АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2013, том 59, № 6, с. 698–708

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

УДК 534.22,534.23

ТОРМОЖЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЕМ И "АКУСТИЧЕСКИЙ РЕЛЯТИВИЗМ" ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

© 2013 г. Ю. А. Фридман

НИЦ "Курчатовский институт"

123182 Москва, пл. Академика Курчатова 1

E-mail: yulya-fridman@yandex.ru

Поступила в редакцию 03.04.2013 г.

Рассмотрено взаимодействие движущегося тела со сжимаемой средой в свете электродинамических аналогий. Для шарообразного тела вычислена "релятивистская" поправка к присоединенной массе, а также сила торможения излучением. Рассмотрено как движение с малыми скоростями, так и случай околозвукового движения. Для сравнения с трехмерным случаем решена одномерная задача о движении баржи в канале с учетом дисперсии поверхностных гравитационных волн. Обсуждается вопрос о стационарном решении с учетом дисперсии и нелинейности.

Ключевые слова: присоединенная масса, торможение излучением, акустическое поле, звуковой порог, зарядовое представление, релятивистский рост массы.

DOI: 10.7868/S0320791913060063

ВВЕДЕНИЕ

Проблема "самодействия" в классической электродинамике, т.е. взаимодействия источника с полем, создаваемым им самим, все еще содержит неразрешенные парадоксы. При движении источник, во-первых, "набирает" релятивистскую массу. Во-вторых, он излучает энергию и, следовательно, испытывает радиационное торможение. Эти два эффекта известны больше ста лет, а точный учет их бывает сопряжен с теоретическими трудностями, обсуждавшимися подробно в [1, 2] и других классических трудах по электродинамике. Известна монография А.А. Власова [3], посвященная вопросам радиационной отдачи.

Эффективная электромагнитная масса, введенная Дж.Дж. Томсоном в 1881 году [4], возникла как аналог присоединенной массы в гидродинамике (введенной в 1843 г. Дж.Г. Стоксом [5]). Позднее, в рамках релятивистской парадигмы, понятие электромагнитной массы претерпело эволюцию, но аналогия не утратила актуальности. Задача о движении тела в сжимаемой жидкости развивает эту аналогию, как по линии присоединенной массы, которая приобретает "релятивистскую" зависимость от соотношения скорости тела и скорости звука, так и по линии торможения излучением.

ВРЕМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ

Всюду ниже речь идет о безвихревых, потенциальных течениях в жидкости. В отличие от электродинамики, где отсутствует монопольное излучение, "источник" или "сток" жидкости в гидродинамике может быть переменным. Простейший пример такого "переменного заряда" – колеблющийся пузырек воздуха в жидкости. В задаче о поле переменного источника мощностью $q(t)$ возникает время запаздывания $\tau = t - r/c$, где r – расстояние до источника [8]. Такое же сферически симметричное запаздывание возникает при рассмотрении излучения в дальнем поле от системы зарядов, которая может менять свой дипольный момент (см., например, [9]).

В задаче о поле движущегося источника запаздывание уже не будет сферически симметричным. Если точечный источник движется с постоянной скоростью $\mathbf{u} = \text{const}$, то волновое уравнение имеет вид:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \Delta\phi = q(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{u}t). \qquad (1)$$

Здесь ϕ – скалярный потенциал поля скоростей в сжимаемой жидкости, c – скорость звука в среде, $q(t)$ – мощность точечного источника, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, характеризующий положение источника. Его можно решить с использованием функции Грина для оператора Даламбера. Направим ось x параллельно движению источника. Решение (потенциал) представляется следующей формулой:

$$\phi = \frac{q(\tau)}{\tilde{r}}, \qquad (2)$$

где время запаздывания $\tau = t - \frac{u}{c^2 - u^2}\left(x - \int u\,dt\right) - \frac{c}{c^2 - u^2}\tilde{r}$, а величина $\tilde{r}$ определяется как $\tilde{r} =$

$= \sqrt{\left(x - \int u dt\right)^2 + \frac{1}{\gamma^2}(y^2 + z^2)}$. Здесь $\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - u^2}$ – коэффициент “релятивистского” сжатия, x, y, z – декартовы координаты. Для случая $\mathbf{u} = \text{const}$ такую же формулу (с постоянным q) можно найти в [10].

Если скорость источника изменяется, время запаздывания зависит от всей истории движения. Эту функциональную зависимость можно передать как функцию скорости и ее производных в текущий момент времени t, при условии $u \ll c$, а также (при любом натуральном n) $w \lesssim u_0 \ll c$, где $w^{n+1} = \frac{d^n n}{dt^n} R^n$, а $u_0 \ll c$ – некая величина, имеющая размерность скорости и задающая характерный малый параметр для скорости источника и ее производных. Время запаздывания вплоть до третьего порядка малости для прямолинейного движения записывается как:

$$\tau = t - \frac{u}{c^2 - u^2}\kappa - \frac{c}{c^2 - u^2}(\tilde{r} - R) - \frac{\dot{u}}{2c^3}\kappa\tilde{r}, \qquad (3)$$

где $\kappa = x - \int u\, dt$. В общем случае ускорение не обязательно направлено по оси x, так что в (3) вместо последнего члена, содержащего производную скорости, следует писать $-\frac{(\dot{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{r}})\tilde{r}}{2c^3}$. Поле диполя “дифференцирует” поле точечного заряда в направлении своего момента и, в случае переменного по величине диполя, движущегося параллельно своему моменту, имеет вид:

$$\phi = \frac{\partial}{\partial x}\frac{Q(\tau)}{\tilde{r}}, \qquad (4)$$

где Q – величина дипольного момента.

НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Равномерное прямолинейное движение шара в несжимаемой жидкости и обтекание шара жидкостью создают в среде поле скоростей, которое вне области, занимаемой шаром, совпадает с полем движущегося дипольного источника с дипольным моментом, пропорциональным uR^3, где u – скорость шара, R – его радиус (см. например [9, 11]). Линейная зависимость поля скоростей в жидкости от скорости движения шара дает хорошо известное значение для присоединенной массы $\frac{2\pi}{3}\rho R^3$, где ρ – плотность жидкости. В сжимаемой жидкости это соотношение корректируется, возникает зависимость потенциала от релятивистского отношения u/c. Если движение остается прямолинейным, но скорость его меняется, появляется излучение звука и добавки к присоединенной массе. При наличии малого параметра, ограничивающего и производные скорости (см. выше), “звуковые” и “инертные” члены хорошо разделены, и их можно изучать по отдельности. Для того, чтобы составляющие энергии/потенциала, ответственные за присоединенную массу и за звук, хорошо разделялись, время пробега звуком характерной длины задачи (см. [7]; здесь – радиуса шара) должно быть малым по сравнению со временем изменения скорости.

Сила, с которой шар действует на жидкость, совершает работу, которая идет, во-первых, на изменение кинетической и потенциальной энергии “близлежащей” жидкости, тем самым создавая добавку к коэффициенту инерции, т.е. присоединенную массу. Во-вторых, она идет на излучение звука. Для вычисления “релятивистского” эффекта зависимости присоединенной гидродинамической массы от соотношения u/c пользоваться линейным волновым уравнением не вполне корректно. Запишем уравнения Эйлера и непрерывности:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \qquad (5)$$

Здесь, как обычно, $\mathbf{v}$ задает поле скоростей в среде, p – давление, ρ – плотность среды. Для случая безвихревого движения $\mathbf{v} = \nabla\phi$ нелинейный член в уравнении Эйлера $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{(\nabla\phi)^2}{2}$. Полагая $\nabla p = c^2\nabla\rho$, после стандартных преобразований получаем уравнение

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi)^2 + \left(\nabla\frac{(\nabla\phi)^2}{2}, \nabla\phi\right)\right) + \Delta\phi = 0. \qquad (6)$$

Нетрудно проверить, что при $u = \text{const}$ вблизи границы шара все члены в скобках в левой части (6) одного порядка, так что им отвечают сравнимые поправки к присоединенной массе, возникающие из-за сжимаемости.

Что касается задачи об излучении звука, то она остается линейной: (а) в дальнем поле нелинейные поправки быстро убывают с расстоянием, и на бесконечность излучения не уносят; (б) расчеты показывают, что нелинейные поправки ничего не прибавляют к той составляющей силы давления жидкости на границу шара, которая отвечает за радиационное торможение. Разумеется, о “линейности” задачи, как и о применимости метода последовательных приближений, следует говорить в диапазоне параметров $\frac{u}{R} \ll \omega \ll \frac{c}{R}$, где $\omega^2 = \ddot{u}/u$ – частота излучения, как видно из (5). Точкой обозначено дифференцирование по времени.

ДВИЖУЩИЙСЯ ШАР КАК СИСТЕМА ДИПОЛЕЙ, ИСКАЖЕННАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Как упоминалось выше, в однородной среде тело неизменного объема, движущееся с переменной скоростью, излучает, как диполь с переменным моментом. Действуя в рамках метода последовательных приближений, будем исходить из того, что в ряду разложения потенциала по малому параметру нулевой член должен иметь дипольную структуру.

Выбирая

$$\phi_0 = \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{A}(\tau)R^3}{2\tilde{r}}\right), \tag{7}$$

где $\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{u}(t)$ по определению (удобно разделять "скорость в роли системы точечных зарядов" и "скорость движения системы зарядов"), R – радиус шара, мы получаем при $c \longrightarrow \infty$ поле, создаваемое движущимся шаром в несжимаемой жидкости, а при $\mathbf{u} = \text{const}$ – поле движущегося точечного диполя, которое в сжимаемой среде отличается от поля, создаваемого шаром, из-за нелоренцевости граничных условий.

Если шар движется с переменной скоростью, то в разложении ϕ_0 из (7) по малому параметру возникнет ненулевой член первого порядка. Дипольная добавка, корректирующая граничные условия (непротекание жидкости через границу шара, то есть, $\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R} = u\cos\theta$) в первом порядке, дается выражением

$$\phi_1 = \operatorname{div}\left(-\frac{\dot{\mathbf{A}}(\tau)R^4}{2c\tilde{r}}\right). \tag{8}$$

Во втором порядке также нужно корректировать граничные условия дипольного типа, т.е. пропорциональных $\cos\theta$, где θ – "зенитный угол" между направлением дипольного момента и радиус-вектором точки границы. Но, кроме этого, во втором порядке уже будет проявляться различие между τ и t в точках границы шара и "сжатость" $\tilde{r}$ по сравнению с r, и то, что $\dot{u} \neq 0$ – ведь "сжатый запаздывающий диполь" (7), (8) является решением линейного волнового уравнения только при $\mathbf{u} = \text{const}$ – и собственно нелинейность. Однако, исходя из того, что задача об излучении звука (и торможении излучением) остается дипольной и линейной, имеет смысл выписать отдельно "дипольную" часть потенциала во втором порядке

$$\phi_{2dipole} = \operatorname{div}\left(\frac{\ddot{\mathbf{A}}(\tau)R^5}{4c^2\tilde{r}}\right). \tag{9}$$

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА

Рассчитаем излучение звука движущимся шаром. Окружая шар большой сферой, рассчитывая уносимую мощность и устремляя радиус сферы к бесконечности, видим, что для расчета актуален член разложения потенциала

$$-\frac{1}{c}\frac{\dot{A}(\tau)R^3\cos\theta}{2\tilde{r}}$$

(это компонента дипольного потенциала (7), которая попадает в первый порядок малости), так как именно с ним связан первый не уходящий в ноль на бесконечности член разложения. Величина, которая рассчитывается, есть интеграл по поверхности шара от линейного давления $\rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t}$, умноженного на скорость через границу $\frac{\partial\phi}{\partial r}$. Первый неисчезающий член возникает из

$$\oint\rho_0\left(-\frac{1}{c}\frac{|\ddot{\mathbf{A}}(\tau)|R^3\cos\theta}{2R_\infty}\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)\frac{1}{c}\frac{|\ddot{\mathbf{A}}(\tau)|R^3\cos\theta}{2R_\infty}\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)\right)\times$$
$$\times 2\pi R_\infty^2\sin\theta d\theta,$$

т.е. мощность излучаемого звука

$$I = -\frac{1}{c^3}\frac{\pi}{3}\rho_0(\ddot{\mathbf{A}}(\tau))^2R^6, \tag{10}$$

что представляет собой мощность дипольного излучения.

ТОРМОЖЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Тело, которое движется в сжимаемой среде с постоянной скоростью, не излучает звука. Действуя по методу, описанному в [9] (гл. VIII, задача 6 к §74), нетрудно убедиться в том, что если в некоторый момент скорость получила приращение, излученный звук от стартового значения u_0 не зависит. Радиационное торможение, как и интенсивность звука, зависит от всей истории движения: строго говоря, это не функция момента времени t, а функционал в пространстве $u(t)$. Но при обсуждаемых условиях – при достаточной гладкости $u(t)$ и наличии малого параметра – функционал можно превратить в степенной ряд, вычисляемый в текущий момент времени t. Старшие производные скорости в нем будут отражением эффектов запаздывания.

Рассчитаем давление на шар, положив $u = 0$ (это локальное равенство), чтобы отвлечься от загромождающих вычисления поправок на "релятивистский" рост присоединенной массы. По закону Бернулли давление $p = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} - \rho\frac{(\nabla\phi)^2}{2}$. Подсчет суммарного давления на шар, за которое ответственна система дипольных потенциалов (см. выше), нетрудно осуществить с учетом осевой симметрии каждого дипольного слагаемого. Так, работая с системой диполей, в нулевом по-

рядке получаем силу давления $-\frac{2\pi}{3}\rho_0 R^3\dot{\mathbf{u}}$ – "несжимаемая" присоединенная масса, умноженная на ускорение, как и должно быть.

В первом порядке при $u = 0$ сила давления обращается в ноль.

Во втором порядке вычисления дают для силы $\frac{\pi}{3}\frac{\ddot{\mathbf{u}}R^5}{c^2}$. Это выражение не относится к радиационному торможению. Если умножить данную составляющую на $\mathbf{u}$ и проинтегрировать по dt за все время движения, то увидим, что этот член отвечает за изменение во времени составляющих энергии системы, чья плотность в пространстве пропорциональна $(\dot{A}(\tau))^2$ и $A(\tau)\ddot{A}(\tau)$, возникающих во втором порядке. Эти члены не диссипативны и могут естественно возникать в гамильтоновых системах. Если система имеет внутренние колебательные степени свободы, энергия может временно "запасаться" в них при движении.

В третий порядок из составляющих потенциала скорости с дипольной структурой (9) попадает "моном"

$$\phi_{3radiation} = -\frac{\ddot{A}(\tau)R^5\cos\theta}{4c^3\tilde{r}}. \qquad (11)$$

Дифференцируя его по времени при условии $\mathbf{u} = 0$ и интегрируя по поверхности шара, получим составляющую силы

$$\mathbf{F}_{rad} = -\frac{1}{c^2}\frac{\pi}{3}\rho_0\ddddot{\mathbf{u}}R^6. \qquad (12)$$

Мы отождествили на границе шара $\mathbf{A}(\tau)$ и $\mathbf{u}(t)$. Умножая эту компоненту на $\mathbf{u}$ и интегрируя за все время движения, видим, что полученное выражение совпадает с излученной мощностью (10). Проверка показывает, что других членов подобной структуры, которые могли бы отвечать за торможение излучением, в выражении для силы не возникает. Радиационное торможение оказывается пропорциональным четвертой производной от скорости шара.

ПРИСОЕДИНЕННАЯ МАССА

Присоединенная масса M_{added} описывает добавочную инерцию, приобретаемую телом при движении в среде. Напишем закон сохранения энергии:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mu^2}{2} + \int\frac{\rho v^2}{2} + \int\rho\epsilon\right) = (\mathbf{F}, \mathbf{u}) + (\mathbf{F}_{rad}, \mathbf{u}), \qquad (13)$$

где первый член в скобках есть кинетическая энергия движущегося тела, второй член – кинетическая энергия, которую приобретает среда, третий – внутренняя энергия среды. Интегрирование производится по объему большого шара с радиусом, который можно устремить к бесконечности. Если нет проблем со сходимостью, можно интегрировать сразу по всему бесконечному объему. Тогда второй член в правой части уравнения выпадает из ответа – настоящей диссипации нет и энергия сохраняется. Поток энергии на бесконечность имеется (и отвечает как раз слагаемому $(\mathbf{F}_{rad}, \mathbf{u})$), а перехода ее в тепло – нет. Справа $\mathbf{F}$ – внешняя сила, действующая на тело, $\mathbf{F}_{rad}$ – торможение излучением звука. Очевидно, что если сумму двух интегралов в скобках удастся привести к виду $M_{added}\,u^2/2$, то коэффициент перед $u^2/2$ и будет присоединенной массой такой, что $M_{eff} = m + M_{added}$ – эффективная масса из второго закона Ньютона – в том случае, если M_{added} не зависит от скорости u.

Если же (в сжимаемой среде) присоединенная масса "релятивистским образом" растет с увеличением скорости, то это сказывается на коэффициентах. Действительно, пусть коэффициент при $u^2/2$ представлен рядом по малому параметру:

$$M_{added} = M_0 + M_2\frac{u^2}{c^2} + \ldots .$$

Продифференцируем в (13) выражение в скобках по времени и получим второй закон Ньютона, умноженный скалярно на $\mathbf{u}$. Коэффициент при $(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u})$ тогда окажется равным

$$M_0 + 2M_2\frac{u^2}{c^2} + \ldots . \qquad (14)$$

Считая $\mathbf{u} = \text{const}$, вычислим присоединенную массу безграничной сжимаемой среды. От системы диполей, описанной в соответствующем разделе, при постоянной скорости останется только диполь из нулевого порядка, причем из всех его составляющих выживает лишь:

$$\phi_{00} = -\frac{uR^3\kappa}{2\tilde{r}^3}. \qquad (15)$$

Действуя методом последовательных приближений, получаем на следующем шаге:

$$\Delta\phi_2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\phi_{00}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi_{00})^2 + \left(\nabla\frac{(\nabla\phi_{00})^2}{2}, \nabla\phi_{00}\right)\right) \qquad (16)$$

(Нечетные члены ряда по u_0/c при $u = \text{const}$, очевидно, исчезают из разложения). Подставляя выражение для ϕ_{00} из (15) в правую часть и разрешая полученное уравнение Пуассона, найдем

$$\phi_2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{3}{4}uR^6\frac{\cos^3\theta}{\tilde{r}^5} - \frac{1}{4}uR^6\frac{\cos\theta}{\tilde{r}^5} - \frac{15}{352}uR^9\frac{\cos^3\theta}{\tilde{r}^8} - \right.$$
$$\left. - \frac{17}{1056}uR^9\frac{\cos\theta}{\tilde{r}^8}\right) + \chi_2,$$

где θ – угол радиус-вектора точки среды с осью движения, $\cos\theta = \frac{\kappa}{r}$ (напомним, во втором порядке r и $\tilde{r}$ отождествлены), χ_2 – некая функция с нулевым лапласианом.

Добавка χ_2 находится из граничных условий

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R} = u\cos\theta, \tag{17}$$

поскольку $\Delta\chi_2 = 0$, она строится из полиномов Лежандра. Окончательный вид потенциала во втором приближении при $\mathbf{u} = \text{const}$:

$$\phi_2 = \frac{u^2}{c^2}\Big(-\frac{1}{30}uR^3\frac{\cos\theta}{\tilde{r}^2} + \frac{81}{110}uR^5\frac{\cos\theta}{\tilde{r}^4} - \\ -\frac{27}{22}uR^5\frac{\cos^3\theta}{\tilde{r}^4} + \frac{3}{4}uR^6\frac{\cos^3\theta}{\tilde{r}^5} - \frac{1}{4}uR^6\frac{\cos\theta}{\tilde{r}^5} - \\ -\frac{15}{352}uR^9\frac{\cos^3\theta}{\tilde{r}^8} - \frac{17}{1056}uR^9\frac{\cos\theta}{\tilde{r}^8}\Big). \tag{18}$$

Вычисляя энергию согласно (13) – и принимая здесь, что (вплоть до четвертого порядка малости) вместо внутренней энергии $\int\rho\epsilon$ можно подставить квадратичную потенциальную энергию звуковой волны из линейной теории звука $\int\frac{c^2\tilde{\rho}^2}{2\rho_0}dV$ (см. [9], § 65) – получаем в нулевом порядке известное выражение для присоединенной массы из задачи о движении шара в несжимаемой жидкости:

$$M_0 = \frac{2\pi}{3}\rho_0 R^3,$$

т.е. массу той же жидкости, налитой до половины в полый шар того же объема. Здесь ρ_0 – равновесная плотность среды, $\tilde{\rho}$ – возмущенная добавка к ней. Во втором порядке получаем

$$M_2 = \frac{23}{15}\frac{u^2}{c^2}\pi\rho_0 R^3. \tag{19}$$

Если теперь вернуться к задаче с и $\mathbf{u} \neq \text{const}$, то придется учесть члены разложения потенциала, возникающие из-за непостоянства скорости. Расчеты получаются громоздкими, и мы ограничимся случаем прямолинейного ускоренного движения. В первом порядке это уже известные нам составляющие дипольных потенциалов; во втором порядке к (18) добавится

$$\eta_2 = \frac{1}{c^2}\Big(\frac{1}{4}\frac{A(\tau)\dot{u}R^3\cos^2\theta}{\tilde{r}} - \frac{1}{12}\frac{A(\tau)\dot{u}R^3}{\tilde{r}} + \\ +\frac{1}{2}\frac{\ddot{A}(\tau)R^4\cos\theta}{r} - \frac{1}{4}\frac{\ddot{A}(\tau)R^5\cos\theta}{r^2} - \\ -\frac{1}{36}\frac{A(\tau)\dot{u}R^5(3\cos^2\theta-1)}{\tilde{r}^3} + \frac{1}{4}\frac{A(\tau)\dot{A}(\tau)R^6\cos^2\theta}{\tilde{r}^4}\Big). \tag{20}$$

Здесь третье и четвертое слагаемое в скобках происходят из "системы трех диполей", которой мы аппроксимировали движение шара выше.

Для проверки корректности выбранной модели определим давление жидкости на стенки шара до второго порядка малости, отбрасывая члены с высшими производными. Получим:

$$F_{fluid\ pressure} = -\frac{2\pi}{3}\rho_0 R^3\dot{u} - \frac{u^2}{c^2}\frac{46}{15}\pi\rho_0 R^3\dot{u}. \tag{21}$$

В первом порядке давления не возникает; в нулевом и во втором (с точностью до отброшенных членов, содержащих высшие производные скорости) закон изменения импульса с введенной выше присоединенной массой в точности соответствует (14).

ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ ОКОЛОЗВУКОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ШАРА

При движении шара с околозвуковой скоростью нелинейные эффекты приобретают принципиальное значение. Используя развиваемую в акустике ХЗ (Хохлова–Заболотской) идеологию (см. [14–16], [18]), можно получить уравнение, описывающее эволюцию потенциальных возмущений, возникающих при небольших колебаниях скорости шара. Выражения для времени запаздывания и потенциала источника (со "сжатым радиусом" $\tilde{r}$), приведенные выше, показывают, что при $u \longrightarrow c$ излучение звука распространяется в основном "направо", в узком конусе, так что относительно времени запаздывания (далеко справа от шара) можно принять $\tau \simeq t - \frac{1}{c-u}(x - \int u\,dt)$.

Если далее положить $\mu = \frac{c-u}{c}$ и считать его единым малым параметром задачи (так, что амплитуды потенциальных возмущений p, ρ, v_x примерно в μ раз отличаются от стационарных значений соответствующих величин), то, приняв $T = \mu\tau$, $Y = \sqrt{\mu}y$, $Z = = \sqrt{\mu}z$, $X = x - \int u\,dt$, получим (как нетрудно проверить, исследовав уравнения гидродинамики в новых переменных) $\frac{\partial}{c\partial T} \sim \frac{\partial}{\partial X} \sim \frac{\partial}{\partial Y} \sim \frac{\partial}{\partial Z}$. Возмущенные амплитуды поперечных компонент скорости, как становится видно из этого рассмотрения, имеют "дополнительную малость": v_y, $v_z \sim \mu^{3/2}c$, $v_x \sim \mu c$. Метод медленно меняющейся амплитуды, применяемый в акустике для ограниченных пучков (см. [15]–[18]) в предположении о сравнительно медленной зависимости характеризующих возмущение величин от поперечных координат y, z, для излучения шара заведомо годен и не требует дополнительных оговорок. Почему это так, видно из выражения для сжатого радиуса $\tilde{r}$. Поперечные координаты входят в него с релятивистским множителем, ко-

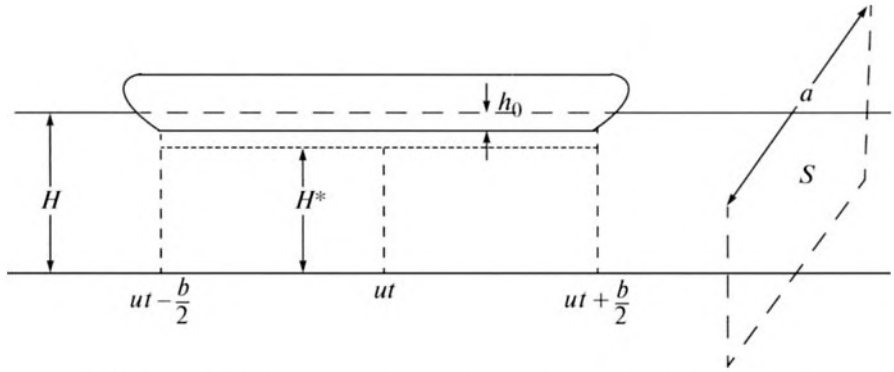

Рис. 1. Баржа с обтекаемыми краями перекрывает канал: продольный срез.

торый и является единым малым параметром задачи. Это значит, что подобные пучки можно получать, разгоняя шар (или любое твердое тело) до околозвуковых скоростей в сжимаемой среде.

Применяя стандартные процедуры, очерченные в [14–18], приходим к уравнению типа ХЗ (Хохлова–Заболотской, см. [16], [18]):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} - \frac{c(\gamma+1)}{2\rho_0}\rho\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) = c\Delta_\perp \rho. \qquad (22)$$

Нелинейность при выводе (22) считается слабой, так что зависимость возмущенного давления от возмущенной же плотности взята в виде $p = c^2\rho + c^2\frac{\gamma-1}{2\rho_0}\rho^2$.

Нужно подчеркнуть, что реальная задача об околозвуковом движении шара очень сложна, и не может быть ни безвихревой, ни адиабатической: будут возникать ударные волны, среда будет греться.

ТОРМОЖЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЕМ В ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Поскольку (см. [8]) характер излучения звука фундаментально зависит от размерности, имеет смысл для сравнения рассмотреть теперь одномерную задачу о релятивистском росте присоединенной массы и о торможении излучением (ср. одномерную задачу об излучении ионного звука ленгмюровским солитоном при его движении через неоднородность плазмы [12]). В качестве среды, в которой будет распространяться одномерный “звук”, отрываясь от локализованного возмущения, создаваемого движущимся объектом, выберем канал постоянной глубины H. Как известно [9], волны на мелкой воде имеют линейный закон дисперсии с постоянной скоростью распространения $c = \sqrt{gH}$, т.е. длинноволновые возмущения с длиной волны $\lambda \gg H$ можно рассматривать как одномерный звук. Считая характерную частоту возмущений $\omega^2 \sim \ddot{u}/u$, получаем условие применимости “акустической” трактовки событий на канале $\left|\frac{\ddot{u}}{u}\right| \ll \frac{g}{H}$. Вторым существенным неравенством здесь будет малость времени пробега звуком размера “частицы” b по сравнению с характерными временами задачи $\left|\frac{u}{\dot{u}}\right| \gg \frac{b}{c}$ [7]. Частицей, движущейся в среде, считаем протяженную баржу. Условимся, что наша частица лежит на воде поперек канала, перекрывая его в ширину целиком.

На рис. 1: H – глубина канала, $\mathbf{u}$ – скорость баржи, ut – координата центра масс баржи (в общем случае переменной скорости вместо ut следует поставить $\int u\,dt$), размер баржи вдоль направления движения обозначен b, так что координаты левого и правого края баржи $ut - b/2$ и $ut + b/2$ соответственно. Там же h_0 – глубина погружения свободно плавающей баржи, H^* – расстояние от дна плывущей баржи до дна канала, v_{ul} – скорость жидкости под баржей, отличная от нуля; наконец, S – площадь поперечного сечения в канале, a – поперечный размер канала, равный ширине баржи.

Показан зазор, обозначенный пунктирной линией: $h_0 + H^* < H$ – баржа, которая движется с ненулевой скоростью u, сидит в воде глубже, чем свободно плавающая. Действительно, положив $-w = v_{ul} - u$ скорость жидкости под баржей в системе отсчета, движущейся вместе с баржей, запишем в этой системе отсчета при $u = \text{const}$ стационарное уравнение Бернулли для линий тока, проходящих у дна канала:

$$p_{ul} + \rho\frac{w^2}{2} - \rho g H = p_\infty + \rho\frac{u^2}{2} - \rho g H.$$

Здесь p_{ul} – давление у дна канала под центром баржи, которое складывается из атмосферного давления p_0, давления силы тяжести баржи, равного $\rho g h_0$, и давления толщи воды над дном в этом месте, равного $\rho g H^*$. Справа в том же уравнении

давление p_∞, измеренное у дна канала далеко от баржи, складывающееся из атмосферного давления p_0 и давления толщи воды, равного ρgH.

Закон сохранения вещества (в системе отсчета, связанной с движущейся баржей):

$$-uH = (v_{ul} - u)H^*.$$

Отсюда получается кубическое уравнение для v (или для H^*). Удобно записать его для переменной $w = u - v$.

$$w^3 - w(u^2 + 2g(H - h_0)) + 2ugH = 0. \qquad (23)$$

Можно выписать точное решение кубического уравнения для скорости воды под баржей, но для наших целей достаточно приближенного, справедливого при $u \ll c$:

$$v_{ul} = u - w \simeq -\left(\frac{h_0}{H - h_0} + \frac{h_0}{H - h_0}\frac{u^2}{c^2}\right)u, \qquad (24)$$

где обозначено $c = \sqrt{gH}$.

Из выражения для скорости "под баржей" можно заключить, что наша "частица" при движении приобретает дополнительную инертность; второй член в скобках отвечает релятивистской поправке. В самом деле, кинетическая энергия движущейся воды под баржей есть (см. рис. 1)

$$E_{ul} = (\rho abH^*)\frac{v_{ul}^2}{2} \simeq \left(\frac{h_0}{H}\right)^2\left(1 + \frac{2u^2}{c^2}\right)\rho Sb\frac{u^2}{2}. \qquad (25)$$

Потенциальная энергия, в отличие от случая с шаром, добавляется за счет работы поля тяжести. Добавка к потенциальной энергии системы при переходе от свободного плавания к движению со скоростью u есть $\Delta E_p \simeq a \times \rho gb(\Delta h)^2/2 \simeq \rho Sgb \times \times \frac{h_0^2}{2H}\left(\frac{h_0}{H} + \frac{u^2}{c^2}\right)^2$, т.е. демонстрирует "релятивистский рост" и она. Через Δh здесь обозначена дополнительная осадка баржи, приобретаемая ею при движении.

Присоединенную массу можно рассчитать через энергию, а можно – через импульс. Если бы мы попытались это сделать, исходя из поля скоростей, найденного в одномерной модели (вода под днищем баржи движется в отрицательном направлении со скоростью (24) и покоится всюду справа и слева от баржи), получили бы парадоксальный результат: движение в среде не увеличивает, а уменьшает коэффициент инерции баржи. Такой результат был бы ошибочен: для достижения стационарного состояния баржа должна излучить со звуком положительный импульс, превышающий по модулю тот, что несет жидкость под днищем баржи, на величину, отвечающую присоединенной массе из формулы (25). Как это происходит, можно продемонстрировать на примере вспомогательной модельной задачи; мы здесь опускаем это рассмотрение.

Возвращаясь к задаче о барже в исходной ее постановке (рис. 1), заметим, что, исходя из того же закона Бернулли, уравнение можно выписать не для скорости, а для относительной осадки баржи $s = \frac{H - H^*}{H}$:

$$\frac{h_0}{H} = s + \frac{M^2}{2}\left(1 - \frac{1}{(1-s)^2}\right), \qquad (26)$$

где $M = \frac{u}{c}$ – число Маха. Исследуя это уравнение, можно убедиться в том, что при заданном $M < 1$ для каждого $h_0 < H$ существует максимальная относительная осадка $s < 1$. Действительно, зависимость h_0 от s передается кубической параболой, дифференцируя уравнение (26), получаем $\frac{dh_0}{ds} = 0$ при $(1-s)^3 = M^2$. Поскольку правая часть положительна, равенство достигается именно при $s < 1$. Чем меньше скорость баржи, тем ближе к 1 максимально возможная относительная осадка. Наличие такого ограничения означает, что слишком глубоко сидящая баржа может сесть на мель при попытке слишком быстро ее потащить: производная давления под ней по глубине погружения меняет знак, когда скорость потока под баржей $\frac{u}{1-s}$ сравнивается с локальной скоростью звука. Действительно, $c_{local}^2 = gH^* = c^2(1-s)$, так что случайное небольшое смещение баржи вниз повлекло бы за собой уменьшение давления под ее днищем: подобная флуктуация по достижении этой скорости становится неустойчивой. Максимальная осадка отвечает максимальной скорости потока под баржей (в системе отсчета, в которой баржа покоится), и соотношения между плотностью потока и давлением здесь аналогичны тем, что возникают при истечении газа через сопло [9] – наибольшая скорость, достижимая именно в самом узком месте сопла, равна местному значению скорости звука.

На графике зависимости (26) (см. рис. 2), как видно, наблюдается звуковой барьер в действии. При изменении скорости зависимость $s_0 = \frac{h_0}{H}$ от глубины просадки баржи s при данном значении числа Маха как бы движется относительно координатных осей. Жирным пунктиром показаны координатные оси для случая $M < 1$. Видно, что для данной скорости и малой глубине погружения баржи при свободном плавании все в порядке, но при слишком большом значении s_0 начинаются проблемы. При увеличении числа Маха максимально возможное значение s_0 становится все меньше. Наконец, при $M = 1$ ось абсцисс касается графика в начале координат: преодоление звукового барьера возможно только при условии $s_0 = 0$ для "частиц" нулевой массы. За звуковым барьером

(ось ординат – точечный пунктир) “частица” не просаживается, а поднимается при движении, как если бы она имела “отрицательную массу”. Релятивистские аналогии здесь очевидны.

Перейдем к вычислению торможения излучением при медленном ($u \ll c$) ускоренном движении баржи с малыми производными скорости, в пренебрежении дисперсией. Если записать для оси OX:

$$\phi_s = \left(\frac{h_0}{H-h_0} + \frac{h_0}{H-h_0}\frac{u^2}{c^2}\right)u(x-ut)\times \times\left(\theta\left[x-ut+\frac{b}{2}\right]-\theta\left[x-ut-\frac{b}{2}\right]\right), \quad (27)$$

где ϕ_s – потенциал одномерного поля скоростей в жидкости для стационарного случая $u = \text{const}$, $\theta[x]$ – функция Хевисайда (или она же, сглаженная сверткой с какой-нибудь подходящей функцией для лучшей обтекаемости). Видно, что потенциал ϕ удовлетворяет уравнению вида (1) с локализованной в пространстве правой частью с точностью до второго порядка по малому параметру u/c.

Для решения нестационарной задачи, когда скорость u меняется и наша “частица” начинает излучать звук, рассмотрим сначала уравнение вида (1) с учетом одномерной специфики. Одномерная задача о стационарном движении точечного источника поля с постоянным зарядом не имеет решения: возмущение накапливается, продолжая формироваться все время, пока активен источник. Иное дело диполь, для него и нужно формулировать задачу. Итак, в одномерном случае имеет смысл рассмотреть уравнение:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = q(t)\times \times\left(\delta\left[x-ut+\frac{b}{2}\right]-\delta\left[x-ut-\frac{b}{2}\right]\right), \quad (28)$$

которое имеет решение

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2c}\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} q(t)\times \times\left(\delta\left[\xi-u\tau+\frac{b}{2}\right]-\delta\left[\xi-u\tau-\frac{b}{2}\right]\right)d\xi d\tau.$$

При условии, что за время $\frac{b}{c}$ пробегания звуком расстояния между источником и стоком мощность их $q(t)$ меняется незначительно, получаем:

если $x - ut < -\frac{b}{2}$, то

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2c}q(\tau_1)\frac{b}{c+u},$$

где $\tau_1 = \frac{x+ct}{c+u}$;

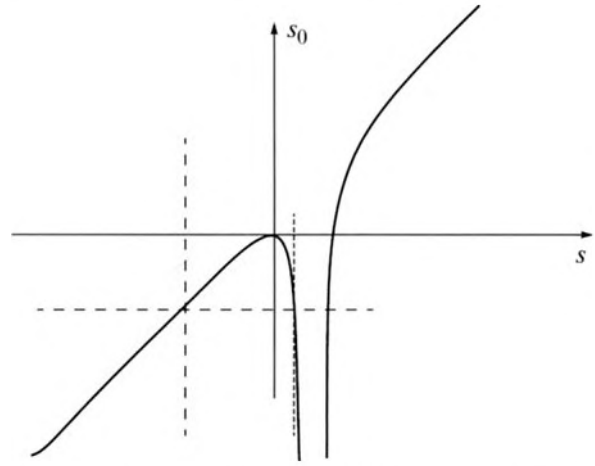

Рис. 2. Погружение баржи при свободном плавании в зависимости от значения ее “проседания” при заданном числе Маха.

если $-\frac{b}{2} < x - ut < \frac{b}{2}$, то

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2c}\left(-q(\tau_1)\frac{x-ut-b/2}{c+u} - - q(\tau_2)\frac{x-ut+b/2}{c-u}\right);$$

если $x - ut > \frac{b}{2}$, то

$$\phi(x,t) = -\frac{1}{2c}q(\tau_2)\frac{b}{c-u},$$

где $\tau_2 = \frac{ct-x}{c-u}$.

Заметим, что при $q(t) = \text{const}$ полученный потенциал на больших расстояниях от диполя теряет зависимость от пространственной координаты и становится немой добавкой к потенциалу локализованного возмущения.

Возвращаясь к потенциалу (27), мы теперь можем в соответствии с вышеозначенным получить его нестационарную часть, которая возникает в первом порядке по u_0/c, когда скорость u зависит от времени. (Здесь u_0 вводится аналогично тому, как это делалось выше в случае трехмерной задачи.) Будем впредь обозначать потенциал (27) через ϕ_s, имея в виду, что это стационарная часть общего потенциала одномерного поля скоростей, и вычислим в первом порядке по u_0/c его нестационарную часть.

Нетрудно видеть, что в первом порядке за излучение звука отвечает $\frac{\partial^2\phi_s}{\partial x^2}$, тогда как временная часть даламбертиана вступает в игру в следующих порядках по малому параметру

$$\frac{\partial^2\phi_s}{\partial x^2} = 2\alpha u(t)\Big(\dot\theta\Big[x - \int u dt + \frac{b}{2}\Big] -$$
$$- \dot\theta\Big[x - \int u dt - \frac{b}{2}\Big]\Big) + \alpha u(t)(x - \int u dt) \times \tag{29}$$
$$\times\Big(\ddot\theta\Big[x - \int u dt + \frac{b}{2}\Big] - \ddot\theta\Big[x - \int u dt - \frac{b}{2}\Big]\Big),$$

где $\alpha \simeq \frac{h_0}{H}$ – отношение скорости под бревном к скорости бревна, полученное при решении стационарной задачи. Сделав все нужные оговорки об иерархии масштабов, нетрудно убедиться, что в первом приближении мы снова приходим к полю дипольного источника, стоящего в правой части (28), причем $q(t) = c^2\alpha u(t)$. Воспользовавшись решениями, полученными выше для волнового уравнения с дипольным источником (28), определим в первом приближении интенсивность излучения звука, поток энергии в единицу времени, уходящий на бесконечность:

$$I = \Big(-\rho\frac{\partial\phi_{ns}}{\partial t}S\Big)\frac{\partial\phi_{ns}}{\partial x}\Big|_{x\to\pm\infty} \simeq$$
$$\simeq -\frac{1}{c}\frac{\rho S\alpha^2}{4}(\dot u^2(\tau_1) + \dot u^2(\tau_2))b^2. \tag{30}$$

Исходя из рассчитанной первой поправки к потенциалу вблизи от баржи, можно получить первую поправку к силе давления жидкости на баржу. Для этого нужно линейное давление в точках $x - ut - b/2$ и $x - ut + b/2$ умножить на нормальную к движению площадь края αS и сложить с соответствующими знаками. В результате получаем

$$F_{rad} = -\alpha S\rho\frac{\partial\phi_{ns}}{\partial t} = -S\frac{\rho\alpha^2 b}{2}\Big(\frac{c^2}{(c-u)^2}\times$$
$$\times\dot u(\tau_2)|_{x = ut + b/2} - \frac{c^2}{(c+u)^2}\dot u(\tau_1)|_{x = ut - b/2}\Big) = \tag{31}$$
$$= -\frac{\rho S\alpha^2 b^2}{2c}\ddot u(t).$$

Очевидно, что, будучи умножена на u и проинтегрирована за все время изменения скорости баржи, составляющая (31) полной силы давления даст в точности тот же результат, что интегрирование интенсивности (30) за все время излучения. Другими словами, эта составляющая действительно отвечает торможению излучением. Уравнение движения здесь можно было бы написать в первом порядке по малому параметру, которое содержало бы торможение излучением, но еще не включало бы в себя релятивистской массы.

РАСЧЕТ РАДИАЦИОННЫХ ПОТЕРЬ В ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Уравнение движения можно вывести из законов сохранения, действуя по аналогии с [7]. При выводе ограничимся случаем, когда баржу "потянули и отпустили" – внешняя сила уже обратилась в ноль, но стационарный режим еще не установился. Запишем суммарную энергию системы:

$$E = M_{eff}\frac{u^2}{2} + \frac{\rho g b(h^* - h_0)^2}{2} +$$
$$+ \int\frac{\rho g\zeta^2}{2} + \int\frac{\rho v^2}{2}(H + \zeta)dx. \tag{32}$$

Эффективная масса M_{eff} складывается, как обычно, из собственной массы "частицы" и присоединенной массы – коэффициента дополнительной инерции, предоставляемой средой. Через h^* обозначена осадка баржи при данной скорости движения ($h^* + H^* = H$), через ζ – смещение свободной поверхности воды в канале. Первые два слагаемых представляют собой кинетическую и потенциальную энергию "частицы", вторые два – энергию звука.

Обозначив через ζ_+ амплитуду звука, излучаемого в положительном направлении, через ζ_- – в отрицательном, запишем, во-первых, закон сохранения вещества:

$$\zeta_+(c - u) + \zeta_-(c + u) + \dot h^* b = 0. \tag{33}$$

Во-вторых, закон сохранения импульса:

$$(\dot P_{particle} + \dot P_{lost}) + \rho\zeta_+ c(c - u) + \rho\zeta_- c(c + u) = 0. \tag{34}$$

Здесь через $P_{particle}$ обозначен локализованный импульс "частицы", P_{lost} – импульс, линейный по скорости, ушедший на бесконечность при разгоне баржи до данного значения u. Суммарно $P_{particle} + P_{lost}$ отвечает значению эффективной массы, вычисляемой из кинетической энергии "частицы". Введем обозначение $P = P_{particle} + P_{lost}$.

Из уравнений (33) и (34) получаем для амплитуды уходящего направо и налево звука выражение

$$\zeta_\pm = \mp\frac{\dot J}{2\rho c(c \mp u)}, \tag{35}$$

где обозначено $J = P + \rho h^* bc$. Теперь можно записать закон сохранения энергии

$$\dot E_{particle} + \rho g\zeta_+^2(c - u) + \rho g\zeta_-^2(c + u) = 0 \tag{36}$$

и, подставив в него значения уже известных нам величин, получить уравнение движения баржи в канале. Здесь, однако, нужна оговорка. Энергия звука взята из линейной теории: в ней она квадратична, а значит, закон сохранения энергии выше записан не более чем с точностью до u^2/c^2. Поэтому достаточно вычислить первый член разложения по двум малым параметрам системы, $\alpha = h_0/H$ и $\beta = u/c$. А это значит, что дифференцирование величины J по време-

ни сводится к $\dot{J} \simeq \rho b h_0 \dot{u}$. Тогда получаем для радиационных потерь соотношение

$$I = \rho H b^2 \alpha^2 \left(\frac{\dot{u}^2}{4(c-u)} + \frac{\dot{u}^2}{4(c+u)} \right),$$

совпадающее с (30).

СТАЦИОНАРНАЯ КАРТИНА ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ДИСПЕРСИИ

Получим сначала нестационарные уравнения (при $u = \text{const}$) в более удобном виде, а затем перейдем к вопросу о стационарном режиме. Уравнение Бернулли на свободной поверхности дает в системе отсчета, связанной с баржей:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho u \hat{v}_x + \frac{1}{2}\rho(\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2) + \rho g \zeta = -f(x), \qquad (37)$$

где крышечки над компонентами возмущенной скорости означают, что берутся их значения на поверхности, $f(x)$ есть распределение внешнего давления на поверхность. Например, для баржи, которую мы рассматриваем, $f(x) = \rho g h_0$ внутри отрезка $[-b/2, b/2]$ и обращается в ноль вне его. Второе уравнение – закон неразрывности, он же (при $\rho = \text{const}$ и в случае безвихревого движения) – уравнение Лапласа. Его можно записать как

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta = -\frac{\partial}{\partial x} \int v_x dy. \qquad (38)$$

Преобразуем эти уравнения, действуя по схеме, принятой в [13] при выводе системы уравнений, из которой следует уравнение Кортевега-де-Фриза; при этом связь между средним значением горизонтальной скорости в толще канала и на поверхности получается из линейной задачи. Придем к системе из двух уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{\partial v}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} - u \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(H v + \frac{H^3}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right). \end{gathered} \qquad (39)$$

Исследуя возможные стационарные режимы при заданной скорости баржи, положим $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$. В обозначениях снова перейдем от ζ к относительной величине $s = \frac{\zeta}{H_0}$ и выполним интегрирования по x с учетом того, что возмущение поверхности стремится к нулю на бесконечности. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{gathered} -u v + \frac{v^2}{2} + c^2 s = -\frac{f}{\rho}, \\ (u - v) s = v + \frac{H^2}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{gathered} \qquad (40)$$

Исключая s, приходим к выражению

$$(u - v)\left(-\frac{f}{c^2 \rho} + u v - \frac{v^2}{2} \right) = v + \frac{H_0^2}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \qquad (41)$$

Положим $w = \frac{\partial v}{\partial x}$. Тогда

$$(u - v)\left(-\frac{f}{c^2 \rho} + u v - \frac{v^2}{2} \right) = v + \frac{H^2}{3} \frac{\partial w}{\partial x}. \qquad (42)$$

В стационарной точке $v = (u - v)\left(-\frac{f}{c^2 \rho} + u v - \frac{v^2}{2} \right)$.

Под днищем баржи, при $f = \rho g h_0$, это дает значение

$$v = \frac{\sqrt{(c^2 - u^2 - g h_0)^2 - 4 u^2 g h_0} - (c^2 - u^2 - g h_0)}{2u},$$

при $u \ll c$ согласующееся с (24). Решения для стационарной скорости v под днищем баржи существуют, однако, лишь при $c^2 \geq (u + \sqrt{g h_0})^2$.

Справа и слева от баржи, где $f = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ выполняется при $v = 0$ (на бесконечности) и при $v = \frac{3}{2} u \pm \sqrt{\frac{9}{4} u^2 + 2(c^2 - u^2)}$. При этом, как легко убедиться прямым вычислением, $s < 0$. Наконец, в данной постановке задачи при $x = \pm \frac{b}{2}$ функция f разрывна, т.е. разрывно и решение, описывающее свободную поверхность. У носа и у кормы баржи возникает возвышение в силу уравнения Бернулли (37), так как в этом месте скорость потока $(v - u)$ обращается в ноль, что дает $s = \frac{u^2}{c^2}$. В результате вид свободной поверхности в стационаре оказывается таким, как показано на рис. 3.

О ДВИЖЕНИИ С ОКОЛОЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

В соответствии с подходом, развиваемым авторами [14–16], околозвуковые движения могут оказаться проще для описания, чем общий случай, в силу наличия малого параметра. Теперь это не $\frac{u}{c}$, а $\frac{c-u}{c}$. В самом деле, стационарное решение можно, как и раньше, получить из (23). Решая его (во втором приближении по малому параметру $\frac{|c-u|}{c} \ll 1$), получаем:

$$v = \frac{2}{3} \delta u + \frac{\sqrt{4(\delta u)^2 - 6 g h_0}}{3},$$

где $\delta u = u - c$. Отсюда видно, что при $(\delta u)^2 \gg g h_0$ возникает “релятивистский коэффициент”:

Рис. 3. Форма свободной поверхности в стационаре (жирная линия).

$$v \simeq -\frac{1}{2}\frac{gh_0}{c-u}.$$

Вычисление присоединенной массы по методу, справедливому при малых скоростях, теперь, однако, может оказаться некорректным. Воспользовавшись подходом [16], можно получить нестационарное уравнение, описывающее эволюцию возмущений справа от баржи – скажем, возникших, когда баржа разгонялась до околозвуковой скорости. Это будет уравнение Кортевега-де-Фриза, у которого есть нелокализованные решения – кноидальные волны, и локализованные – солитоны, убегающие от места рождения быстрее звука. Если учесть диссипацию, можно получить решение типа турбулентной боры – это тоже "убегающее" решение. "Присоединенная масса" в виде сопровождающего горба будет демонстрировать "релятивистский" рост, но универсальность описания будет утрачена. Энергия как сопровождающих, так и уходящих возмущений будет зависеть от истории движения. Возможность "сбрасывать сопровождающий горб" снова может сделать звуковой барьер проходимым.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача о торможении излучением в разных размерностях, разных полях и средах, при разных видах локализованного возмущения имеет свою специфику. Общее во всех этих случаях: факт наличия торможения излучением; релятивистский рост массы при приближении скорости излучающего объекта к скорости распространения возмущений; хорошее разделение в конкретных формулах двух указанных явлений при условии, что время пробегания звуком характерного размера "частицы" много меньше характерного времени изменения скорости в задаче. Тогда, при том или ином выборе малого параметра, метод последовательных приближений дает наглядные результаты. Во всех случаях, когда взаимодействие объекта с полем, создаваемым им самим, удается аппроксимировать рядом функций, локальных во времени, релятивистские эффекты (рост массы) определяются в первую очередь величиной собственно скорости, а эффекты торможения излучением – ее производными.

В трехмерном случае сила радиационного торможения пропорциональна четвертой производной скорости тела, в одномерном – второй производной. Релятивистский рост эффективной массы может, по-видимому, насыщаться благодаря нелинейности.

Автор благодарит К.В. Чукбара за руководство работой, О.В. Руденко за советы и дополнение к постановке задачи, а также А.М. и С.М. Вербицких, С.С. Маслова, Л.В. Паузнера и М. Фридмана за ценные обсуждения.

Автору хотелось бы выразить искреннюю признательность научному редактору В.М. Кузькину за терпение, с которым он мастерски решал почти невозможную задачу о приведении данной рукописи к цивилизованному виду, а также С.С. и М.С. Вербицких за советы технического характера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jackson J.D.* Classical Electrodynamics. New York: John Wiley & Sons. 1975.
2. *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. М., Наука, 1975.
3. *Власов А.А.* Дополнительные главы классической электродинамики. Проблемы радиационной отдачи. М.: МГУ, Физфак, 2002.
4. *Joseph John Thomson.* On the Electric and Magnetic Effects produced by the Motion of Electrified Bodies // Philosophical Magazine, 1881. V. 5. № 11 (68). P. 229–249.
5. *George Gabriel Stokes.* On some cases of fluid motion. Cambridge Press. V. 1. 1880.
6. *Кадомцев Б.Б., Рыдник В.И.* Волны вокруг нас. М.: Знание, 1981.
7. *Смирнов В.В., Чукбар К.В.* Радиационное торможение ленгмюровских солитонов // Физика плазмы, 1996. Т. 22. № 12. С. 1107–1110.
8. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Физматлит, 2001.
11. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. М.: ГИФМН, 1963.
12. *Чукбар К.В., Яньков В.В.* Ленгмюровские солитоны в неоднородной плазме // Физика плазмы. 1977. Т. 3. № 6. С. 1398–1401.
13. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
14. *Карабутов А.А., Руденко О.В.* Нелинейные плоские волны, возбуждаемые объемными источниками в движущейся с трансзвуковой скоростью среде // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 4. С. 536–542.
15. *Карабутов А.А., Руденко О.В.* Модифицированный метод Хохлова для исследования нестационарных трансзвуковых течений сжимаемого газа // ДАН СССР. Математическая физика. 1979. Т. 248. № 5. С. 1082–1085.
16. *Руденко О.В.* К 40-летию уравнения Хохлова–Заболотской // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 4. С. 452–462.
17. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
18. *Заболотская Е.А., Хохлов Р.В.* Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акуст. журн. 1969. Т. 19. № 1. С. 40–46.