

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ В УПРУГОЙ КЛИНОВИДНОЙ ПЛАСТИНЕ

© 2013 г. Х. Б. Толипов

Южно-Уральский государственный университет

454080 Челябинск, пр. Ленина 76

E-mail: thb@susu.ac.ru

Поступила в редакцию 30.07.2012 г.

Теоретически и экспериментально исследованы стоячие антисимметричные волны в упругой клиновидной пластине. Решение неоднородной задачи получено в приближении малости и плавности неоднородности поля. Для малого угла раствора клина рассчитаны и измерены амплитуды колебаний в стоячей волне. Экспериментальные измерения выполнены на оригинальной установке.

Ключевые слова: неоднородная волна, интерференция, клиновидная пластина, волновое поле, теория упругости.

DOI: 10.7868/S0320791913040163

1. ВВЕДЕНИЕ

Неоднородность структуры акустических волн, как правило, является следствием акустической анизотропии среды, в которой они распространяются. Так, в частности, неоднородная структура волны Рэлея отражает анизотропию приповерхностной области полупространства [1]. Очевидно также, что пластина клиновидной формы, имеющая две приповерхностные области, представляет собой также акустически анизотропную среду. Следует отметить, что акустические волны в клиновидной пластине изучены недостаточно полно. Отсутствие физико-математической модели распространения этих волн привело к тому, что исследования ограничивались либо численными расчетами, либо эмпирическими зависимостями [2–6], которые лишь качественно объясняли акустические явления в клиновидной пластине.

Как показывают исследования, движение поверхностной волны в пластине сопровождается принципиально новыми эффектами. Так, например, при движении волны Рэлея в некоторой области, прилегающей к ребру, имеет место потеря ее устойчивости (стационарности). При этом возникает особый тип поверхностной волны, сопровождающийся в ходе движения непрерывной перестройкой акустического поля и излучением объемных волн. Причина этого феномена кроется в том, что при движении поверхностной волны изменяются условия распространения: смещения частиц среды в какой-то момент времени начинают достигать противоположной грани клина, что ведет к расщеплению движущейся волны на независимые поверхностную и объемную компоненты. Энергия поверхностной волны в ходе движения начинает уменьшаться, поскольку объемные

волны, непрерывно оттекающие с поверхности вглубь среды, уносят с собой часть энергии. Эти эффекты, в конечном итоге, приводят к расщеплению волны Рэлея на независимые симметричную и антисимметричную моды.

В большинстве случаев нелинейные эффекты связаны с изменением свойств среды при прохождении колебаний. В клиновидной пластине изменения характеристик волны обусловлены не влиянием среды, а взаимодействием движущейся волны с гранями клина. Если традиционно неоднородность акустического поля возникает при больших интенсивностях волн, то в клиновидной пластине неоднородная структура поля проявляется уже при малых интенсивностях. Акустическое поле в клиновидной пластине фактически представляет наложение двух неоднородных волн, бегущих в прямом и обратном направлениях. Соответственно этому исследование состоит из двух этапов. Вначале рассматривается эволюция поверхностной волны, движущейся перпендикулярно ребру клина, а затем – возникающая интерференция двух встречных волновых потоков.

2. ЭВОЛЮЦИЯ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В КЛИНОВИДНОЙ ПЛАСТИНЕ

В клиновидной пластине энергия движущейся поверхностной волны не остается постоянной, а монотонно уменьшается за счет непрерывного оттока в объемные волны. Поэтому классическую систему уравнений волновой динамики, которая обычно выводится из закона сохранения энергии без учета процессов диссипации, в данном случае использовать для решения задачи проблематично. Рассмотрим в рамках плосковолновой модели

подход, позволяющий приближенно оценить эволюцию движущейся поверхностной волны. В цилиндрической системе координат, позволяющей разбить векторное уравнение Ламе для каждого из волновых потенциалов, стандартные уравнения динамики имеют вид [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + k_t^2 \Phi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + k_t^2 \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Наличие первой производной по продольной координате в (1) свидетельствует о том, что амплитуда потенциалов из-за сжатия волнового потока в клиновидной пластине нарастает к ребру. Однако эти уравнения не учитывают изменение амплитуды, обусловленное убылью энергии при трансформации поверхностной волны в объемные, а также изменение скорости волны.

Введением дополнительного члена в уравнения (1), который учитывал бы изменение амплитуды и скорости волны, не решить проблему, поскольку очень сложно определить зависимость изменяющихся параметров волны от координат. Но если допустить медленное изменение этих параметров в пределах локальной длины волны, то можно воспользоваться уравнениями (1) для получения приближенного решения. На малых интервалах изменений r и t решения общего вида можно рассматривать как состоящие из элементарных решений, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= A_0 \exp[ik(r)r - i\omega t] \sin(v\theta), \\ \Psi(r) &= A_0 p \exp[ik(r)r - i\omega t] \sin(\eta\theta), \end{aligned} \quad (2)$$

где $k(r) = k_0(1 + ar)$, $dk(r)/dr = k_0 a = 2\pi a/\lambda$, $a = \varepsilon\lambda$, $\varepsilon \ll 1$, ε – малый параметр задачи. Волновое число в этих соотношениях выражается в комплексном виде: $k(r) = k_1(r) + k_2(r)$, где действительная часть этого числа определяет скорость волны $V(r) = \omega/k_1(r)$, а мнимая – амплитуду $A(r) = A_0 \exp[-k_2(r)]$. Такой же подход используем к граничным условиям, выражающим отсутствие напряжений на поверхностях клина:

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\theta} = 0, \text{ при } \theta = \pm\theta_0,$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} &= \rho c_t^2 \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\rho c_t^2 \left[-\frac{k_t^2}{2} \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Решения (1) целесообразно искать в виде комбинаций функций Ханкеля первого рода:

$$\begin{aligned} \Phi &= \left[A_0 H_v^{(1)}(k_t r) \cos(v\theta) + \right. \\ &+ \left. C_0 H_v^{(1)}(k_t r) \sin(v\theta) \right] \exp(-i\omega t), \\ \Psi &= \left[A_1 H_\eta^{(1)}(k_t r) \sin(\eta\theta) + \right. \\ &+ \left. C_1 H_\eta^{(1)}(k_t r) \cos(\eta\theta) \right] \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (4)$$

поскольку эти функции удовлетворяют условию погашаемости. В этих выражениях угловые волновые числа v, η связаны с искомыми волновыми числами и предполагаются медленно изменяющимися на локальной длине волны. Подстановка соотношений (4) в граничные условия (3) приводит к системе из четырех алгебраических уравнений относительно постоянных A_0, A_1, C_0, C_1 . Используя соотношение для цилиндрических функций [8]:

$$2v Z_v(z) = z Z_{v-1}(z) + z Z_{v+1}(z), \quad (5)$$

$$2Z'_v(z) = Z_{v-1}(z) - Z_{v+1}(z),$$

получаем после несложных преобразований:

$$\begin{aligned} H_v^{(0)'}(r) - \frac{1}{\rho} H_v^{(1)'}(r) &= \frac{\rho}{4v} [H_{v-2}^{(1)}(r) - H_{v+2}^{(1)}(r)] = \frac{\rho}{4v} H_v^-, \\ H_v^{(0)''}(r) &= \frac{1}{2} H_v^{(1)''}(r) + \frac{1}{4} [H_{v-2}^{(1)''}(r) + H_{v+2}^{(1)''}(r)] = \\ &= \frac{1}{2} H_v^{(1)''}(r) + \frac{1}{4} H_v^+, \end{aligned} \quad (6)$$

где $H_v^+ = H_{v-2}^{(1)}(r) + H_{v+2}^{(1)}(r)$, $H_v^- = H_{v-2}^{(1)}(r) - H_{v+2}^{(1)}(r)$. Штрихи означают соответственно первую и вторую производные по аргументу. С учетом этих преобразований получаем комплексное дисперсионное уравнение для определения амплитуды и скорости волны:

$$\frac{H_v^+}{H_v^{(1)}(k_t r)} - 2 \left(\frac{k_t^2}{k_t^2} - 1 \right) \frac{H_\eta^+}{H_\eta^{(1)}(k_t r)} - \left[\frac{\operatorname{tg} \eta \theta}{\operatorname{tg} v \theta} \right]^n = 0, \quad (7)$$

где $H_v^\pm = H_{v-2}^{(1)}(x_j) \pm H_{v+2}^{(1)}(x_j)$, $H_\eta^\pm = H_{\eta-2}^{(1)}(x_j) \pm H_{\eta+2}^{(1)}(x_j)$, $x_1 = k_1 r$, $x_2 = k_t r$, $n = \pm 1$.

2.1. Численное моделирование

Спектральные характеристики поверхностных волн получаются численно из решения уравнения (7). Исходными данными для задачи являются параметры волны (частота колебаний, начальная амплитуда) и свойства среды: упругие постоянные, плотность, размеры клиновидной пластины. В заданный момент времени на заданном расстоянии до точки наблюдения необходимо вычислить значение волнового вектора. При вычислении функций Ханкеля используем

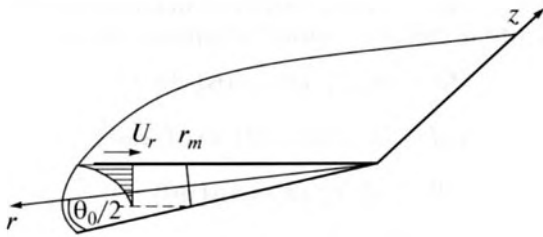


Рис. 1. Система координат.

асимптотическое представление Лангера [8], выполняющееся равномерно в интервале $0 < x < \infty$ при больших значениях порядка

$$H_v^{(1)}(x) \approx \sqrt{\lambda} \exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right) H_{1/3}^{(2)}\left(e^{\frac{i\pi}{2}} v \omega \lambda\right),$$

$$\omega = \sqrt{1 - \frac{x^2}{v^2}}, \quad \lambda = \frac{1}{\omega} \operatorname{Arth} \omega - 1, \quad (8)$$

и асимптотическое разложение Ханкеля для больших значений аргумента

$$H_v^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[-i\left(z - \frac{v\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

которые с учетом принятых обозначений принимают вид:

$$H_{\eta}^{(1)}(k, r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k}} r^{-0.5} \exp\left[-ikr - i\eta \operatorname{arctg}\left(\frac{\eta}{kr}\right) + i\frac{\pi}{2}\right], \quad (9)$$

$$H_v^{(1)}(k, r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k}} r^{-0.5} \exp\left[-ikr - i v \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{kr}\right)\right],$$

а связи волновых величин между собой выглядят следующим образом:

$$kr = \sqrt{v^2 - k_c^2 r^2} = \sqrt{\eta^2 - k_t^2 r^2}.$$

Вычисление основано на нахождении комплексного корня уравнения вида $f(k) = 0$ при различных значениях координат. При выборе r в качестве независимой переменной и учете в (7) представлений (9), приходим к одномерному нелинейному уравнению для определения k .

2.2. Дисперсионные кривые

Корни дисперсионных уравнений (7) зависят от частоты, угла клина, отношения скоростей объемных волн, расстояния до ребра (рис. 1). На рис. 2 для угла $\theta_0 = 26^\circ$ приведены рассчитанные зависимости относительной скорости антисимметричных и симметричных волн от координаты r . Отметим особый характер полученных зависимостей скоростей этих мод. При приближении к ребру из бесконечности до координаты r_m имеем устойчивое стационарное распространение поверхностной волны, а затем происходит потеря устойчивости, сопровождающаяся возникновением двух мод. Изменение скорости этих

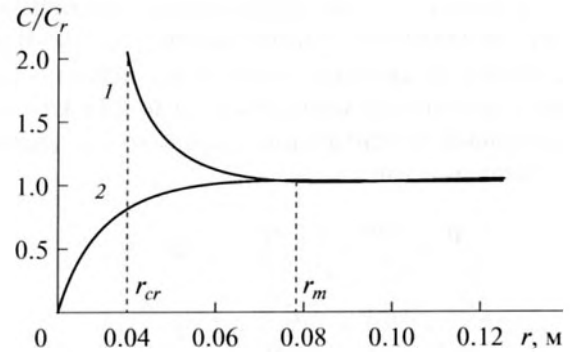


Рис. 2. Зависимость относительной скорости распространения антисимметричной (1) и симметричной (2) волн по оси r от расстояния до ребра клина для угла $\theta_0 = 26^\circ$ (V_r – скорость рэлеевской волны, $f = 2.5$ МГц).

мод с приближением к ребру имеют различный характер. Скорость антисимметричной моды монотонно падает до нуля, а симметричной – растет до значения скорости продольной волны. Также различна область распространения этих мод: если симметричная мода существует в узкой области от r_m до r_{cr} у границы неустойчивой зоны, то антисимметричная занимает всю область от границы r_m до ребра клина. В дальнейшем будем рассматривать только антисимметричные волны, поскольку они формируют стоячую волну.

3. СТОЯЧИЕ АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ МОДЫ ВБЛИЗИ РЕБРА

Как было отмечено, рассматриваемые антисимметричные моды радикально отличаются от классических изменяющихся волн по мере распространения скоростью и амплитудой. Скорость падающей к ребру антисимметричной волны монотонно снижается от значения рэлеевской до нуля, а в обратном направлении скорость снова убыстряется до рэлеевской. В силу равных условий распространения изменения скорости, как в прямом, так и обратном направлениях имеют идентичный характер, что приводит к устойчивой волновой картине. Амплитуды стоячих волн, состоящих из двух встречных неоднородных антисимметричных волн, при падении рэлеевской волны единичной амплитуды, можно вычислить по формуле:

$$U(r) = U_{inc}(r) \sin(k_2 r) + U_{ref}(r) \sin(k_2 r),$$

где падающая волна определяется как $U_{inc}(r) = [1 - \exp(-k_1 r)] \sqrt{2/\pi k r}$, а обратная – $U_{ref}(r) = [1 - \exp(-k_1 r_m)] \exp(-k_1 r)$. Изменяющие по ходу движения амплитуда падающей волны определяется конкуренцией двух механизмов. С одной стороны, уменьшением локальной толщины пластины, ведущей к сжатию волнового потока и нелинейному росту амплитуды, определяемым со-

множителем $\sqrt{2/\pi kr}$. С другой стороны — нелинейным затуханием возмущений, связанным с оттоком энергии при возникновении объемных волн и определяемым сомножителем $[1 - \exp(-k_1 r)]$. Эта амплитуда изменяется до значения, определяемого протяженностью области r_m и коэффициентом затухания k_1 . В обратном направлении не происходит взаимодействия с противоположной гранью пластины, поэтому амплитуда волны оттекающего от ребра волнового потока только уменьшается за счет снижения плотности энергии $\exp(-k_1 r)$. Профили возмущений, как в прямом, так и в обратном направлениях, искажены и отличаются от синусоидального.

На рис. 3 показана интерференционная структура акустического поля клиновидной пластины с углом раствора 26° . Счетное количество пучностей антисимметричной волны объясняется короткой областью изменения скорости антисимметричной волны. Расстояния между пучностями стоячей волны при приближении к ребру увеличиваются, что свидетельствует об уменьшении скорости моды поверхностной волны.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью экспериментальной части работы явилось подтверждение полученных теоретических результатов. Согласно проведенным исследованиям выяснилось, что дистанция между пучностями стоячей волны обычно невелика. Так, например, для образца из дюралюминия, согласно расчетам, на частоте 2.5 МГц расстояние составляет порядка нескольких миллиметров. В этой связи является актуальной задача экспериментального определения картины волнового поля, поскольку применяемые традиционные пьезодатчики имеют размеры, намного превышающие размеры зон локализации энергии исследуемых волн. С этой целью была разработана оригинальная установка, использующая электромагнито-акустический (ЭМА) метод приема колебаний [9]. Амплитуды возмущений измеряли ЭМА приемником, состоящий из электромагнита и индуктора, выполненного в виде прямого проводника [10].

ЭМА приемник работает следующим образом. Колебания частиц среды в образце, вызываемые волной, в магнитном поле ЭМА приемника сопровождаются появлением сил Лоренца, действующих на электроны проводимости. В металлическом образце возникают магнитоакустические токи, излучающие электромагнитную волну в окружающее пространство, и которые принимаются затем индуктором. Индуктор 3 представляет собой прямой тонкий проводник 7 диаметром 0.015 мм и расположен на подложке из фольгированного гетинакса (рис. 4а). Клиновидная пла-

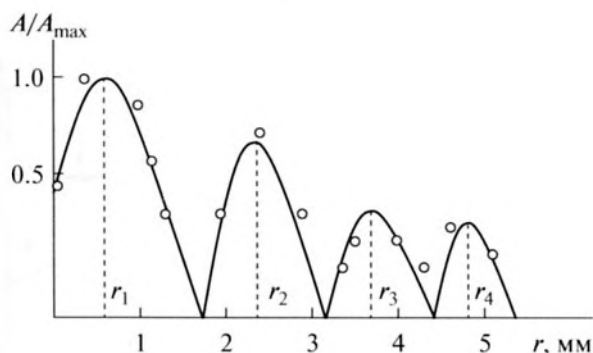


Рис. 3. Зависимость амплитуды стоячей волны от расстояния до ребра для угла клина 26° .

стина была выполнена из дюралюминия марки D16 с размерами 100×50 мм и с углом раствора 26° . Волну Рэлея возбуждали на утолщенной части образца наклонным пьезодатчиком 2 с углом ввода 70° импульсами длительностью 5 мкс и с частотой заполнения 2.5 МГц в направлении, перпендикулярном ребру клина (рис. 4б). Электрические сигналы с индуктора 3, пропорциональные смещениям волны, через предварительный усилитель 5 поступали на цифровой осциллограф 6. Образец перемещали в направлении, перпендикулярном ребру относительно неподвижного ЭМА приемника, с помощью микровинта (на рисунке не показан) с шагом 0.5 мм. Опытные данные, полученные на установке, приведены на рис. 3.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенные исследования показали, что в клиновидной пластине распространяется специфическая разновидность неоднородных волн. В силу малоизученности этих волн представляется полезным вначале рассмотреть распространение волн в плоскопараллельной пластине. При больших толщинах в пластине возникает квазирэлеевская неоднородная волна, распространяющаяся вблизи поверхности. В силу неоднородности волновые нормали продольных и сдвиговых колебаний составляющих этой волны не коллинеарны вектору лучевой (групповой) скорости, направленной вдоль поверхности. Важно отметить, что скорость волны определяется граничными условиями на поверхности, где в силу резонансной природы волны выполняется условия наилучшего возбуждения. В прилегающем слое условия распространения волны изменяются и скорость волны, согласно законам акустики, должна стремиться к скорости объемной волны, имеющей более высокое значение. Поэтому, вследствие рефракции, траектория этой волны будет неустойчивой и будет смещаться к поверхности, приобретая локальный характер распространения. С уменьшением толщины смещения в этой волне начинают дости-

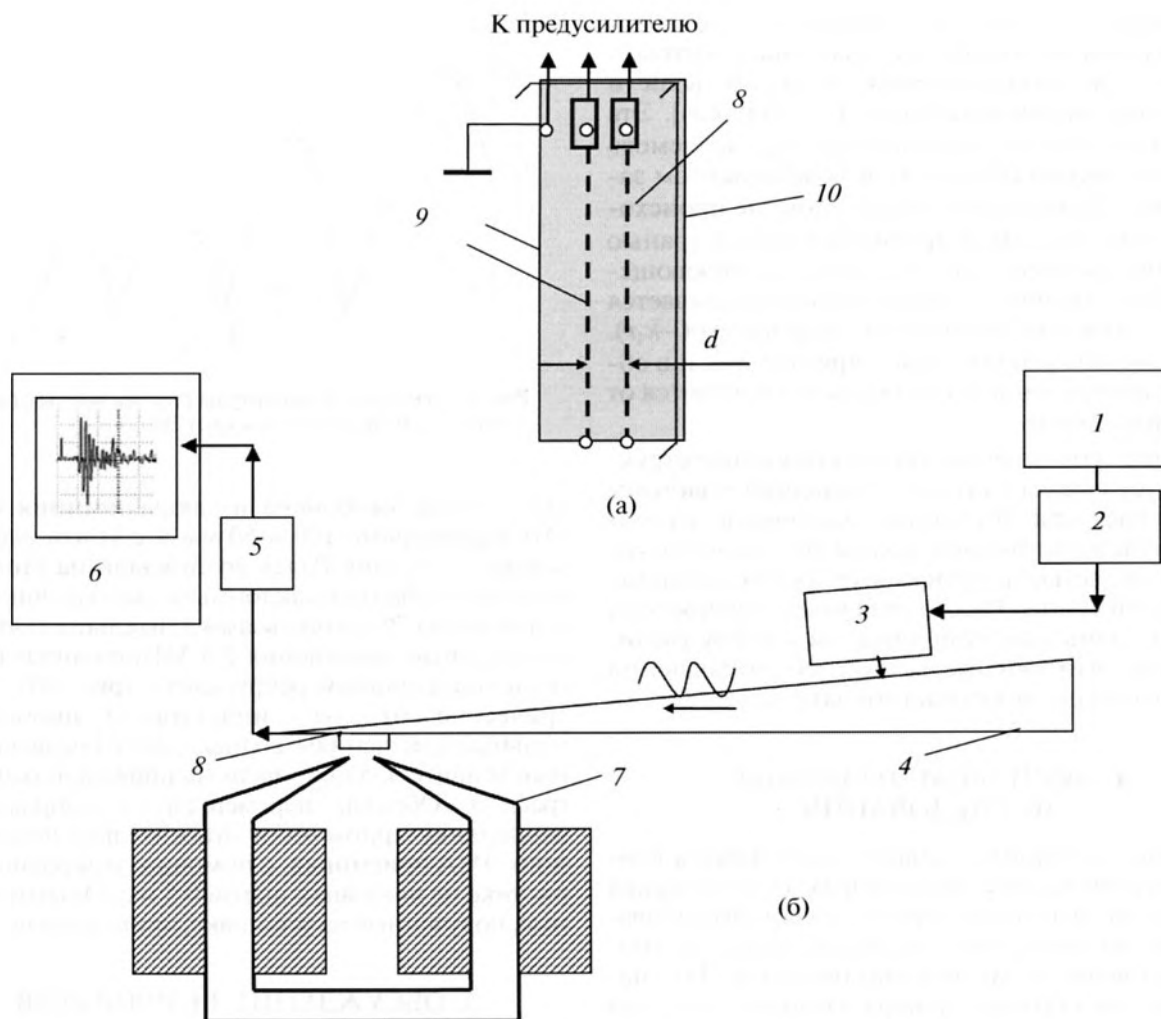


Рис. 4. Схема лабораторной установки: 1 – генератор импульсов АНР 1001; 2 – высоковольтный усилитель; 3 – пьезодатчик; 4 – изделие; 5 – преусилитель; 6 – осциллограф GDS-2202; 7 – электромагнит; 8 – индуктор с проводниками 9, 10.

гать противоположной поверхности пластины. Неоднородное волновое поле будет сосредотачиваться вблизи двух поверхностей пластины, образуя нормальную волну Лэмба. Поперечная неоднородность этой волны будет характеризоваться быстрым его спадом вблизи поверхностей. Степень локализации волны у поверхности определяется экспоненциальным множителем и возрастает с уменьшением толщины пластины. Это приводит к увеличению проекции волнового вектора на поверхности пластины антисимметричной составляющей волны a_0 и к снижению ее скорости. Проекция волнового вектора продольной составляющей уменьшается, что приводит к возрастанию симметричной составляющей скорости s_0 .

Схожая картина возникает в клиновидной пластине. С приближением к ребру уменьшается локальная толщина, что приводит к уменьшению скорости антисимметричной составляющей. При

этом волновой поток, теряя скорость, сжимается, достигая у ребра максимальной плотности энергии. В обратном направлении поток расширяется, двигаясь от ребра и набирая скорость. Плотность энергии волнового потока при этом уменьшается, что ведет к спаду амплитуды. Этот эффект является специфическим и характерен только для клиновидной пластины.

Таким образом, уменьшение толщины пластины ведет к замедлению скорости волнового потока, движущего к ребру клина, и его сжатию. В обратном направлении утолщение пластины приводит к увеличению скорости волнового потока. Рассмотренные процессы аналогичны процессам, происходящие в пружине: кинетическая энергия колебаний переходит в потенциальную энергию сжатой пружины, а затем следует обратный процесс – потенциальная энергия пружины переходит в энергию движения.

6. ВЫВОДЫ

Анализ акустических характеристик поверхностной волны в клине, проведенных в рамках классического подхода, приводит к выводу о том, что исследования выявили экспериментально подтверждаемый особый тип поверхностных волн, сопровождающийся в ходе движения непрерывной перестройкой акустического поля и излучением объемных волн. Изменение амплитуды возмущений в направлении распространения в сочетании с изменением скорости позволяет классифицировать эти волны как специфическую разновидность акустических волн. Возникающая при отражении от ребра стоячая неоднородная волна радикально отличается от ранее известных. Так, например, искаженная акустическая структура поля, являющаяся суммой двух разнонаправленных неоднородных волн, формируется из волн с малой интенсивностью. При приближении к ребру происходит сжатие волнового потока, скорость частиц среды снижается вплоть до полной остановки у ребра, а в обратном направлении плотность потока уменьшается с нарастанием скорости до рэлеевской волны. Все это свидетельствует о том, что наблюдается новое физическое явление: обратная волна в клиновидной пластине возникает не за счет отражения от ребра, а вследствие ее сжатия, как в пружине. Согласно закону сохранения кинетическая энергия падающей волны преобразуется в потенциальную у ребра и затем — потенциальная энергия в кинетическую при обратном движении волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Толипов Х.Б.* Акустическое поле рэлеевской волны // Сб. трудов XXII сессии РАО. М.: ГЕОС, 2010. Т. 1. С. 260–263.
2. *Коробов А.И. и др.* Клиновые волны // Сб. трудов XXIV сессии РАО. М.: ГЕОС, 2011. Т. 1. С. 228–232.
3. *Боженко В.В., Иванов-Щиц К.М., Случ М.И., Солодов И.Ю.* Экспериментальное исследование клиновых акустических волн // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 2. С. 262–264.
4. *Крылов В.В., Рагузина И.В.* Рассеяние клиновых акустических волн // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 5. С. 949–951.
5. *Гринченко В.Е., Мелешко В.В.* Свойства гармонических волн, распространяющихся вдоль ребра прямоугольного упругого клина // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 2. С. 206–212.
6. *Бирюков С.В. и др.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991.
7. *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэля и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966.
8. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 225 с.
9. *Бучельников В.Д., Васильев А.Н.* Электромагнитное возбуждение звука в ферромагнетиках // УФН. 1992. Т. 162. № 3. С. 90–128.
10. *Толипов Х.Б., Толипова Ю.Х.* Устройство для измерения скорости поверхностной акустической волны. Патент № 115492. РФ. МПК G01N 29/00. Опубл. 27.04.2012. Бюл. № 12.