

УДК 534.26

## ПОТЕНЦИАЛЫ ДЕБАЯ И “ТИПА ДЕБАЯ” В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ, ИЗЛУЧЕНИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН

© 2012 г. А. А. Клещев

С.-Петербургский государственный морской технический университет

19008 С.-Петербург, ул. Лоцманская 3

E-mail: alexalex-2@yandex.ru

Поступила в редакцию 09.05.2011 г.

Рассмотрены различные представления векторного потенциала  $\vec{A}$  вектора смещения  $\vec{u}$  упругих (изотропных и анизотропных) тел и сред через потенциалы Дебая и “типа Дебая”. На основе такого искусственного приема решен целый класс трехмерных задач дифракции, излучения и распространения упругих волн. Аналитические решения дополнены расчетами на ЭВМ для трехмерной задачи дифракции на упругом теле сфероидальной формы.

*Ключевые слова:* дифракция, потенциал Дебая, излучение, распространение, трехмерная задача.

Впервые Дебай предложил разложение векторного потенциала  $\vec{A}$  на скалярные потенциалы  $U$  и  $V$  в работе [1], посвященной изучению поведения световых волн вблизи точки или линии фокусировки. Позднее такой подход успешно был использован при решении задач дифракции электромагнитных волн на сфере, круглом диске и параболоиде вращения [2–7], а также дифракции продольных и поперечных волн на упругих телах сфероидальной формы [8, 9].

Применительно к задачам, базирующимся на динамической теории упругости, введение потенциалов Дебая происходит по следующей схеме. Вектор смещения  $\vec{u}$  упругой изотропной среды подчиняется уравнению Ламе:

$$(\lambda + \mu)\text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot rot } \vec{u} = -\rho \omega^2 \vec{u}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе,  $\rho$  — плотность изотропной среды,  $\omega$  — круговая частота гармонических колебаний. По теореме Гельмгольца вектор смещения  $\vec{u}$  представляется в виде скалярного потенциала  $\Phi$  и векторного потенциала  $\vec{A}$ :

$$\vec{u} = -\text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{A}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим для  $\Phi$  и  $\vec{A}$  два уравнения Гельмгольца — скалярное для  $\Phi$  и векторное для  $\vec{A}$ :

$$\Delta \Phi + h^2 \Phi = 0, \quad (3)$$

$$\Delta \vec{A} + k_2^2 \vec{A} = 0, \quad (4)$$

где  $h = \omega/c_1$  — волновое число упругой продольной волны,  $c_1$  — скорость этой волны,  $k_2 = \omega/c_2$  — волновое число упругой поперечной волны,  $c_2$  — скорость поперечной волны.

В скалярном уравнении (3) в трехмерном случае переменные разделяются в 11-ти координатных системах, что же касается уравнения (4), то из него в трехмерной задаче удастся получить три независимых уравнения для каждой из компонент векторной функции  $\vec{A}$  только в декартовой системе координат. Для преодоления этого препятствия и используются потенциалы Дебая  $U$  и  $V$ , подчиняющиеся скалярному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta V + k^2 V = 0; \quad \Delta U + k^2 U = 0. \quad (5)$$

Векторный потенциал  $\vec{A}$  (по Дебаю) следующим образом раскладывается с помощью потенциалов  $U$  и  $V$ :

$$\vec{A} = \text{rot rot}(\vec{R}U) + ik \text{rot}(\vec{R}V), \quad (6)$$

где  $\vec{R}$  — радиус-вектор точки упругого тела или упругой среды. Представление (6) для векторного потенциала  $\vec{A}$  не является единственным, остановимся на двух других с использованием потенциалов “типа Дебая”.

Во-первых, это потенциалы, предложенные Бухвальдом [10] при изучении поведения рэлеевской волны в трансверсально-изотропной среде. Вектор смещения  $\vec{u}$  в трансверсально-изотропной среде в соответствии с [10] представляется в виде:

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Psi} + \text{grad } \theta. \quad (7)$$

При этом полагается, что векторный потенциал  $\vec{\Psi}$  имеет только одну компоненту, отличную от нуля, а именно компоненту  $\Psi_z$ , а также: потенциал  $\Phi$  и  $\Psi_z = \Psi$  зависят только от координат  $x$  и  $y$ , а потен-

циал  $\theta$  — только от координаты  $z$ . Поэтому декартовые компоненты вектора смещения  $\vec{u}(u, v, w)$  примут вид [10]:

$$\begin{aligned} u &= (\partial\Phi/\partial x) + (\partial\Psi/\partial y); \\ v &= (\partial\Phi/\partial y) - (\partial\Psi/\partial x); \quad = \partial\theta/\partial z. \end{aligned} \quad (8)$$

Этот подход (с трансформацией декартовых координат в круговые цилиндрические) был использован в работе [11] при изучении фазовых скоростей упругих волн в трансверсально-изотропном цилиндрическом стержне: потенциалы  $\Phi$  и  $\Psi_z = \Psi$  в этом случае зависят от цилиндрических координат  $r$  и  $\phi$ , а потенциал  $\theta$  — от  $z$ . Это позволило автору [11] вычислить дисперсионные кривые фазовых скоростей в анизотропном (трансверсально-изотропном) цилиндрическом стержне.

Во-вторых, это потенциалы “типа Дебая”, предложенные авторами работы [12]. В этом случае векторный потенциал  $\vec{A}$  выражается через потенциалы “типа Дебая”  $\chi$  и  $\Psi$  следующим образом:

$$\vec{A} = \chi \vec{e}_z + a \operatorname{rot}(\Psi \vec{e}_z), \quad (9)$$

где  $\vec{e}_z$  — единичный вектор в направлении оси  $z$ ,  $a$  — радиус трансверсально-изотропного круглого цилиндрического стержня, находящегося в упругой среде. В результате использования разложения (9) авторы работы [12] вычислили характеристики рассеяния сдвиговых волн трансверсально-изотропным цилиндром, помещенным в изотропную эпоксидную матрицу.

Покажем эффективность использования потенциалов Дебая при решении трехмерной задачи дифракции на упругом сфероиде [9]. Трехмерная задача дифракции на упругом сфероидальном рассеивателе решается с помощью потенциалов Дебая  $U$  и  $V$ , через которые выражается векторная функция  $\vec{\Psi}$  в соответствии с представлением (6):

$$\vec{\Psi} = \operatorname{rotrot}(\vec{R}U) + ik_2 \operatorname{rot}(\vec{R}V). \quad (10)$$

Эффективность такого представления становится очевидной, если учесть, что потенциалы  $U$  и  $V$  подчиняются скалярному уравнению Гельмгольца. Удобно сначала записать компоненты  $\vec{\Psi}$  в сферической системе координат, выразив их через  $U, V$  и  $\vec{R}$ , а затем по формулам векторного анализа перейти к сфероидальным компонентам. Выражения для сферических компонент векторной функции  $\vec{\Psi}(\Psi_R, \Psi_\theta, \Psi_\phi)$  через потенциалы Дебая имеют следующий вид [9]:

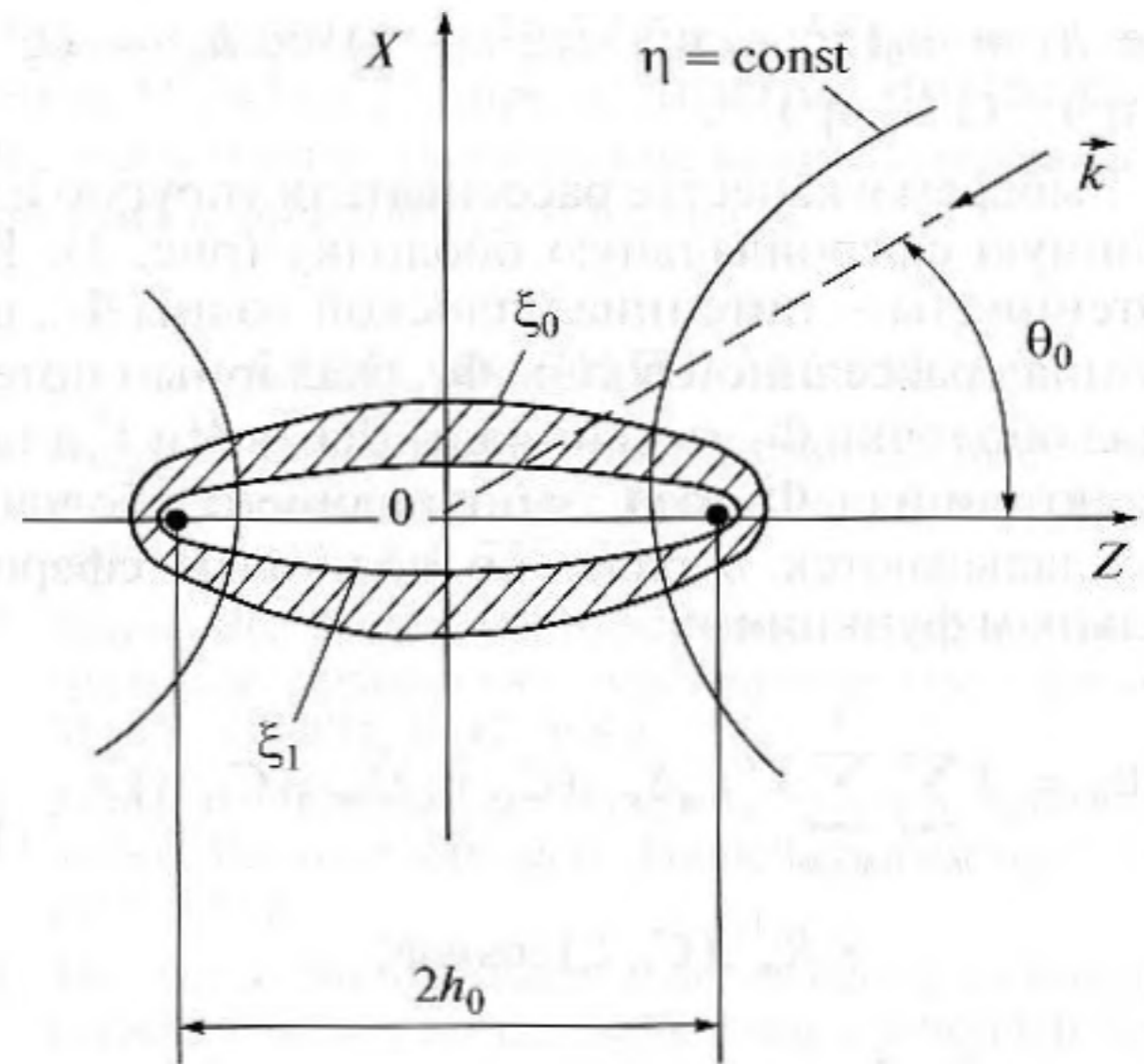


Рис. 1. Упругая сфероидальная оболочка в поле плоской гармонической волны.

$$\begin{aligned} \Psi_{\theta_1} &= [h_0(\xi^2 - 1 + \eta^2)]^{-1} [(\partial\xi/\partial\theta_1)(\partial\xi/\partial R) \times \\ &\times (\partial^2 B/\partial\xi^2) + (\partial\xi/\partial\theta_1)(\partial\eta/\partial R)(\partial^2 B/\partial\xi\partial\eta) + \\ &+ (\partial\xi/\partial R)(\partial\eta/\partial\theta_1)(\partial^2 B/\partial\xi\partial\eta) + (\partial\eta/\partial R) \times \\ &\times (\partial\eta/\partial\theta_1)(\partial^2 B/\partial\eta^2) + (\partial B/\partial\xi) \times \\ &\times (\partial^2 \xi/\partial R\partial\theta_1) + (\partial B/\partial\eta)(\partial^2 \eta/\partial R\partial\theta_1)] + \\ &+ ik_2(\sin\theta_1)^{-1}(\partial V/\partial\phi); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Psi_R &= (\partial\xi/\partial R)^2(\partial^2 B/\partial\xi^2) + 2(\partial\xi/\partial R)(\partial\eta/\partial R) \times \\ &\times (\partial^2 B/\partial\eta\partial\xi) + (\partial\eta/\partial R)^2(\partial^2 B/\partial\eta^2) + (\partial^2 \xi/\partial R^2) \times \\ &\times (\partial B/\partial\xi) + (\partial^2 \eta/\partial R^2)(\partial B/\partial\eta) + k_2^2 B; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Psi_\phi &= [(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} \sin\theta_1 h_0]^{-1} [(\partial\xi/\partial R) \times \\ &\times (\partial^2 B/\partial\xi\partial\phi) + (\partial\eta/\partial R)(\partial^2 B/\partial\eta\partial\phi)] - \\ &- ik_2[(\partial\xi/\partial\theta_1)(\partial V/\partial\xi) + (\partial\eta/\partial\theta_1)(\partial V/\partial\eta)], \end{aligned} \quad (13)$$

где  $B = h_0(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} U$ ;  $-1 \leq \eta \leq +1$ ;  $1 \leq \xi \leq +\infty$ .

Сфероидальные компоненты функции  $\vec{\Psi}(\Psi_\xi, \Psi_\eta, \Psi_\phi)$  будут равны [9]:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_\xi &= \Psi_R(h_0/h_\xi)\xi(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{-1/2} + \\ &+ \Psi_{\theta_1}(h_0/h_\xi)(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2}(\partial\theta_1/\partial\xi); \\ \Psi_\eta &= \Psi_R(h_0/h_\eta)\eta(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{-1/2} + \\ &+ \Psi_{\theta_1}(h_0/h_\eta)(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2}(\partial\theta_1/\partial\eta); \\ \Psi_\phi &\equiv \Psi_\phi. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где  $h_\xi = h_0(\xi^2 - \eta^2)^{1/2}(\xi^2 - 1)^{1/2}$ ;  $h_\eta = (\xi^2 - \eta^2)^{1/2}(1 - \eta^2)^{1/2}$ .

Выберем в качестве рассеивателя упругую изотропную сфероидальную оболочку (рис. 1). Все потенциалы — потенциал плоской волны  $\Phi_0$ , потенциал рассеянной волны  $\Phi_1$ , скалярный потенциал оболочки  $\Phi_2$ , потенциалы Дебая  $U$  и  $V$ , а также потенциал  $\Phi_3$  газа, заполняющего оболочку, раскладываются в ряды по волновым сфероидальным функциям:

$$\Phi_0 = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} i^{-n} \varepsilon_m \bar{S}_{m,n}(C_1, \eta_0) \bar{S}_{m,n}(C_1, \eta) \times \\ \times R_{m,n}^{(1)}(C_1, \xi) \cos m\varphi; \quad (15)$$

$$\Phi_1 = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} B_{m,n} \bar{S}_{m,n}(C_1, \eta) R_{m,n}^{(3)}(C_1, \xi) \cos m\varphi; \quad (16)$$

$$\Phi_2 = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} \bar{S}_{m,n}(C_1, \eta) \cos m\varphi [C_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(C_1, \xi) + \\ + D_{m,n} R_{m,n}^{(2)}(C_1, \xi)]; \quad (17)$$

$$\Phi_3 = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} E_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(C_2, \xi) \bar{S}_{m,n}(C_2, \eta) \cos m\varphi; \quad (18)$$

$$U = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} \bar{S}_{m,n}(C_1, \eta) \sin m\varphi [F_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(C_1, \xi) + \\ + G_{m,n} R_{m,n}^{(2)}(C_1, \xi)]; \quad (19)$$

$$V = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} \bar{S}_{m,n}(C_1, \eta) \cos m\varphi [H_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(C_1, \xi) + \\ + I_{m,n} R_{m,n}^{(2)}(C_1, \xi)]; \quad (20)$$

где  $C_l = k_l h_0$ ;  $C_t = k_t h_0$ ;  $C_1 = k h_0$ ,  $k$  — волновое число звуковой волны в газе-заполнителе;  $B_{m,n}$ ,  $C_{m,n}$ ,  $D_{m,n}$ ,  $E_{m,n}$ ,  $F_{m,n}$ ,  $G_{m,n}$ ,  $H_{m,n}$ ,  $I_{m,n}$  — неизвестные коэффициенты разложений. Коэффициенты разложений отыскиваются из физических граничных условий на обеих поверхностях ( $\xi_0$  и  $\xi_1$ , см. рис. 1):

1) непрерывность нормальной компоненты смещения на обеих границах  $\xi_0$  и  $\xi_1$ ;

2) равенство нормального напряжения в упругой оболочке звуковому давлению в жидкости ( $\xi_0$ ) или газе ( $\xi_1$ );

3) отсутствие касательных напряжений на обеих границах оболочки  $\xi_0$  и  $\xi_1$ .

В соответствии с этим граничные условия примут вид [9]:

$$(h_\xi)^{-1}(\partial/\partial\xi)(\Phi_0 + \Phi_1) = (h_\xi)^{-1}(\partial\Phi_2/\partial\xi) + \\ + (h_\eta h_\varphi)^{-1}[(\partial/\partial\eta)(h_\varphi \psi_\varphi) - (\partial/\partial\varphi)(h_\eta \psi_\eta)]|_{\xi=\xi_0}; \quad (21)$$

$$(h_\xi)^{-1}(\partial\Phi_3/\partial\xi) = (h_\xi)^{-1}(\partial\Phi_2/\partial\xi) + \\ + (h_\eta h_\varphi)^{-1}[(\partial/\partial\eta)(h_\varphi \psi_\varphi) - (\partial/\partial\varphi)(h_\eta \psi_\eta)]|_{\xi=\xi_1}; \quad (22)$$

$$-\lambda_0 k^2(\Phi_0 + \Phi_1) = -\lambda_1 k_1^2 \Phi_2 + 2\mu_1 [(h_\xi h_\eta)^{-1} \times \\ \times (\partial h_\xi/\partial\eta) u_\eta + (h_\xi)^{-1}(\partial u_\xi/\partial\xi)]|_{\xi=\xi_0}; \quad (23)$$

$$-\lambda_2 k_2^2 \Phi_3 = -\lambda_1 k_1^2 \Phi_2 + 2\mu_1 [(h_\xi h_\eta)^{-1} \times \\ \times (\partial h_\xi/\partial\eta) u_\eta + (h_\xi)^{-1}(\partial u_\xi/\partial\xi)]|_{\xi=\xi_1}; \quad (24)$$

$$0 = (h_\eta/h_\xi)(\partial/\partial\xi)(u_\eta/h_\eta) + \\ + (h_\xi/h_\eta)(\partial/\partial\eta)(u_\xi/h_\xi)|_{\xi=\xi_0}; \quad (25)$$

$$0 = (h_\varphi/h_\xi)(\partial/\partial\xi)(u_\varphi/h_\varphi) + \\ + (h_\xi/h_\varphi)(\partial/\partial\varphi)(u_\xi/h_\xi)|_{\xi=\xi_0}; \quad (26)$$

Здесь  $\lambda_1$  и  $\mu_1$  — коэффициенты Ламе материала оболочки;  $\lambda_0$  — коэффициент объемного сжатия жидкости;  $\lambda_2$  — коэффициент объемного сжатия газа, заполняющего оболочку:

$$u_\xi = (h_\xi)^{-1}(\partial\Phi_2/\partial\xi) + (h_\eta h_\varphi)^{-1} \times \\ \times [(\partial/\partial\eta)(h_\varphi \psi_\varphi) - (\partial/\partial\varphi)(h_\eta \psi_\eta)];$$

$$u_\eta = (h_\eta)^{-1}(\partial\Phi_2/\partial\eta) + (h_\xi h_\varphi)^{-1} \times \\ \times [(\partial/\partial\varphi)(h_\xi \psi_\xi) - (\partial/\partial\xi)(h_\varphi \psi_\varphi)];$$

$$u_\varphi = (h_\varphi)^{-1}(\partial\Phi_2/\partial\varphi) + (h_\xi h_\eta)^{-1} \times \\ \times [(\partial/\partial\xi)(h_\eta \psi_\eta) - (\partial/\partial\eta)(h_\xi \psi_\xi)].$$

Подстановка рядов (15)–(20) в граничные условия (21)–(26) дает бесконечную систему уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов. Из-за ортогональности тригонометрических функций  $\cos m\varphi$  и  $\sin m\varphi$  бесконечная система уравнений распадается на бесконечные подсистемы с фиксированным индексом  $m$ . Каждая из подсистем решается методом усечения. Число удерживаемых членов разложений (15)–(20) тем больше, чем больше волновой размер для данного потенциала.

На рис. 2 представлены относительные сечения обратного рассеяния  $\sigma_0$  различных сфероидальных тел (идеальных и упругих) для двух углов облучения ( $\theta_0 = 0^\circ$  и  $\theta_0 = 90^\circ$ ). Кривая 1 соответствует стальной вытянутой сфероидальной оболочке, облучаемой вдоль оси вращения  $Z(\theta_0 = 0^\circ)$ . Кривая 2 относится к идеальному мягкому сфериду при том же угле облучения. Кривая 3 дает

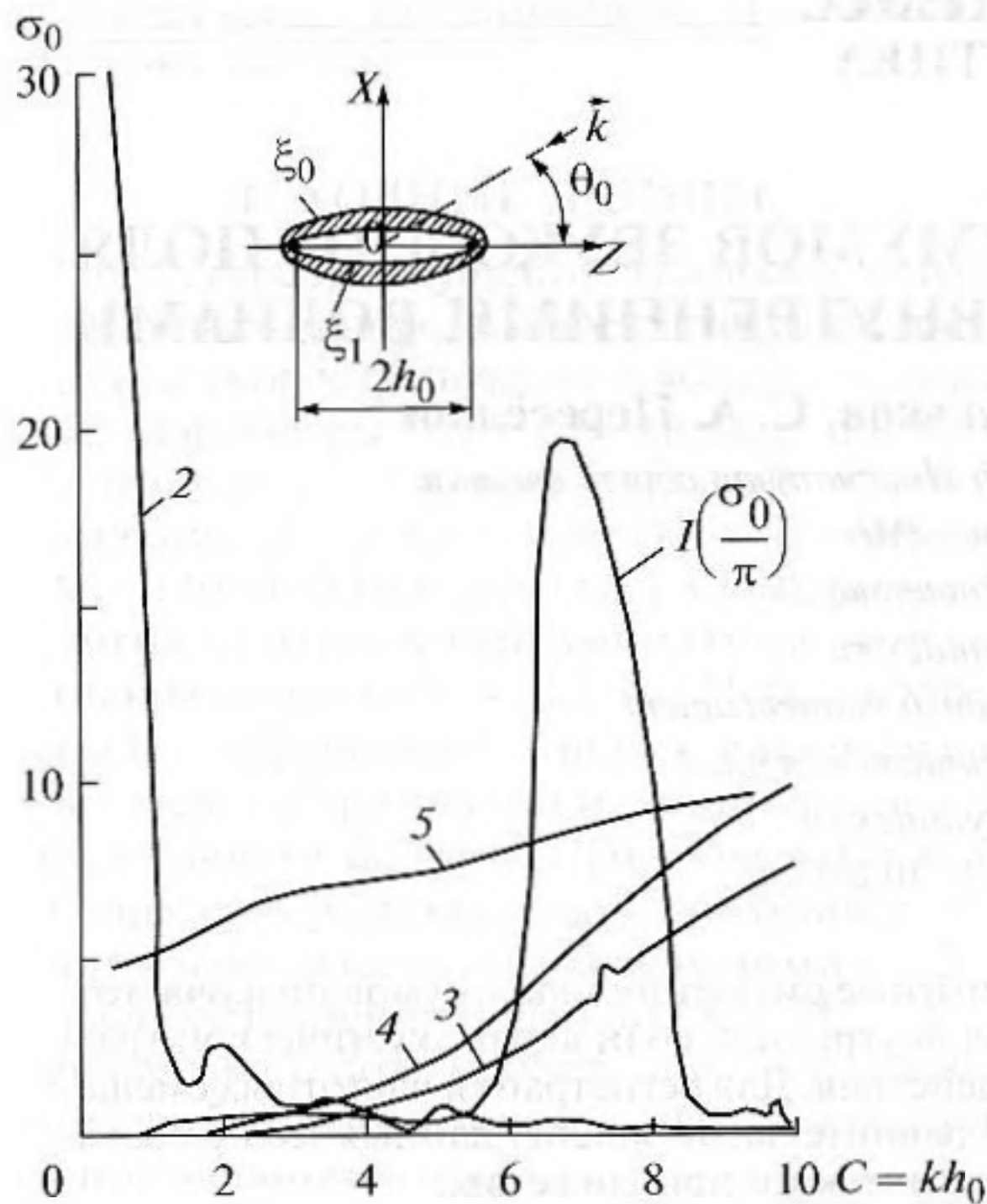


Рис. 2. Относительные сечения обратного рассеяния вытянутых сфероидальных тел.

представление о  $\sigma_0$  стального сфероида, облучаемого под углом  $\theta_0 = 90^\circ$  (трехмерная задача). Кривая 4 относится к жесткому вытянутому сфероиду:  $\xi_0 = 1.005$ ,  $\theta_0 = 90^\circ$ ; кривая 5 – к мягкому вытянутому сфероиду:  $\xi_0 = 1.005$ ,  $\theta_0 = 90^\circ$ . Все кривые рис. 2 даны в зависимости от волнового размера рассеивателя  $C = kh_0$ . Результаты расчетов задач дифракции на упругих телах сфероидальной формы использовались при оценке точности эксперимента по исследованию рассеянного звукового поля упругими полыми цилиндрическими оболочками [13].

Представленные в статье результаты получены при проведении поисковой научно-исследова-

тельской работы в рамках Государственного контракта П 242 от 21 апреля 2010 года ФЦП “Научные и научно педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Debye P. Das Verhalten von Lichtwellen in der Nahe eines Brennpunktes oder Brennlinie // Ann. Physik. 1909. V. 30. № 4. P. 755–776.
2. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.–Л.: ОНТИ, 1937. 998 с.
3. Franz W. Theorie der beugung elektromagnetischer wellen. Berlin–Gottingen–Heidelberg. Springer, 1957. Zf. 9. 123 p.
4. Meixner J. Strenge theorie der beugung elektromagnetischer wellen an der vollkommen leitenden kreis-scheibe // Naturforsch. 1948. V. 3. № 8–11. P. 501–518.
5. Фок В.А. Теория дифракции от параболоида вращения. М.: Сов. радио, 1957. С. 5–56.
6. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970. 517 с.
7. Хёнд Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
8. Гутман Т.Л., Клещев А.А. Дифракция волн в упругой среде на упругом сфероиде // Тр. ЛКИ. 1974. № 91. С. 31–37.
9. Клещев А.А. Гидроакустические рассеиватели. СПб.: Судостроение, 1992. 248 с.
10. Buchwald V.T. Rayleigh waves in transversely isotropic media // J. Mech. and Applied. Math. 1961. V. 14. Pt. 3. P. 293–317.
11. Ahmad F. Guided waves in a transversely isotropic cylinder immersed in a fluid // J. Acoust. Soc. Amer. 2001. V. 109. № 3. P. 886–890.
12. Fan Y., Sinclair A.N., Honarvar F. Scattering of a plane acoustic wave from a transversely isotropic cylinder encased in a solid elastic medium // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 106. № 3. Pt. 1. P. 1229–1236.
13. Клещев А.А. Низкочастотное рассеяние импульсного звукового сигнала упругими цилиндрическими оболочками // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 3. С. 381–386.