

ФОКУСИРОВКА ВОЛНОВОГО ПУЧКА В ПОДВОДНОМ ЗВУКОВОМ КАНАЛЕ

© 2011 г. А. Л. Вировлянский, А. Ю. Казарова, Л. Я. Любавин

Институт прикладной физики РАН

603950 Н. Новгород, ул. Ульянова 46

E-mail: viro@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 04.04.11 г.

Обсуждается использование излучающей вертикальной антенны для формирования волнового пучка, распространяющегося в подводном звуковом канале вдоль траектории опорного луча. Предложен метод выбора начального поля на апертуре антенны для максимального сжатия пучка в заданной окрестности опорного луча. Получены оценки, показывающие, до каких предельных дистанций пучок может распространяться, оставаясь узким по сравнению с интервалом глубин между горизонтами поворота. Исследован вопрос о том, на каких расстояниях от антенны пучок еще можно эффективно сфокусировать в окрестность выбранной точки опорного луча.

Ключевые слова: подводный звуковой канал, вертикальная антенна, волновой пучок, фокусировка.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию вопроса об использовании излучающей вертикальной антенны для выборочного освещения участков подводного звукового канала (ПЗК). Один из аспектов этой проблемы рассмотрен в работах [1, 2], где поставлена и решена вариационная задача о формировании звукового пучка, распространяющегося вдоль заданного опорного луча с минимально возможным расплыванием. Оптимальным выбором начального поля на апертуре антенны минимизируется средняя ширина пучка на трассе заданной длины. Вопрос о формировании медленно расплывающихся пучков исследовался также в работах [3, 4].

Другая задача, связанная с выборочным освещением отдельных участков ПЗК, заключается в фокусировке поля в окрестностях заданной точки водной толщи [5–7]. Для ее решения обычно используется метод обращения времени, который в случае монохроматического распределенного источника сводится к обращению волнового фронта.

В данной статье показано, что метод, развитый в работах [1, 2], легко обобщается таким образом, что его можно применить не только для минимизации средней ширины пучка по всей трассе, но и для максимального сужения пучка в любом конечном интервале дистанций. В предельном случае этот метод может быть использован для решения задачи о фокусировке пучка в окрестностях заданной точки опорного луча.

Получив формальное решение вариационной задачи, мы анализируем границы его применимости. Здесь сформулирован простой критерий, поз-

воляющий ответить на вопрос о том, до каких дистанций звуковой пучок может распространяться вдоль заданного опорного луча, оставаясь узким по сравнению с интервалом глубин между горизонтами поворота лучевой траектории. Аналогичный критерий получен для оценки дистанций, на которых пучок еще можно эффективно сфокусировать в окрестность заданной точки волновода.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается возбуждение звукового поля в плоскостром волноводе с помощью антенны, представляющей собой вертикальную нить. Комплексная амплитуда поля обладает цилиндрической симметрией и выражается функцией $u(r, z)$, где z — глубина, а r — расстояние от антенны (она расположена вдоль линии $r = 0$) в горизонтальной плоскости. Предполагается, что ось z направлена вертикально вниз и свободная поверхность воды находится на уровне $z = 0$. Таким образом, задача является двумерной и речь идет о формировании пучка, слабо расплывающегося в вертикальной плоскости (r, z) . Такой пучок в волноводе может распространяться лишь вдоль траектории некоторого луча, который мы будем называть опорным. Поле скорости звука c определяется не зависящим от дистанции вертикальным профилем $c(z)$.

Для описания пучка будем пользоваться малоугловым приближением, в рамках которого ком-

плесная амплитуда звукового поля подчиняется параболическому уравнению [8, 9]

$$2ik \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2k^2 U(z)u = 0, \quad (1)$$

где

$$U(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_0^2}{c^2(z)} \right),$$

c_0 — некоторая постоянная скорость, $k = 2\pi f/c_0$, f — несущая частота. Это уравнение следует решать с начальным условием $u(0, z) = u_0(z)$.

Полная излучаемая мощность ограничена условием нормировки

$$\int dz |u_0(z)|^2 = 1. \quad (2)$$

Здесь и далее в интегралах по z с не указанными явно пределами интегрирование идет по всему вертикальному сечению волновода. Параболическое уравнение (1) имеет форму уравнения Шредингера [10]. В этой аналогии расстояние r играет роль времени, а $u(r, z)$ играет роль волновой функции. Аналогом условия сохранения нормировки волновой функции является тот факт, что при любом r из (2) следует

$$\int dz |u(r, z)|^2 = 1. \quad (3)$$

В приближении геометрической оптики решение уравнения (1) выражается через параметры лучевых траекторий. Для описания последних будем пользоваться гамильтоновым формализмом, в рамках которого траектория в каждой точке дистанции r характеризуется своей координатой z и обобщенным импульсом (далее для краткости просто импульсом) $p = \text{tg } \chi$, где χ — угол скольжения луча. В малоугловом приближении Гамильтониан имеет вид

$$H(p, z) = \frac{p^2}{2} + U(z),$$

а траектория задается уравнениями Гамильтона $dz/dr = p$, $dp/dr = -dU(z)/dz$. Их решения $z(r, p_0, z_0)$ и $p(r, p_0, z_0)$ выражают зависимости параметров луча p и z от дистанции r , а также от p_0 и z_0 — начальных (при $r = 0$) значений импульса и глубины луча, соответственно. Начальные значения импульса и координаты опорного луча обозначим \bar{p}_0 и \bar{z}_0 .

Эффективную поперечную ширину звукового пучка Δ на расстоянии r определим выражением

$$\Delta^2(r) = \int dz (z - Z(r))^2 |u(r, z)|^2, \quad (4)$$

где $Z(r) = z(r, \bar{p}_0, \bar{z}_0)$ — траектория опорного луча. При введении этого определения учтено условие нормировки (3). В работах [1, 2] решена задача об оптимальном выборе начального поля $u_0(z)$ для минимизации средней ширины пучка $\bar{\Delta}$ в интервале

дистанций $0 < r < L$. Величина $\bar{\Delta}$ определена соотношением

$$\bar{\Delta}^2 = \frac{1}{L} \int_0^L dr \Delta^2(r). \quad (5)$$

Начальная ширина пучка фиксирована условием $\Delta(0) = a$, то есть

$$\int dz (z - z_0)^2 |u_0(z)|^2 = a^2. \quad (6)$$

При этом формально считается, что антенна покрывает весь волновод. Масштаб a совместно с предположением, что начальное поле сосредоточено в окрестностях точки z_0 , определяет эффективный (конечный) размер излучающей апертуры. В [2] аналогичная задача решена также и для ситуации, когда начальное поле отлично от нуля лишь на апертуре антенны, представляющей собой отрезок оси z конечной длины с центром в точке \bar{z}_0 .

Таким образом, в статьях [1, 2] показано, каким образом можно сформировать пучок, средняя ширина которого на трассе длиной L меньше, чем у любого другого пучка с такой же начальной шириной и распространяющегося вдоль того же опорного луча. Решение этой задачи получено минимизацией функционала (5) с соответствующим ограничением на начальную ширину пучка.

В данной работе мы обсуждаем обобщение этого подхода путем замены минимизируемого функционала (5) на

$$\bar{\Delta}^2 = \frac{1}{L} \int_0^L dr W(r) \Delta^2(r), \quad (7)$$

где $W(r)$ — неотрицательная весовая функция. Введение весового множителя расширяет возможности метода, так как теперь мы можем накладывать более сложные требования на ширину пучка. Например, выбирая функцию $W(r)$, принимающую максимальное значение в точке $r = L_1$ ($0 < L_1 < L$), мы можем добиться сужения пучка в окрестностях данной дистанции. В предельном случае $W(r) = \delta(r - L)$ задача сводится к фокусировке поля в точке волновода ($L, Z(L)$), то есть к той задаче, которая рассмотрена в работах [5–7].

РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В БЕЗАБЕРРАЦИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В работах [1, 2] аналитическое решение задачи о минимизации функционала (5) с ограничением (6) получено в рамках так называемого безабберационного приближения [11–13]. В этом приближении предполагается, что ширина пучка, которая велика по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ (иначе пучок не может быть медленно расплывающимся), в то же время мала по сравнению с характерным масштабом функции $U(z)$. В окрестностях опорного лу-

ча $Z(r)$ зависимость U от z аппроксимируется квадратичным полиномом:

$$U(z) \approx U(Z(r)) + U_z(Z(r))\zeta + \frac{1}{2}U_{zz}(Z(r))\zeta^2,$$

где $\zeta = z - Z$, $U_z(z) = dU(z)/dz$ и $U_{zz}(z) = d^2U(z)/dz^2$. В безабберационном приближении параболическое уравнение кардинально упрощается и может быть решено аналитически [11–13]. Поле пучка выражается через производные траектории опорного луча по начальным параметрам

$$\sigma_1(r) = \left. \frac{\partial z(r, \bar{p}_0, z_0)}{\partial z_0} \right|_{z_0=\bar{z}_0}, \quad \sigma_2(r) = \left. \frac{\partial z(r, p_0, \bar{z}_0)}{\partial p_0} \right|_{p_0=\bar{p}_0}. \quad (8)$$

Функции $\sigma_1(r)$ и $\sigma_2(r)$ являются линейно независимыми решениями уравнения

$$\ddot{\sigma} + \Phi(r)\sigma = 0,$$

где $\Phi(r) = U_{zz}(Z(r))$, с начальными условиями $\sigma_1(0) = 1$, $\dot{\sigma}_1(0) = 0$, $\sigma_2(0) = 0$ и $\dot{\sigma}_2(0) = 1$. Здесь и далее точка над символом означает производную по r . Решение уравнения (1) с начальным условием $u(0, z) = u_0(z)$ в безабберационном приближении имеет вид

$$u(r, z) = w(r, \zeta) \exp(ikS(r) + ik\dot{Z}(r)\zeta), \quad (9)$$

где

$$S(r) = \int_0^r \left[\frac{\dot{Z}^2}{2} - U(Z(r)) \right] dr \quad (10)$$

– эйконал опорного луча,

$$w(r, \zeta) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i |\sigma_2|}} \int d\zeta_0 u_0(\bar{z}_0 + \zeta_0) \times \exp \left[\frac{ik}{2\sigma_2} (\dot{\sigma}_2 \zeta^2 - 2\zeta \zeta_0 + \sigma_1 \zeta_0^2) \right]. \quad (11)$$

Подстановка этого выражения в (5) позволяет явно выразить ширину пучка $\bar{\Delta}$ в виде функционала от начального поля $u_0(z)$. В [1, 2] показано, что задача минимизации данного функционала с ограничениями (2) и (6) формально совпадает с квантовомеханической задачей об отыскании так называемого когерентного состояния, то есть состояния с минимальной неопределенностью [10]. Эта задача имеет хорошо известное аналитическое решение.

Несложный анализ показывает, что точно таким же образом вариационная задача решается и после замены функционала (5) на (7). Опуская конкретные выкладки, которые практически полностью повторяют те, что были использованы в работах [1, 2], приведем искомое выражение для начального поля $u_0(z)$, минимизирующего функционал (7) с ограничениями (2) и (6):

$$u_0(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi a^2}} \times \exp \left(-\frac{(z - \bar{z}_0)^2}{4a^2} - \frac{ik(z - \bar{z}_0)^2}{2R} + ik\bar{p}_0(z - z_0) \right), \quad (12)$$

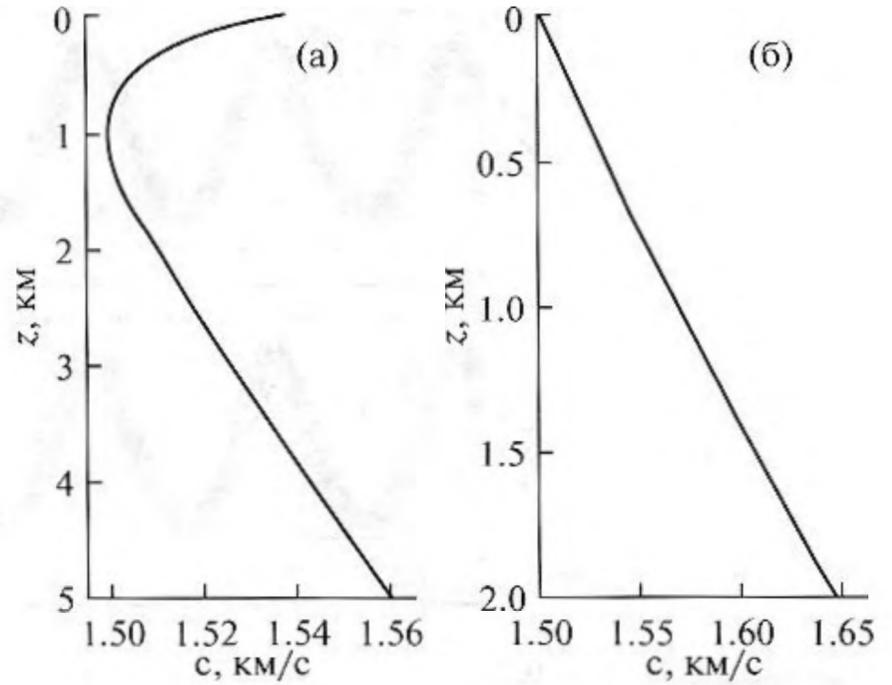


Рис. 1. Примеры типичных профилей скорости звука $c(z)$ в глубоководных ПЗК: (а) – канонический профиль (17); (б) – линейный профиль (18).

где

$$R = \frac{\int_0^L dr W(r) \sigma_2^2(r)}{\int_0^L dr W(r) \sigma_1(r) \sigma_2(r)}. \quad (13)$$

Подставляя это выражение в (11) и вычисляя гауссов интеграл, находим, что, как и в случае $W = 1$, решением задачи оказывается гауссов пучок. Далее нам понадобится только амплитуда поля этого пучка

$$|u(r, z)| = \left(\frac{k}{|\sigma_2|} \right)^{1/2} \left\{ 2\pi a^2 \left[\frac{1}{4a^4} + k^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}^{-1/4} \times \exp \left\{ -\frac{k^2 (z - Z(r))^2}{4\sigma_2^2 \left[\frac{1}{4a^2} + (ak)^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \right]} \right\}. \quad (14)$$

Подставляя это выражение в (4), находим эффективную ширину пучка

$$\Delta = \frac{a}{\mu} \left[1 + \mu^2 \left(\frac{\sigma_2}{R} - \sigma_1 \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (15)$$

где

$$\mu = 2a^2 k |\sigma_2|^{-1}. \quad (16)$$

Для подтверждения применимости этой приближенной формулы далее будут рассмотрены примеры пучков в волноводах с двумя кардинально различающимися профилями скорости звука, показанными на рис. 1. На рис. 1а изображен так называемый канонический профиль (профиль Манка), заданный формулой [8]

$$c(z) = c_0 \left(1 + \varepsilon \left(e^{2(z-z_a)/B} - 2(z-z_a)/B - 1 \right) \right), \quad (17)$$

где $c_0 = 1.5$ км/с, $B = 1$ км, $z_a = 1$ км (глубина оси ПЗК) и $\varepsilon = 0.0057$. Он широко используется при мо-

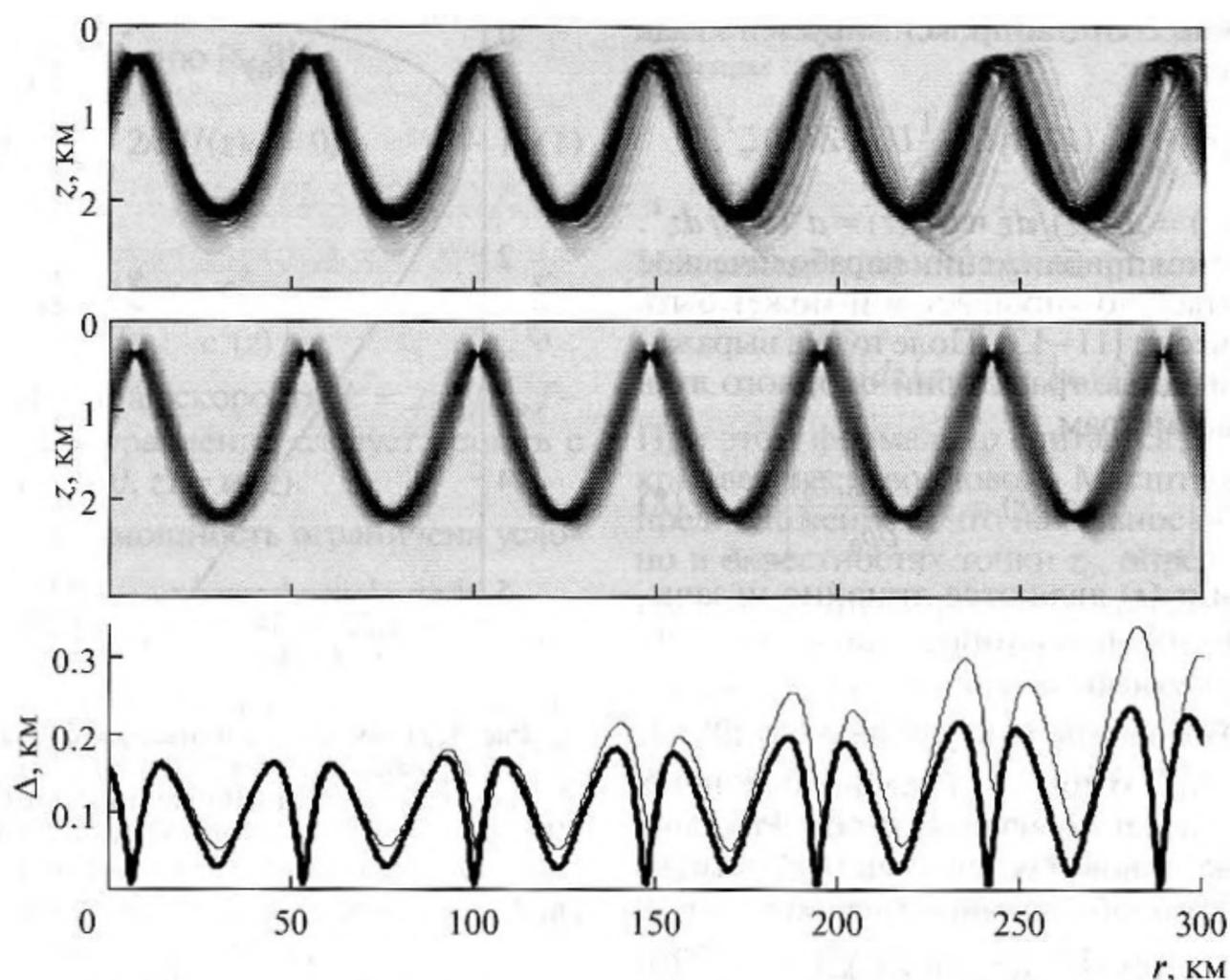


Рис. 2. Звуковой пучок в ПЗК с каноническим профилем скорости звука (17), распространяющийся вдоль опорного луча с углом скольжения на оси волновода $\chi = 7^\circ$. Начальное поле задано соотношением (12) с параметрами $a = 0.17$ км, $f = 250$ Гц, $R = \infty$, $\bar{z}_0 = 1$ км. *Вверху:* расчет методом нормальных мод. *В середине:* расчет в безабберационном приближении. *Внизу:* сопоставление ширины пучка Δ , рассчитанной методом нормальных мод (тонкая сплошная линия), и предсказания формулы (15) (осциллирующая жирная линия).

делировании звуковых полей в глубоком море. На рис. 1б показан линейный профиль скорости звука

$$c(z) = c_0(1 + \gamma z), \quad (18)$$

где $\gamma = 4.35 \times 10^{-2}$ 1/км. В этом случае ось ПЗК находится у поверхности, а $U(z) \approx \gamma z$.

В качестве первого примера на рис. 2 показан пучок в ПЗК с каноническим профилем скорости звука (17), распространяющийся вдоль опорного луча, выходящего с глубины $\bar{z}_0 = z_a$ под начальным углом скольжения $\chi_0 = \arctg p_0 = 7^\circ$. Расчет выполнен для следующих значений параметров задачи: параметр фокусировки $R = \infty$, несущая частота $f = 250$ Гц, $a = 0.17$ км. Результаты расчета амплитуды поля методом нормальных мод [14] (вверху) сопоставляются с предсказаниями формулы (14) (в середине). В нижней части рис. 2 ширина пучка Δ , найденная по формуле (15), сопоставлена с результатом прямого расчета по формуле (4) с $u(r, z)$, вычисленной методом нормальных мод. Как и следовало ожидать, ошибка безабберационного приближения увеличивается с дистанцией. На расстояниях около 300 км она достигает 20–30%.

Хотя выражения (12) и (13) дают формальное решение вариационной задачи при любых значениях параметров a , L и f , понятно, что далеко не всегда эти решения имеют реальный физический смысл. В

частности, параметр a должен удовлетворять условиям

$$\lambda \ll a \ll h,$$

где h — расстояние между точками поворота опорного луча. Эти условия гарантируют, что по крайней мере на начальном участке трассы пучок расплывается относительно слабо и озвученной оказывается лишь небольшая окрестность опорного луча. Вместе с тем ясно, что даже при оптимальном выборе параметра фокусировки R рано или поздно пучок все равно расплывется и заполнит весь интервал глубин между точками поворота опорного луча. Анализ границ применимости полученного решения вариационной задачи посвящен следующий раздел.

УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПУЧКА

Чтобы лучше понять, как ширина пучка Δ меняется с дистанцией, остановимся подробнее на функциях $\sigma_1(r)$ и $\sigma_2(r)$, определяющих правую часть (15). В свободном пространстве, где $U = 0$,

$$\sigma_1(r) = 1, \quad \sigma_2(r) = r. \quad (19)$$

В другом предельном случае, волноводе с

$$U(z) = \kappa^2(z - z_a)^2/2, \quad (20)$$

легко решив лучевые уравнения, получаем

$$\sigma_1(r) = \cos kr, \quad \sigma_2(r) = \kappa^{-1} \sin kr. \quad (21)$$

Функции $\sigma_1(r)$ и $\sigma_2(r)$ в волноводе с каноническим профилем скорости звука (17), показаны на рис. 3.

В большинстве волноводов функция $\sigma_2(r)$, а вместе с ней и ширина пучка, осциллирует с дистанцией, обращаясь в нуль в местах касания каустик опорным лучом. Относительно крутые лучи — опорный луч пучка на рис. 2 попадает в эту категорию — на трассах длиной, превышающей несколько периодов траектории, касаются каустик в окрестностях своих точек поворота. В этих местах ширина пучка заметно уменьшается, как это видно на рис. 2. Производная $|\partial z/\partial p_0| = |\sigma_2|$, а вместе с ней и ширина пучка, принимает наибольшие значения на глубинах близких к оси волновода z_a . Ситуация меняется для приосевых лучей с углами скольжения на оси ПЗК $\chi < 2-3^\circ$, для которых $U(z)$ можно аппроксимировать параболой (20). Ширина пучка, распространяющегося вдоль приосевого опорного луча, согласно (21), тоже осциллирует, но минимума она достигает не в окрестностях точек поворота, а на оси ПЗК, где приосевые лучи периодически фокусируются. Полагая, что глубина центра излучающей антенны $\bar{z}_0 = z_a$, оценим значения σ_1 и σ_2 в точках дистанции $r = ND(\chi)$, где $N = 1, 2, \dots$, а $D(\chi)$ — длина цикла опорного луча. На этих дистанциях пучок пересекает ось ПЗК. Воспользуемся тем, что в плоско-слоистом ПЗК гамильтониан H не меняется вдоль траектории луча (закон Снеллиуса в малоугловом приближении). Поэтому

$$\frac{p_0^2}{2} + U(z_0) = \frac{p^2}{2} + U(z).$$

Продифференцируем это равенство по p_0 и z_0 и примем во внимание, что в точке $z = z_a$ производная dU/dz равна нулю. Получаем $\partial p/\partial p_0 = p_0/p$ и $\partial p/\partial z_0 = 0$. Пользуясь теоремой Лиувилля

$$\frac{\partial p}{\partial p_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial p_0} \frac{\partial p}{\partial z_0} = 1,$$

находим, что на рассматриваемых дистанциях (в этих местах $p = p_0$) $\sigma_1 = \partial z/\partial z_0 = 1$. Из простых геометрических соображений следует, что в точке $r = ND$ имеет место соотношение $\sigma_2 = \partial z/\partial p_0 \approx \chi r D^{-1} \partial D/\partial \chi$. Здесь и далее мы ограничиваемся рассмотрением лучей с малыми углами скольжения. Для всех этих лучей, включая и те, которые мы называем относительно крутыми, $\chi \ll \pi/2$. Найденные таким образом значения σ_1 и σ_2 в точках $r = ND$ на рис. 3 показаны кружками. Значения параметра μ в указанных точках дистанции выражаются формулой

$$\mu = \frac{2a^2 k}{\chi r} \frac{D}{|dD/d\chi|}. \quad (22)$$

Будем считать, что пучок существует до тех пор, пока его ширина остается малой по сравнению с

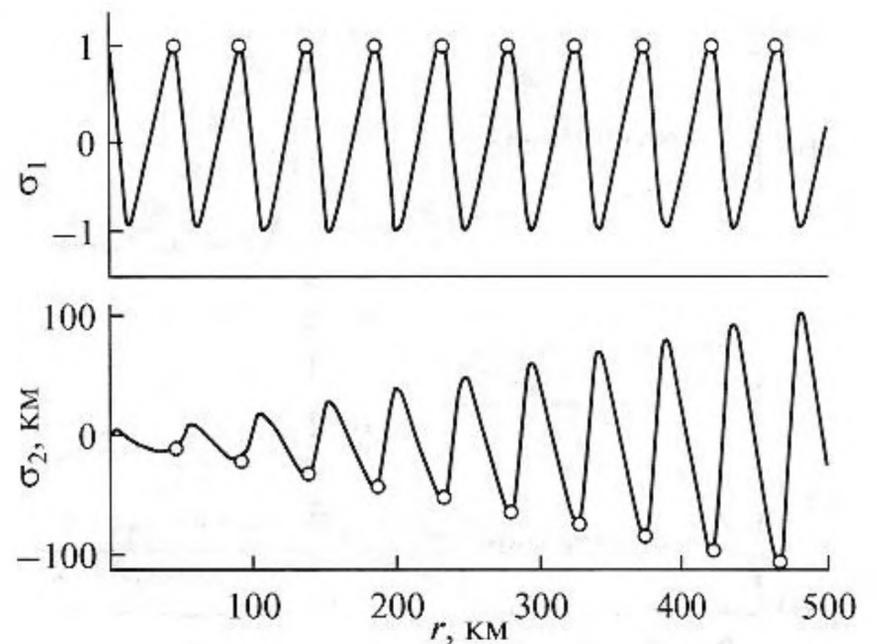


Рис. 3. Функции $\sigma_1(r)$ и $\sigma_2(r)$ в ПЗК с каноническим профилем скорости звука для опорного луча с углом скольжения на оси волновода $\chi = 7^\circ$. Кружками показаны значения σ_1 и σ_2 в точках дистанции кратных длине цикла опорного луча. В этих местах опорный луч пересекает ось волновода.

интервалом глубин между точками поворота опорного луча h . Для оценки дистанций, на которых это условие выполняется, рассмотрим ситуацию, когда $R = \infty$. На дистанции $r = ND$, на которой опорный луч пересекает ось волновода и $|\sigma_1| = 1$, ширина пучка равна a/μ . Заметим, что эта же величина служит оценкой ширины пучка при $R = \sigma_1/\sigma_2$, то есть при фокусировке пучка на данной дистанции. Условие существования пучка сформулируем в виде неравенства

$$v \gg 1, \quad (23)$$

где

$$v = \frac{\mu h}{a} \quad (24)$$

— отношение h к минимально возможной на данной дистанции ширине пучка. Решение вариационной задачи, описанное в разд. 3, имеет реальный смысл лишь для таких дистанций L , на которых условие (23) еще выполняется. Пользуясь малостью χ , в качестве оценки прием $h = \chi D/2$. Подставляя (22) в (24), получаем

$$v = \frac{akD^2}{r|dD/d\chi|}. \quad (25)$$

В левой части рис. 4 представлены зависимости параметра v , рассчитанные по этой формуле, от угла скольжения χ для трех существенно разных ПЗК. Это глубоководный ПЗК с каноническим профилем скорости звука (17) (рис. 1а), приповерхностный ПЗК с линейным профилем (18) (рис. 1б), а также однородный ПЗК с постоянной скоростью звука $c_0 = 1.5$ км/с и абсолютно отражающими границами. Глубина последнего $h = 300$ м одновременно является расстоянием между точками поворота лучей. Эти примеры в какой-то мере отражают раз-

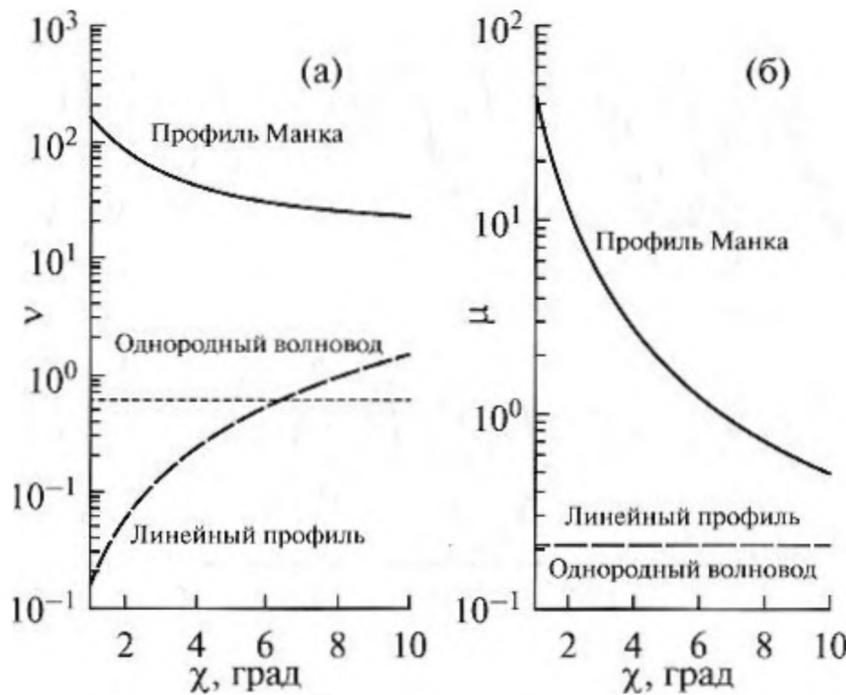


Рис. 4. Параметры ν (а) и μ (б) как функции угла скольжения опорного луча на оси ПЗК в трех волноводах. Расчеты выполнены по формулам (22) и (25) для $a = 0.1$ км, $f = 100$ Гц и $r = 100$ км.

нообразии профилей скорости звука, встречающихся в океане [8]. Во всех трех случаях расчет выполнен для несущей частоты $f = 100$ Гц, $a = 0.1$ км и $r = 100$ км. Поскольку f , a и r входят в (25) в виде простых множителей (напомним, $k = 2\pi f/c_0$), пересчет на другие значения этих параметров выполняется элементарно. Сплошная кривая на рис. 4а построена для волновода с профилем скорости звука (17). В случае линейного профиля (18) лучевые уравнения легко решаются аналитически, и мы получаем $D = 2\chi/\gamma$, $\mu = 2a^2k/r$, $\nu = 2ak\chi^2/(r\gamma)$. Указанная зависимость ν от χ на рис. 4а изображена пунктирной линией (длинный пунктир). В однородном волноводе зависимость ν от χ также легко вычисляется аналитически, и мы получаем $\nu = 2kah/r$ (короткий пунктир). Представленные графики показывают, что характерные расстояния, на которых волновой пучок может распространяться в ПЗК разного типа, оставаясь относительно узким, вообще говоря, кардинально различаются. Если в волноводе с каноническим профилем скорости звука пучок с начальной шириной порядка 100 метров на частотах порядка 100 Гц может распространяться на сотни километров, то в приповерхностном волноводе речь в лучшем случае может идти лишь о десятках километров.

Заметим, что использование формулы (25) для приосевых лучей, для которых $U(z)$ аппроксимируется параболой (20), не имеет смысла. Ведь ширина пучка, распространяющегося вдоль приосевого луча, на оси волновода принимает не максимальное, а, наоборот, минимальное значение.

ФОКУСИРОВКА ПУЧКА В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ ОПОРНОГО ЛУЧА

Согласно формуле (15) для фокусировки пучка в точке $(\bar{r}, Z(\bar{r}))$ следует выбрать $R = \sigma_2(\bar{r})$. Тот же результат следует из формулы (13) при $W(r) = \delta(r - \bar{r})$. Такой выбор R приводит к заметному сужению пучка по сравнению со случаем, когда $R = \infty$ (локально плоская волна), если

$$\mu \gg 1. \quad (26)$$

Данное условие означает, что точка $(\bar{r}, Z(\bar{r}))$ опорного луча, в которую мы хотим сфокусировать пучок, находится в прожекторной (ближней) зоне антенны. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся формулой

$$u(r, z) = \int dz_0 G(r, z, z_0) u_0(z_0), \quad (27)$$

где $G(r, z, z')$ — функция Грина уравнения (1). В приближении геометрической оптики

$$G(r, z, z_0) = A(r, z, z_0) e^{ikS(r, z, z_0)}, \quad (28)$$

где A и S — соответственно амплитуда и эйконал луча, соединяющего точки $(0, z_0)$ и (r, z) . Импульсы этого луча в начале и конце траектории — p и p_0 соответственно — связаны с эйконалом хорошо известными соотношениями [15]

$$\partial S(r, z, z_0)/\partial z = p, \quad \partial S(r, z, z_0)/\partial z_0 = -p_0. \quad (29)$$

Пользуясь этими формулами, представим эйконал в виде разложения

$$S(r, z, z_0) = S(r, z, \bar{z}_0) + S_{z_0}(r, z, \bar{z}_0)(z_0 - \bar{z}_0) + \frac{1}{2} S_{z_0 z_0}(r, z, \bar{z}_0)(z_0 - \bar{z}_0)^2 + O((z_0 - \bar{z}_0)^3), \quad (30)$$

где нижний индекс z_0 означают частную производную функции $S(r, z, z_0)$ по этому параметру. Из (8) и (29) следует

$$S_{z_0}(r, z, \bar{z}_0) = -\bar{p}_0, \\ S_{z_0 z_0}(r, z, \bar{z}_0) = -\frac{\partial z(r, p_0, z_0)/\partial z_0}{\partial p(r, p_0, z_0)/\partial z_0} \Big|_{z_0=\bar{z}_0, p_0=\bar{p}_0} = -\frac{\sigma_1(r)}{\sigma_2(r)}.$$

Предположим, что эффективная апертура антенны достаточно мала, чтобы слагаемыми $O((z_0 - \bar{z}_0)^3)$ в показателе экспоненты можно было пренебречь, а также пренебречь изменениями z_0 в предэкспоненциальном множителе. Кроме того, будем считать, что антенна формирует начальное поле (12) с $R = \infty$ (излучается локально плоская волна). Подставив (30) и (28) в (27), получаем

$$u(r, z) = Q \int dz_0 \exp \left[-\frac{(z - \bar{z}_0)^2}{4a^2} - i \frac{k \sigma_1(r)}{2 \sigma_2(r)} (z_0 - \bar{z}_0)^2 \right],$$

где Q — амплитудный множитель, явный вид которого для нас не важен. Отсюда видно, что величину

$$\rho_F = \sqrt{\frac{2\pi |\sigma_2(r)|}{k |\sigma_1(r)|}} \quad (31)$$

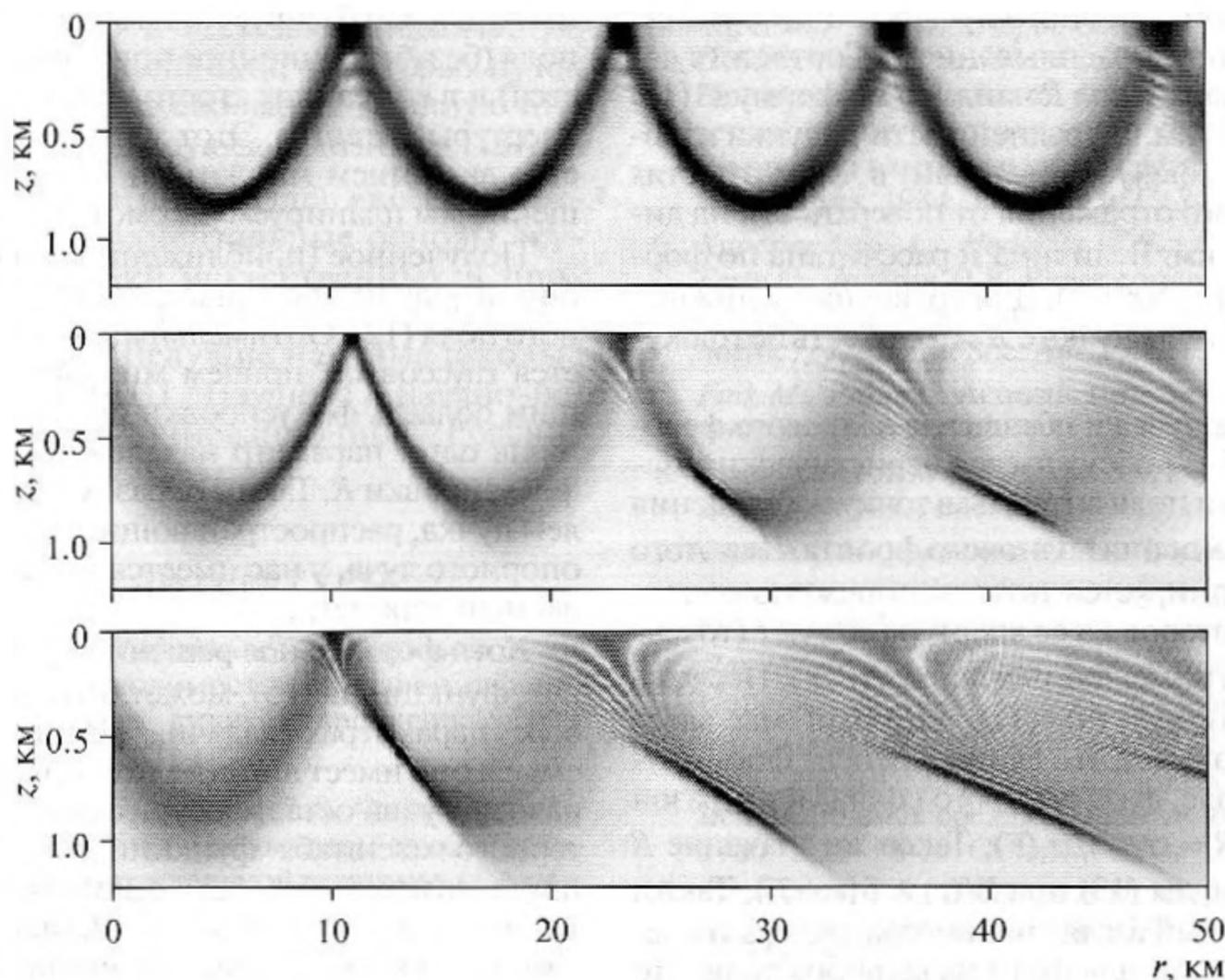


Рис. 5. Звуковой пучок в ПЗК с линейным профилем скорости звука (18), распространяющийся вдоль опорного луча с углом скольжения на оси волновода (у поверхности) 12° . Начальное поле пучка задано соотношением (12) при $f = 250$ Гц, $a = 0.13$ км, $\bar{z}_0 = 0.3$ км. *Вверху:* $R = 5.9$ км; пучок с минимальной средней шириной на трассе $L = 50$ км. *В середине:* $R = 11$ км; пучок сфокусирован в точку первого выхода к поверхности (на дистанции $r = 11$ км). *Внизу:* $R = \infty$.

можно интерпретировать как радиус первой зоны Френеля поля, которое источник, помещенный в точку наблюдения, создал бы на антенне. Принимая во внимание (16), находим

$$\mu = 4\pi \left(\frac{a}{\rho_F} \right)^2.$$

Отсюда следует, что неравенство (26) выполняется, если радиус первой зоны Френеля много меньше эффективной апертуры антенны. Это и означает, что точка фокусировки находится в прожекторной (ближней) зоне антенны. Заметим, что в однородном волноводе пучок расплывается по тому же закону, что и в свободном пространстве. Подставляя (19) в (31), как и должно быть, получаем $\rho_F = \sqrt{\lambda r}$. Легко проверить, что для малых χ в этом волноводе $\mu = 2a^2 k/r$. При этом неравенство (26) переходит в $r \ll ka^2$ — хорошо известное условие, определяющее границу ближней зоны в свободном пространстве.

В неоднородном волноводе σ_1 и σ_2 , а вместе с ними и ρ_F и параметр μ , являются осциллирующими функциями расстояния r . Поэтому, вообще говоря, ближние зоны (малые ρ_F) чередуются с дальними зонами, внутри которых значения ρ_F велики. Как и в случае с параметром ν , наше внимание в

данной работе сосредоточено на анализе параметра μ в местах пересечения пучком оси ПЗК.

На рис. 4б изображены зависимости μ на оси ПЗК от угла скольжения χ для тех же трех волноводов, что и на рис. 4а, и при тех же значениях параметров f , a и r . Поскольку выражения для μ в однородном волноводе и волноводе с линейным профилем скорости звука совпадают, на этом графике присутствуют лишь две кривые. Они показывают, что при использовании антенны с апертурой порядка 100 м и работе на частотах порядка 100 Гц эффективная фокусировка пучка в окрестность заданной точки, даже в хорошо фокусирующем волноводе с каноническим профилем скорости звука (17) возможна лишь на относительно коротких трассах порядка 10 км.

Для иллюстрации эффективности обсуждаемого метода управления полем пучка на рис. 5 представлены результаты численного расчета поля методом нормальных мод в волноводе с линейным профилем скорости звука (рис. 2б) на несущей частоте 250 Гц. Начальное поле, заданной формулой (12), определяет звуковой пучок, распространяющийся вдоль опорного луча, выходящего с глубины $\bar{z}_0 = 0.3$ км под углом скольжения $\chi = 12^\circ$, $a = 0.13$ км. В верхней части изображен пучок, распространяющийся

вдоль выбранного опорного луча до 50 км с минимально возможным расплыванием. Соответствующее значение параметра R найдено по формуле (13) с $W = 1$ и $L = 50$ км. В средней части рисунка изображен пучок, сфокусированный в окрестностях точки его первого отражения от поверхности на дистанции $\bar{r} = 11$ км. Величина R рассчитана по формуле (13) с $W(r) = \delta(r - \bar{r})$. Для сравнения в нижней части показано поле пучка с $R = \infty$, то есть без фокусировки.

Фокусировка пучка и обращение волнового фронта. В работах [5–7] обсуждается эвристический метод фокусировки поля антенны в точку наблюдения (\bar{r}, \bar{z}) путем обращения волнового фронта. Для этого на антенне формируется поле, комплексно сопряженное тому, которое на ее апертуре создает (точечный) источник, помещенный в точку (\bar{r}, \bar{z}) . Несложный анализ формул (9)–(11), который мы здесь опускаем, показывает, что данный рецепт формирует начальное поле, фаза которого совпадает с фазой поля (12) при $R = \sigma_2(\bar{r})/\sigma_1(\bar{r})$. Такое же значение R следует из формулы (13) при $W(r) = \delta(r - \bar{r})$. Таким образом, на первый взгляд наш метод дает фактически тот же результат для фазы начального поля, что и метод обращения волнового фронта. Это, однако, не так, если имеются несколько лучей, соединяющих центр антенны $(0, \bar{z}_0)$ и точку (\bar{r}, \bar{z}) , в которую мы хотим сфокусировать пучок. Дело в том, что наш подход, в принципе, нацелен на формирование относительно узкого пучка, распространяющегося вдоль выбранного луча. Применение метода обращения волнового фронта приведет к формированию суперпозиции пучков, распространяющихся по всем лучам, соединяющим точки $(0, \bar{z}_0)$ и (\bar{r}, \bar{z}) . При этом суммарное звуковое поле в общем случае не будет иметь форму пучка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показано, что метод формирования звукового пучка с минимальной расходимостью, предложенный в статьях [1, 2], легко обобщается путем введения дополнительного множителя $W(r)$ в подлежащий минимизации функционал (5). Эта модификация позволяет оптимальным образом формировать не только пучки с минимальной средней шириной, как это было в первоначальном варианте, но и добиваться максимального сужения пучка на заданных участках траектории опорного луча.

Здесь мы ограничились анализом простейшего варианта метода, в котором (i) задача решается в безабберационном приближении и (ii) начальное поле формально считается распределенным по всему вертикальному сечению волновода, а конечность излучающей апертуры приближенно учитывается введением ограничения (6). В [2] предложен более строгий метод минимизации средней шири-

ны пучка. Он базируется на модовом представлении поля (безабберационное приближение не используется) и в его рамках строго учитывается конечность апертуры антенны. Этот метод тоже легко обобщается введением множителя $W(r)$ в (5). Такое обобщение мы планируем рассмотреть в другой работе.

Полученное (приближенное) решение вариационной задачи представлено формулой для начального поля (12). Оптимальный пучок всегда оказывается гауссовым, причем множителем $W(r)$, задающим область фокусировки пучка, определяет всего лишь один параметр начального поля — параметр фокусировки R . Таким образом, для управления полем пучка, распространяющимся вдоль выбранного опорного луча, у нас имеется всего один перестраиваемый параметр.

Хотя формальное решение $u_0(z)$, минимизирующее функционал (5), может быть получено при любых параметрах задачи, реальный физический смысл оно имеет лишь до тех пор, пока поперечный размер пучка остается существенно меньше характерного масштаба функции $c(z)$. Это нужно для применимости безабберационного приближения. Кроме того, возникают естественные вопросы о том, (i) до каких дистанций ширина пучка остается малой по сравнению с интервалом глубин между точками поворота опорного луча и (ii) на каких расстояниях от антенны еще возможна эффективная фокусировка пучка окрестность заданной точки опорного луча. Ответы на эти вопросы даются условиями (23) и (26).

Ширина пучка Δ , как правило, является осциллирующей функцией расстояния r . Пучок сужается в тех местах, где опорный луч касается каустик. Исключение составляет однородный волновод, в котором уширение происходит монотонно, по тому же закону, что и в свободном пространстве. Обычно каустики расположены вблизи точек поворота опорного луча. Поэтому типичной является ситуация, когда пучок сужается вблизи точек поворота и уширяется в местах пересечения им оси ПЗК. Это, однако, не относится к пучкам, формируемым приосевыми лучами (см. замечание в конце разд. 4).

Для сравнительного анализа возможностей формирования медленно расплывающихся пучков и управления их формой в ПЗК с разными профилями скорости звука были получены простые аналитические выражения (22) и (25) для значений параметров μ и ν (фигурирующих в неравенствах (23) и (26)) в местах пересечения пучком оси ПЗК. Оба параметра выражаются через функцию $D(\chi)$, зависимость длины цикла луча от угла скольжения. Пользуясь формулами (22) и (25), легко делать количественные выводы о фокусирующих свойствах любого конкретного ПЗК. Формулы (23) и (25) определяют расстояния, на которых пучок, излученный антенной с заданной апертурой на заданной несущей частоте, еще остается узким по сравнению с интервалом глубин между горизонтами по-

ворота. Формулы (26) и (22) дают аналогичную оценку для интервала дистанций, на которых пучок можно эффективно сфокусировать в заданную точку опорного луча, находящуюся вблизи оси ПЗК.

Работа выполнена при поддержке программы ОФН РАН “Фундаментальные основы акустической диагностики искусственных и природных сред”, грантов РФФИ № 10-02-00228 и 11-05-00266, гранта “Ведущие научные школы” НШ-3700.2010.2 и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (контракт № 02.740.11.0565).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вировлянский А.Л., Нефедова Д.В.* Волновой пучок с минимальной расходимостью в плавно неоднородной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 2009. Т. 52. № 1. С. 46–54.
2. *Вировлянский А.Л., Нефедова Д.В.* Формирование узкого волнового пучка в подводном звуковом канале с помощью вертикальной антенны // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 1. С. 63–69.
3. *Morozov A.K., Colosi J.A.* Entropy and scintillation analysis of acoustic beam propagation through ocean internal waves // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 117. № 3. Pt. 2. P. 1611–1623.
4. *Петухов Ю.В., Хилько А.А.* Формирование, распространение и фокусировка пучков в океанических волноводах. Квазиоптическое приближение // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 5. С. 796–806.
5. *Даргейко М.М., Кравцов Ю.А., Петников В.Г., Петросян А.С., Самойленко Ю.И., Славинский М.М.* Применение принципа фазового сопряжения для решения задач оптимального управления волновыми полями в неоднородных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 6. С. 746–752.
6. *Kuperman W.A., Hodgkiss W.S., Song H.C., Akal T., Ferla C., Jackson D.R.* Phase conjugation in the ocean: Experimental demonstration of an acoustic time-reversal mirror // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 103. № 1. P. 25–40.
7. *Fink M., Prada C.* Acoustic time-reversal mirrors // Inverse Problems. 2001. V. 17. P. R1–R38.
8. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370 с.
9. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. М.: Наука, 1978. 464 с.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.
11. *Кондратьев И.Г., Пермитин Г.В., Смирнов А.И.* Распространение широких волновых пучков в плавно неоднородных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 10. С. 1195–1203.
12. *Пермитин Г.В., Смирнов А.И.* Квазиоптика плавно-неоднородных сред // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. № 3. С. 736–751.
13. *Власов С.Н., Таланов В.И.* Самофокусировка волн. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997. 220 с.
14. *Окомелькова И.А., Шерешевский И.А.* Расчет нормальных волн в слоистой среде. Препринт ИПФ АН СССР № 235. Горький. 1989. 36 с.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.