АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2012, том 58, № 4, с. 563–568

АКУСТИЧЕСКАЯ ЭКОЛОГИЯ.
ШУМЫ И ВИБРАЦИЯ

УДК 534.83

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ПЛОСКИМ ЛОКАЛИЗОВАННЫМ ВИХРЕМ

© 2012 г. П. Г. Яковлев

Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ

105005 Москва, ул. Радио 17

E-mail: yakovlevpg@ya.ru

Поступила в редакцию 10.12.2011 г.

Проведено численное моделирование классической задачи о малых колебаниях вихря Ранкина в сжимаемом газе. Уравнения Эйлера для сжимаемого газа решались методом "кабаре". Результаты моделирования хорошо предсказывают величину собственной частоты колебаний границы для азимутальной гармоники $n = 2$ и практически совпадают с аналитическим решением. Количественно предсказано значение инкремента акустической неустойчивости, несмотря на то, что оно мало и проявляется при числе колебаний, больших 100.

Ключевые слова: вихрь Ранкина, звуковое поле, метод "кабаре", инкремент неустойчивости.

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена проблеме прямого численного моделирования колебаний вихря Ранкина и излучаемого им звука. Аналитическое решение задачи хорошо известно. В несжимаемой жидкости колебания такого вихря рассматривались еще Кельвином [1]. В сжимаемой жидкости задача также рассматривалась, поскольку она является одним из наиболее простых модельных примеров распределенного вихря, когда динамику вихревого поля и звук можно вычислить точно [2]. Теоретически была обнаружена такая особенность излучения звука вихрем, как акустическая неустойчивость [3], объяснение которой на языке волн отрицательной энергии было дано в [4, 5]. С точки зрения численного моделирования задача является исключительно сложной, поскольку вихревое течение отличается резкой границей, разделяющей вихревое (неустойчивое) и потенциальное течения. Деформации этой границы (возмущения Кельвина) вращаются с постоянной угловой частотой и медленно нарастают из-за акустической неустойчивости. Моделирование всей совокупности процессов генерации и обратного влияния звука на вихревое течение проводится, насколько известно автору, впервые. Для численного моделирования решаются уравнения Эйлера с помощью метода "кабаре" [6–8]. Оказалось, что характеристики этой схемы исключительно хорошо приспособлены для решения вычислительных задач, связанных с вихревой динамикой. Отметим работу [9], где впервые было проведено численное моделирование эффекта резонансного рассеяния [10] звуковой волны на вихре Ранкина.

Следует отметить, что при обычном моделировании процессов аэродинамической генерации шума турбулентными струями методами LES, когда имеется совокупность взаимодействующих турбулентных вихрей, вопросы динамики отдельной вихревой структуры находятся далеко за пределами деталей моделирования. Поэтому настоящая работа может рассматриваться как первый шаг в процессе построения иерархии кодов, способных в результате предсказывать вклад в суммарный шум собственной динамики вихревых структур наряду с процессами передачи турбулентной энергии по каскаду возмущений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В неограниченном покоящемся сжимаемом идеальном газе задан плоский локализованный вихрь с постоянной завихренностью Ω_0 в области, ограниченной замкнутой кривой. Будем считать, что исходная круговая граница слабо возмущена и в полярных координатах (r, φ) имеет вид:

$$f(\varphi) = r_0(1 + \varepsilon\cos(s\varphi) + O(\varepsilon^2)), \qquad (1)$$

где $r_0 = 2.6$ мм – значение радиуса невозмущенного вихря, ε – коэффициент возмущения ($\varepsilon \ll 1$), s – целое число. Обозначим $M_V = \dfrac{\Omega_0 r_0}{2c_\infty}$ число Маха для ядра вихря, где c_∞ – скорость звука, $\Omega_0 \approx 76$ кГц.

Вдали от вихря колебательное движение границы вихря будет сопровождаться звуковыми волнами, распространяющимися от области вихря. В численном решении для обеспечения более быстрой сходимости начальные условия желательно задать ближе к искомому решению, во всяком случае, в области ядра вихря. В данной работе рассматриваются малые значения коэффициента возмущения ($\varepsilon = 1/30$) и числа Маха ($M_V =$

$= 0.3$), поэтому различие в начальных данных в области ядра вихря (неволновая зона) между постановками задачи для сжимаемого и несжимаемого газа будет незначительным. Поскольку несжимаемое решение в линейном приближении относительно коэффициента возмущения границы ε хорошо известно [1], возьмем его в качестве начального распределения для поля скорости. Давление и плотность в начальном условии выберем из условия изэнтропичности течения, в котором величина скорости определяется линейным по ε приближением для несжимаемого газа. В результате для начальных условий выбраны следующие выражения:

$$
\left[\begin{array}{l}
x \le \dfrac{f(\varphi)}{r_0}, \\
\begin{cases}
\dfrac{u_r}{c_\infty} = -\varepsilon M_V x^{s-1}\sin(s\varphi), \\
\dfrac{u_\varphi}{c_\infty} = M_V x - \varepsilon M_V x^{s-1}\cos(s\varphi), \\
\dfrac{F(P)}{c_\infty^2} = \dfrac{1}{\gamma-1} - M_V^2\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right) - \varepsilon M_V^2\dfrac{x^s}{s}\cos(s\varphi),
\end{cases} \\
x \ge \dfrac{f(\varphi)}{r_0}, \\
\begin{cases}
\dfrac{u_r}{c_\infty} = -\varepsilon M_V\dfrac{1}{x^{s+1}}\sin(s\varphi), \\
\dfrac{u_\varphi}{c_\infty} = M_V\dfrac{1}{x} + \varepsilon M_V\dfrac{1}{x^{s+1}}\cos(s\varphi), \\
\dfrac{F(P)}{c_\infty^2} = \dfrac{1}{\gamma-1} - M_V^2\dfrac{1}{2x^2} - \varepsilon M_V^2\dfrac{1}{sx^s}\cos(s\varphi)\left(1-s\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)\right),
\end{cases}
\end{array}\right. \tag{2}
$$

где $x = \dfrac{r}{r_0}$, u_r, u_φ – компоненты скорости в полярных координатах, ρ, P – плотность и давление, γ – показатель адиабаты, функция $F(P)$ связана с давлением и плотностью следующими соотношениями: $P = \left(\dfrac{\gamma-1}{\gamma}F(P)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, $\rho = \left(\dfrac{\gamma-1}{\gamma}F(P)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Двумерные уравнения Эйлера для сжимаемого газа с выбранными начальными условиями (2) решаются с помощью метода “кабаре”. Приведем краткое описание метода. Переменные разделяются на два типа – “консервативные”, которые относятся к центрам ячеек, и “потоковые” – к центрам граней. Алгоритм вычисления переменных состоит из 3-х этапов:

1. Вычисление консервативных переменных на “промежуточном” шаге по времени с использованием дивергентной записи уравнений.

2. Экстраполяция инвариантов Римана и нелинейная коррекция. Расчет потоковых переменных на новом шаге по времени.

3. Расчет консервативных переменных на новом временном слое в дивергентной записи.

Более подробное описание всех этапов построения метода “кабаре” можно найти в работах [6, 7].

Основными особенностями метода являются бездиссипативность, минимальная аппроксимационная дисперсия, использование явной схемы, компактность вычислительного шаблона (одна пространственно-временная ячейка для уравнения линейного переноса), консервативность, второй порядок точности как по пространству, так и по времени на произвольно неоднородных сетках, прямое использование принципа максимума для нелинейной коррекции потоков. Исследование свойств метода “кабаре” на линейных и нелинейных задачах акустики см. [8, 9, 11].

Расчетная область – квадрат, состоящий из структурированных прямоугольников (*ij* сетка), в центре которого задается вихрь (рис. 1). Сетка

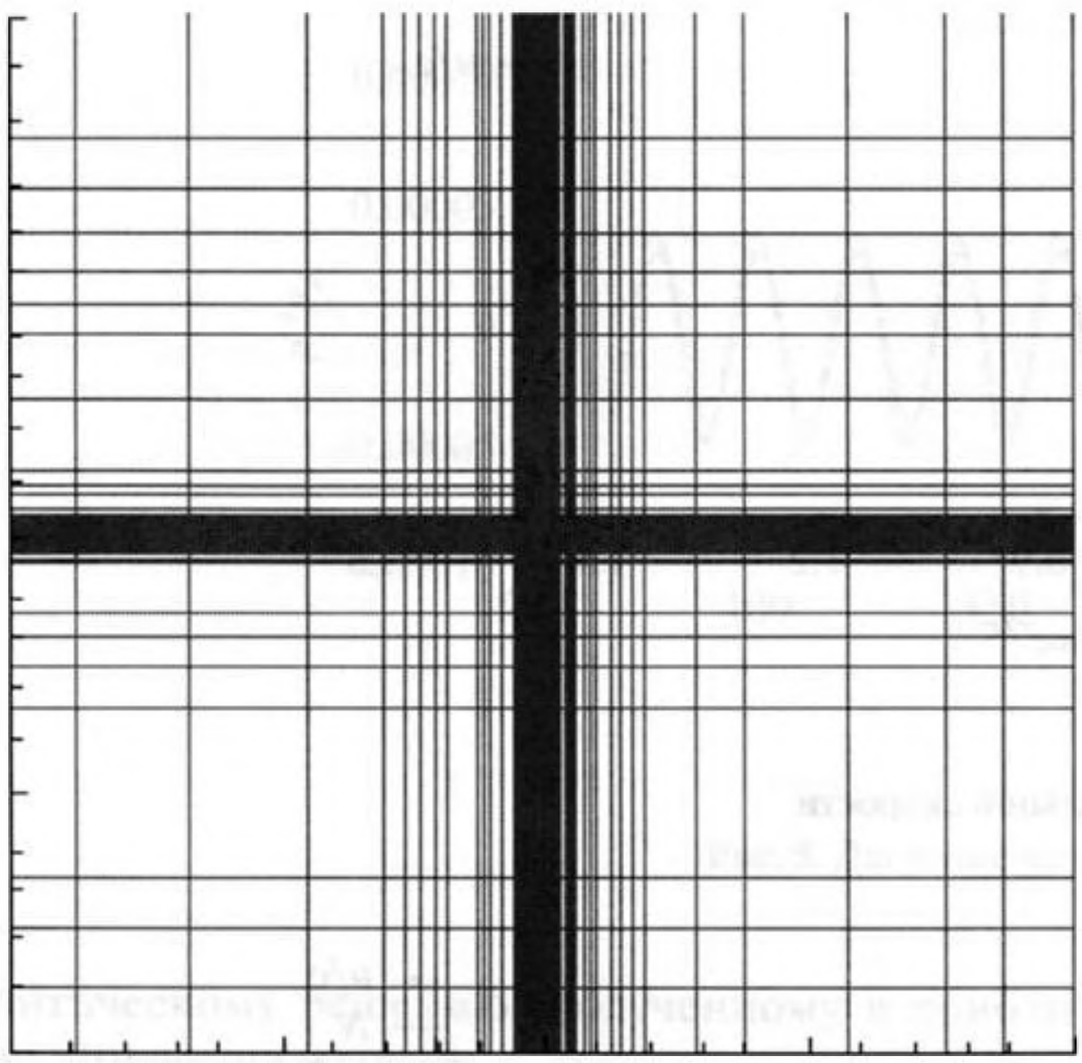

Рис. 1. Расчетная область.

имеет зеркальную симметрию относительно осей $0X$ и $0Y$. Распределение шагов сетки по обеим осям идентично. Для разрешения малых возмущений границы вихря в центральной области сетка имеют плотность 90 ячеек на радиус вихря r_0, затем для уменьшения вычислительного времени к границам области вводится коэффициент растяжения сетки. На границах использованы одномерные "неотражающие" характеристические условия, которые с учетом укрупнения элементов обеспечивают слабое отражение волн от внешних границ области, что необходимо для минимизации влияния граничных условий на решение задачи.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим результаты теоретического анализа задачи. Для аналитического решения [1, 4] собственная частота несжимаемого вихря для каждой гармоники s имеет вид $\omega_s = \Omega_0(s-1)/2$. Для сжимаемого вихря частота кельвиновского возмущения $s = 2$, отнесенная к частоте $\Omega_0/2$ несжимаемого приближения, имеет вид [3, 5]

$$\omega_2 = \frac{\Omega_0}{2} \times \left[1 - \frac{M^2}{12} - M^4\left(\frac{67}{1152} + \frac{C_\gamma}{16} - \frac{i\pi}{32} + \frac{\gamma}{192} + \frac{1}{16}\ln\frac{M}{2}\right)\right], \quad (3)$$

где $C_\gamma = 0.5772...$ – постоянная Эйлера. Согласно (3) частота сжимаемого вихря отличается от частоты несжимаемого на члены $\sim M^2$. Кроме того, при учете членов M^4 в собственной частоте появляется мнимая добавка, соответствующая акустической неустойчивости. В [4, 5] показано, что механизм акустической неустойчивости связан потерей энергии возмущениями Кельвина за счет излучения звука, а сами возмущения представляют собой колебания с отрицательной энергией. Таким образом, задача излучения звука сжимаемым вихрем демонстрирует важные особенности генерации звука, взаимодействия вихревого поля и звука, в том числе и обратного влияния излучения на вихрь. Моделирование этих особенностей, проявляющихся в высших членах разложения точного решения по числу Маха, представляет собой серьезную проблему для численного моделирования, поскольку они проявляются при учете большого числа колебаний вихря.

Рассмотрим результаты численного моделирования. На рис. 2 представлен график радиальной скорости на расстоянии $x = 1.2$, общее время расчета соответствует примерно 100 периодам вращения вихря. Видно, что на всем временном ин-

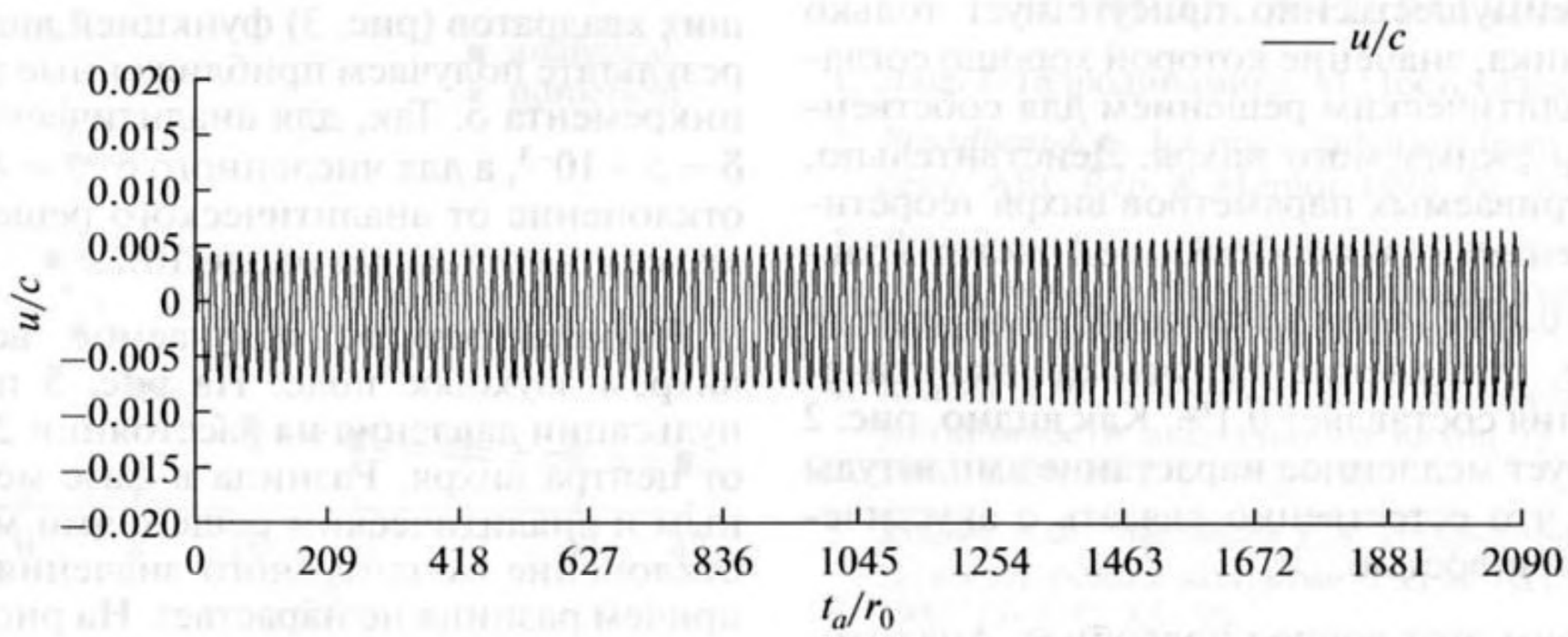

Рис. 2. Радиальная скорость: $s = 2$, $M_V = 0.3$.

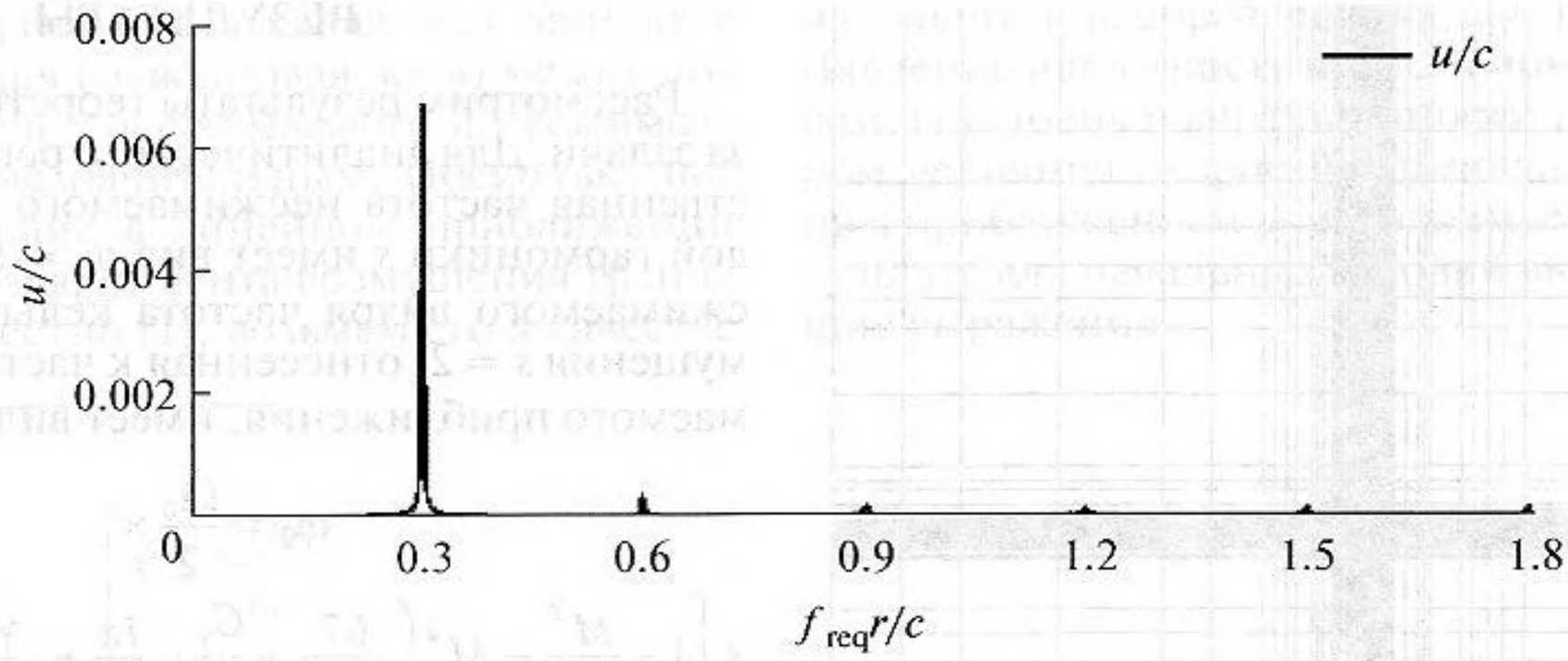

Рис. 3. Спектр радиальной скорости.

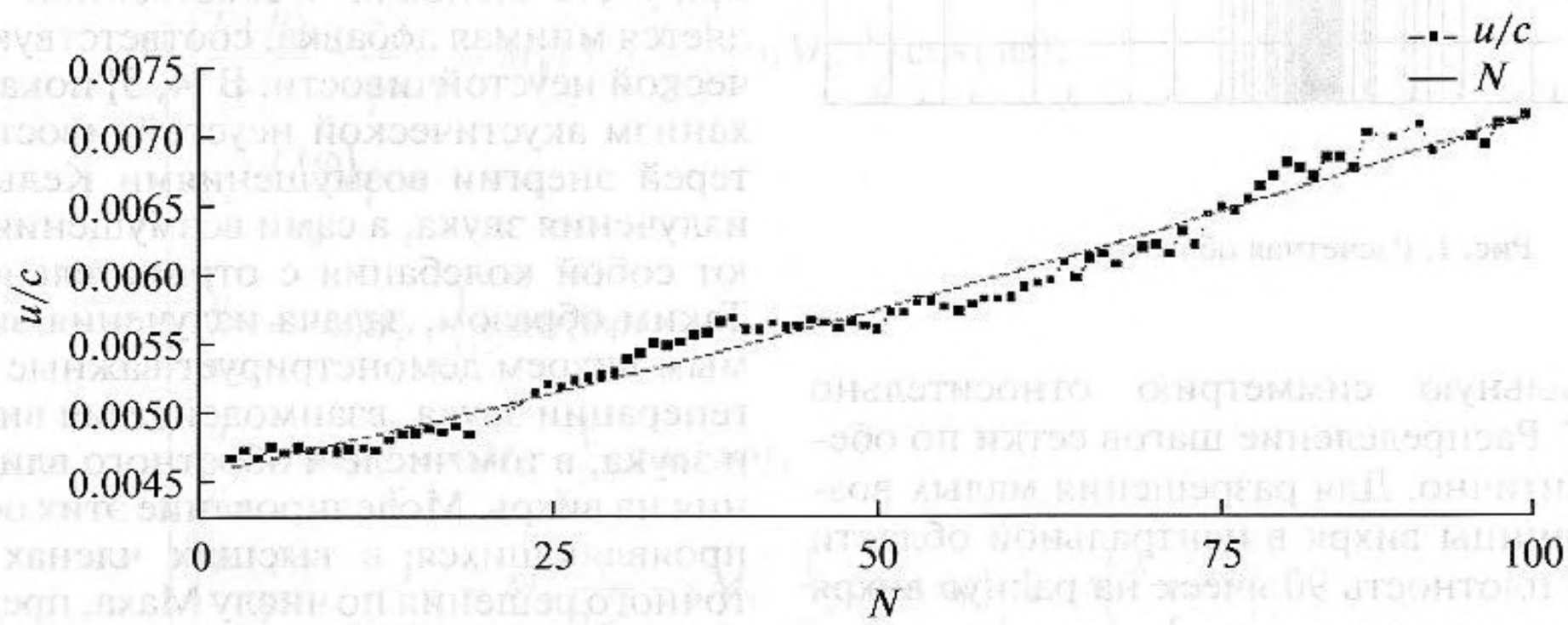

Рис. 4. Инкремент неустойчивости.

тервале скорость имеет достаточно гладкий вид, а вихревое поле сохраняет "пеньковую" форму (при сглаживании поля завихренности собственная частота перестает быть действительной и собственные частоты быстро затухают). В спектре (рис. 3) преимущественно присутствует только одна гармоника, значение которой хорошо согласуется с аналитическим решением для собственной частоты сжимаемого вихря. Действительно, для рассматриваемых параметров вихря теоретическое значение (3) для собственной частоты равно $\omega_2 r_0/c_\infty = 0.2977$, а для численного – $\omega_2^{num} r_0/c_\infty = 0.2971$, т.е. отклонение частоты от аналитического решения составляет 0.1%. Как видно, рис. 2 демонстрирует медленное нарастание амплитуды колебаний, что естественно связать с акустической неустойчивостью.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Аналитическое решение (3) для инкремента неустойчивости дает $\varepsilon(t) = \varepsilon e^{\delta t}$, $\delta = \dfrac{\pi M^4}{32}\dfrac{\Omega_0}{2}$. Положим $\delta t = \dfrac{\pi M^4}{32}\dfrac{\Omega_0}{2} t = \dfrac{\pi^2 M^4}{16} N$, где N – число оборотов. Учитывая линейную зависимость радиальной скорости от ε, аппроксимируем локальные максимумы в численном решении методом наименьших квадратов (рис. 3) функцией вида $y = Ae^{gN}$. В результате получаем приближенные значения для инкремента δ. Так, для аналитического решения $\delta = 5 \times 10^{-3}$, а для численного $\delta^{num} = 4.4 \times 10^{-3}$, т.е. отклонение от аналитического решения для инкремента составляет около 10%.

Проанализируем излучаемое возмущенным вихрем звуковое поле. На рис. 5 представлены пульсации давления на расстоянии 24-х радиусов от центра вихря. Разница в фазе между численным и аналитическим решениями меньше 0.1%, отклонение амплитудного значения около 10%, причем разница не нарастает. На рис. 6 представлены графики осредненных значений пульсаций давления на различных расстояниях от центра вихря. Видно, что начиная с восьми радиусов, пульсации давления хорошо соответствуют ана-

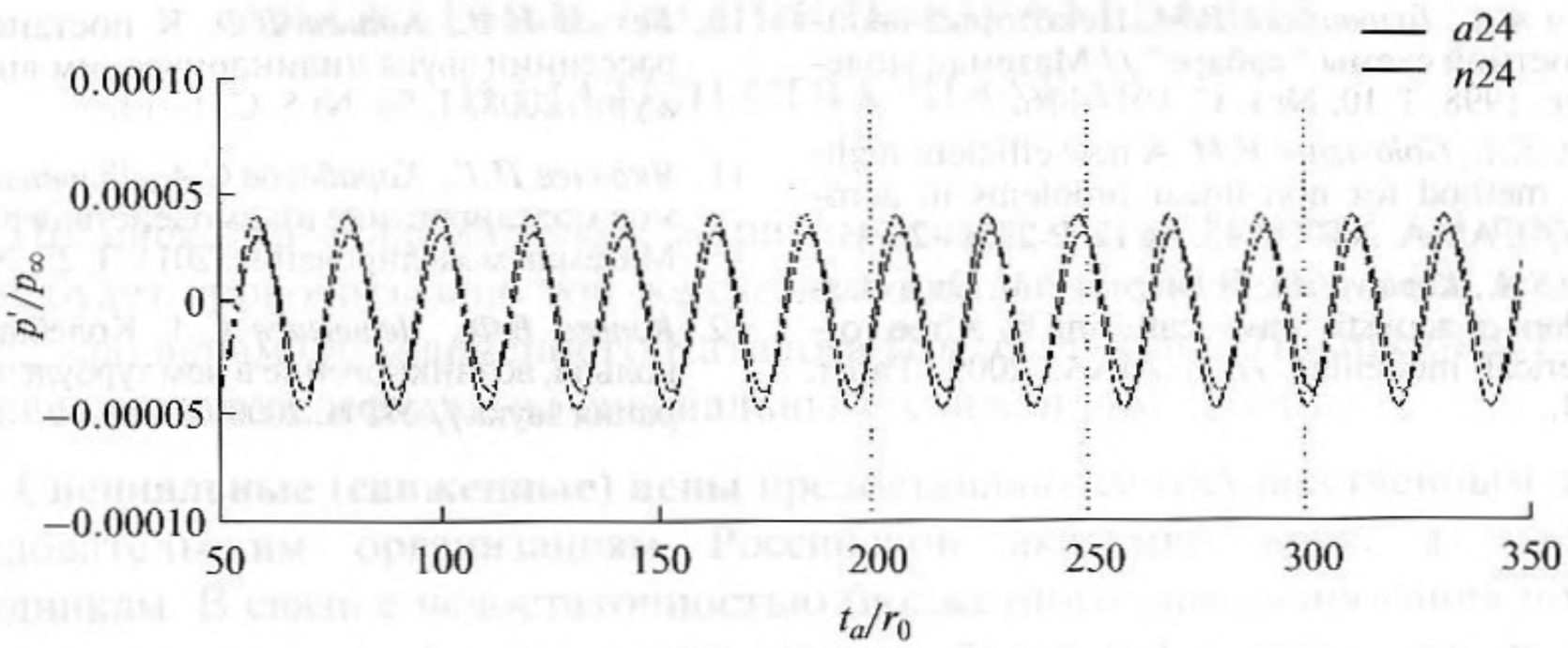

Рис. 5. Давление на расстоянии 24-х радиусов.

литическому решению, полученному в приближении дальнего поля.

ВЫВОДЫ

Задача излучения звука плоским вихрем решена численно методом "кабаре" как для ближнего, так и для дальнего поля. За время расчета вихрь Кельвина совершает около 100 оборотов (~300000 шагов по времени), сохраняя свою "пеньковую" форму. Произведена оценка излучаемого звукового поля. Продемонстрирована согласованность пульсаций давления в дальнем поле с аналитическим решением. Показано, что численный метод хорошо моделирует малые возмущения вихря Кельвина: инкремент неустойчивости согласуется с аналитическими данными, частота собственных колебаний вихря практически совпадает с аналитическим решением. Все результаты проверены на сеточную сходимость.

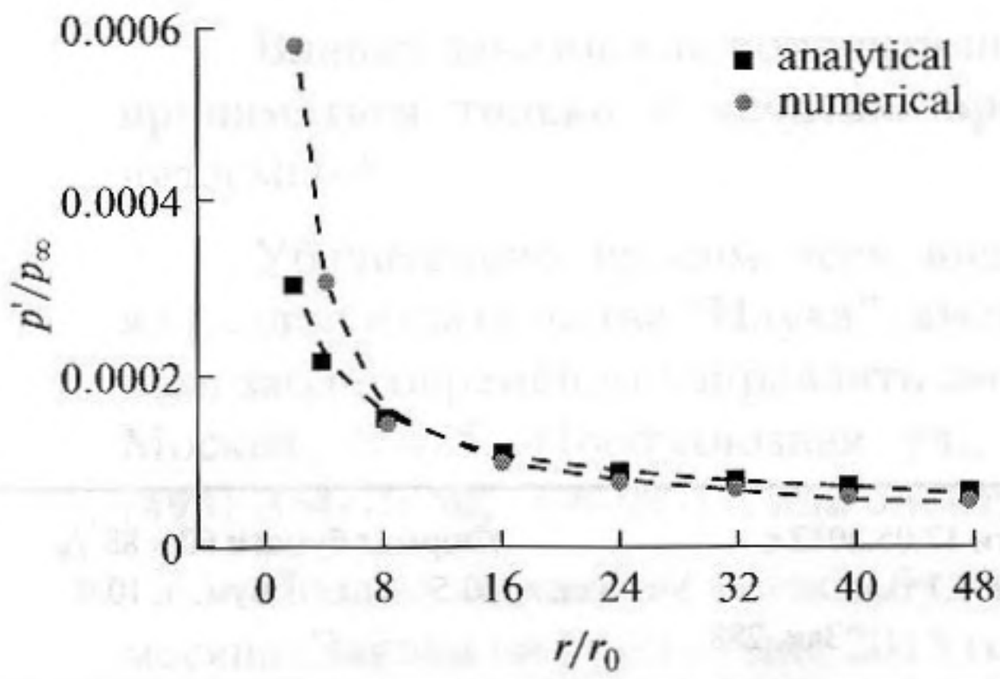

Рис. 6. Осредненные значения пульсаций давления.

Таким образом, численное решение оказалось способным предсказать тонкие эффекты взаимодействия вихревой динамики и сжимаемости, выражаемые величинами, пропорциональными четвертой степени числа Маха, несмотря на то, что всегда имеют место неконтролируемые ошибки, связанные с дискретизацией процесса и схемной вязкостью. Это значит, что схема "кабаре" в целом допускает расширение прямого численного моделирования на задачи, характеризующиеся локализованными вихрями с выраженным ядром, в том числе на задачи, когда турбулизация течения и генерация звука определяются тонкими эффектами взаимодействия колебаний ядра вихря и обтекающего ядро потока [12].

Автор выражает благодарность В.Ф. Копьеву за постановку задачи и внимание к работе, а также В.М. Головизнину и С.А. Карабасову за полезные обсуждения и помощь в проведении численных расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лэмб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. *Broadbent E.G.* Jet noise radiation from discrete vortices // ARC Rep. & Memor. 1978. № 3826. 28 p.
3. *Broadbent E.G., Moore D.W.* Acoustic destabilization of a vortex // Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A. 290. 1979. С. 353–371.
4. *Копьев В.Ф., Леонтьев Е.А.* Об акустической неустойчивости аксиального вихря // Акуст. журн. 1983. Т. 28. № 2. С. 192–198.
5. *Копьев В.Ф., Леонтьев Е.А.* Излучение и рассеяние звука вихревым кольцом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 83–95.
6. *Самарский А.А., Головизнин В.М.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математ. моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 86–100.

7. *Самарский А.А., Головизнин В.М.* Некоторые свойства разностной схемы "кабаре" // Математ. моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 101–116.

8. *Karabasov, S.A., Goloviznin V.M.* A new efficient high-resolution method for non-linear problems in aeroacoustics // J. AIAA. 2007. V. 45. № 12. P. 2861–2871.

9. *Karabasov S.A., Kopiev V.F., Goloviznin V.M.* On a classical problem of acoustic wave scattering by a free vortex: numerical modelling // J. AIAA. 2009. Paper. 2009-3234.

10. *Беляев И.В., Копьев В.Ф.* К постановке задачи о рассеянии звука цилиндрическим вихрем // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 5. С. 1–13.

11. *Яковлев П.Г., Карабасов С.А., Головизнин В.М.* Прямое моделирование взаимодействия вихревых пар // Математ. моделирование. 2011. Т. 23. № 11. С. 21–32.

12. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Колебания вихревого кольца, возникновение в нем турбулентности и генерация звука // УФН. 2000. Т. 170. № 7. С. 713–742.

Сдано в набор 12.03.2012 г. Подписано к печати 17.05.2012 г. Формат бумаги $60 \times 88^1/_8$
Цифровая печать Усл. печ. л. 20.0 Усл. кр.-отт. 2.7 тыс. Уч.-изд. л. 20.5 Бум. л. 10.0
Тираж 131 экз. Зак. 288

Учредитель: Российская академия наук

Издатель: Российская академия наук. Издательство "Наука", 117997 Москва, Профсоюзная ул., 90
Оригинал-макет подготовлен МАИК "Наука/Интерпериодика"
Отпечатано в ППП "Типография "Наука", 121099 Москва, Шубинский пер., 6