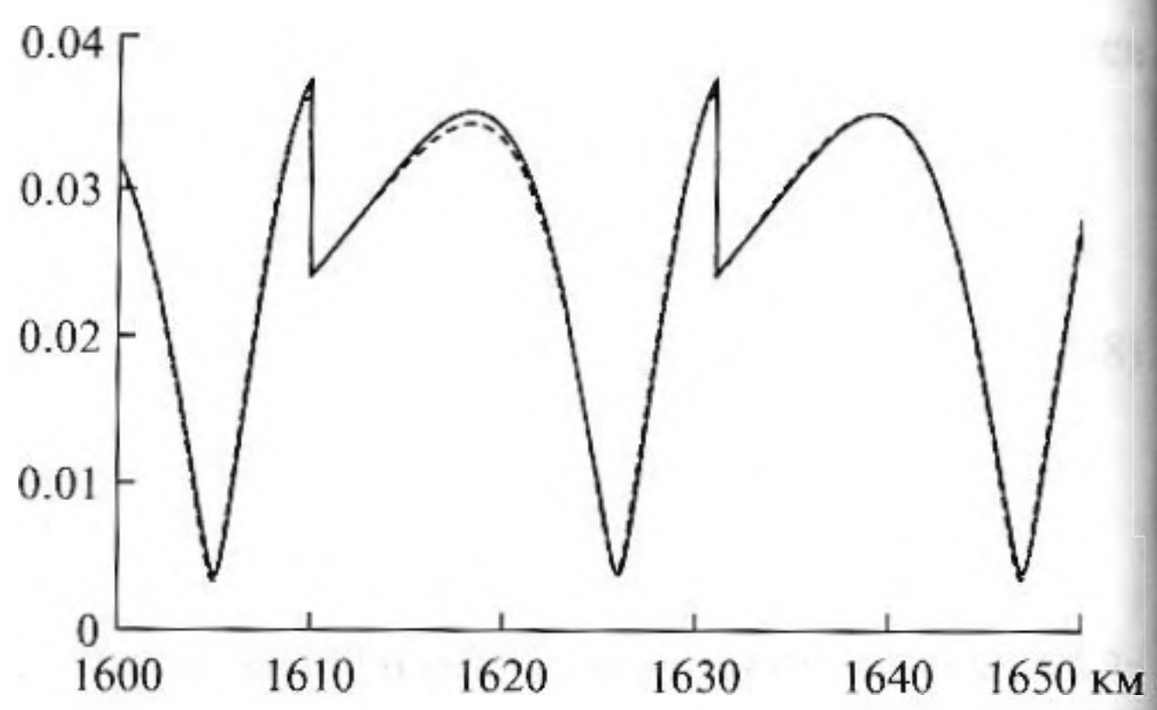

Рис. 4. Зависимости $|H_N(x_r)|$ (сплошная линия) и $\left|\sum_{m=0}^{4} u_m^{\text{mode}}(x_r, 0; 0) + F_{L,M}(x_r)\right|$ (пунктир) от размерного расстояния X_r в промежутке $1600 \le X_r \le 1650$ км.

Выбор постоянной a_M не является однозначным. Для всего промежутка $1600 \le X_r \le 1650$ км мы могли бы выбрать в качестве a_M середину интервала (ζ_6, ζ_5), положив $M = 6$, однако в этом случае возрастает модуль остатка. Это означает, что для рассматриваемой модели среды "оптимальное" число интерферирующих мод в группе равно пяти.

Сравнивая при $X_r = 1600$ км времена распространения каждой из первых пяти мод

$$t_0 = 1066.66661 \text{ с}, \quad t_1 = 1066.66609 \text{ с},$$
$$t_2 = 1066.66509 \text{ с},$$
$$t_3 = 1066.66359 \text{ с}, \quad t_4 = 1066.66159 \text{ с}$$

со временем распространения группы этих интерферирующих мод, формирующих осевую волну

$$t_{\text{ax}} = 1066.66668 \text{ с},$$

мы видим, что группа интерферирующих мод приходит в точку наблюдения одновременно с самой медленной модой.

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Во многих экспериментах по дальнему распространению звука источник и приемник располагаются вблизи оси волновода. На графиках акустической интенсивности, как функции времени и глубины гидрофона, за ранними приходами, которые хорошо описываются формулами геометрической акустики, следует всплеск энергии, которая распространяется вдоль оси. Этот всплеск энергии невозможно описать используя формулы геометрической акустики из-за наличия вблизи оси волновода многочисленных каустик с каустическими клювами. Интерференция волновых полей, соответствующих лучам, расположенным вблизи этих каустик, приводит к образованию особой "осевой" волны, которая распространяется вдоль оси волновода. Интегральное представление осевой волны имеет разный вид в анормальном и нормальном волноводах. В анормальном волноводе первым в точку приемника приходит возмущение, которое распространяется непосредственно вдоль оси волновода, и только затем регистрируются волны, соответствующие лучам, пересекающим ось волновода то или иное число раз. В нормальном волноводе ситуация противоположная.

Имеется и другое хорошо известное представление акустического поля, содержащее распространяющиеся и затухающие моды. В настоящей статье изучается соотношение между первыми модами и осевой волной в нормальном волноводе. Наряду с представлением акустического поля в виде суммы лучевых слагаемых и осевой волны, в статье получено еще одно представление. Оно включает сумму нормальных мод, лучевые слагаемые и остаток. Сравнивая эти два представления, показано, что осевая волна, с точностью до остаточного члена, может быть выражена в виде суммы определенной группы нормальных мод. Этот вывод подтверждают и численные результаты, полученные для волновода с каноническим профилем скорости звука на частоте 200 Гц для расстояний [1600; 1650] км.

Для рассмотренной модели осевая волна представляется группой первых 5 или 6 нормальных мод плюс остаток. Требование минимизации остатка определяет "оптимальный" выбор числа нормальных мод, которое равно 5. Количество нормальных мод в группе, формирующей осевую волну, зависит от частоты, расстояния и свойств волновода около оси звукового канала. Сравнение времен прихода первых пяти нормальных мод со временем прихода осевой волны показывает, что осевая волна приходит практически одновременно с самой медленной модой. Таким образом, используя представление осевой волны в виде суммы первых нормальных мод и остатка, удается выделить группу мод, кото-

рые регистрируются в точке наблюдения как "единое" возмущение, время прихода которого практически совпадает со временем прихода самой медленной моды.

Следует отметить, что для интерпретации результатов натурных экспериментов по дальнему распространению звука в океане на дистанциях порядка тысячи и более километров необходимо использовать более реалистичную модель среды, принимающую во внимание флуктуации скорости звука, порожденные случайными внутренними волнами. Эти флуктуации сами по себе слабы, но на больших расстояниях их влияние накапливается, что приводит к сильному искажению пространственно-временной структуры поля по сравнению со случаем плоскослоистого подводного звукового канала [19–25]. Поэтому, если говорить о непосредственном использовании полученных в статье результатов для анализа экспериментальных данных, то это возможно для дистанций, не превышающих тысячу километров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tindle C.T., Guthrie K.M.* Rays and interfering modes in underwater acoustics // J. Sound Vibr. 1974. V. 34. P. 291–295.
2. *Guthrie K.M., Tindle C.T.* Ray effects in the normal mode approach to underwater acoustics // J. Sound Vibr. 1976. V. 47. P. 403–413.
3. *Rutherford S.R.* An examination of multipath processes in a range dependent ocean environment within the context of adiabatic mode theory // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. V. 66. P. 1482–1486.
4. *Beilis A.* Convergence zone positions via ray-mode theory // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 68. Suppl. 1. P. 77.
5. *Felsen L.B.* Hybrid ray-mode fields in inhomogeneous waveguides and ducts // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 69. P. 352–361.
6. *Felsen L.B.* Addendum to hybrid ray-mode formulation in inhomogeneous waveguides and ducts // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 69. P. 1206–1207.
7. *Kamel A., Felsen L.B.* On the ray equivalent of a group of modes // J. Acoust. Soc. Amer. 1982. V. 71. P. 1445–1452.
8. *Алувэлья Д.С., Келлер Дж.В.* Точные и асимптотические представления звукового поля в стратифицированном океане // Распространение волн и подводная акустика: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. С. 20–75.
9. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
10. *Pearcey T.* The structure of an electromagnetic field in the neighborhood of a cusp of a caustic // Phil. Mag. 1946. V. 37. P. 311–317.
11. *Булдырев В.С.* Поле точечного источника в волноводе // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 65. С. 78–102.
12. *Grigorieva N.S., Fridman G.M.* Axial wave in long-range propagation in a range-independent ocean // J. Comp. Acoust. 2004. V. 12. P. 127–147.
13. *Филиппов В.Б.* Об одном методе расчета поля точечного источника в волноводе // Интерференционные волны в слоистых средах. Вып. 1. Л.: Наука, 1980. С. 146–156.
14. *Munk W.H.* Sound channel in an exponentially stratified ocean, with application to SOFAR // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 55. P. 220–226.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2: Пер. с англ. М.: Наука, 1974. 295 с.
16. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. Пер. с нем. М.: ИЛ, 1963. 466 с.
17. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1: Пер. с англ. М.: Наука, 1973. 294 с.
18. *Munk W.H., Worcester P.F., Wunsch C.* Ocean Acoustic Tomography. London: Cambridge U.P., 1995. 433 p.
19. *Colosi J.A., Flatté S.M.* Mode coupling by internal waves for multi-megameter acoustic propagation in the ocean // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 100. № 6. P. 3607–3620.
20. *Worcester P.F., Cornuelle B.D., Dzieciuch M.A., Munk W.H., Howe B.M., Mercer J.A., Spindel R.C., Colosi J.A., Metzger K., Birdsall T.G., Baggeroer A.B.* A test of basin-scale acoustic thermometry using a large-aperture vertical array at 3252 km range in the eastern North Pacific Ocean // J. Acoust. Soc. Am. 1999. V. 105. № 6. P. 3185–3201.
21. *Вировлянский А.Л., Любавин Л.Я., Стромков А.А.* Лучевой подход для анализа модовой структуры поля в переменном по трассе волноводе // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 5. С. 597–604.
22. *Beron-Vera F.J., Brown M.G., Colosi J.A., Tomsovic S., Virovlyansky A.L., Wolfson M.A., Zaslavsky G.M.* Ray dynamics in a long-range acoustic propagation experiment // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 114. № 3. P. 1226–1242.
23. *Вировлянский А.Л., Заславский Г.М.* Лучевой и волновой хаос в задачах о дальнем распространении звука в океане // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 3. С. 329–345.
24. *Макаров Д.В., Коньков Л.Е., Улейский М.Ю.* Соответствие между лучевой и волновой картинами и подавление хаоса при дальнем распространении звука в океане // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 3. С. 439–450.
25. *Virovlyansky A.L., Kazarova A.Yu., Lyubavin L.Ya.* Ray-based description of normal modes in a deep ocean acoustic waveguide // J. Acoust. Soc. Am. 2009. V. 125. № 3. P. 1362–1373.