

ВОЛНЫ ЛЭМБА В АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНАХ (ОБЗОР)

© 2014 г. С. В. Кузнецов

Институт проблем механики РАН Москва,

129526, просп. Вернадского, 101

E-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

Поступила в редакцию 09.03.2013 г.

Анализируются теоретические методы, применяемые для исследования волн Лэмба в анизотропных пластинах. Основное внимание уделяется шестимерному формализму Коши. В замкнутом виде получено решение для определения дисперсионных кривых волн Лэмба в пластинах с произвольной упругой анизотропией.

Ключевые слова: волна Лэмба, анизотропия, дисперсия, формализм Коши

DOI: 10.7868/S0320791914010092

ВВЕДЕНИЕ

Ниже дается краткое введение в теорию волн Лэмба, а также приводится обзор некоторых наиболее важных работ по этой тематике.

Волны Лэмба в изотропной пластине

В первых работах [1, 2] по волнам, распространяющимся в бесконечной изотропной пластине со свободными границами, решение было получено в предположении, что длина волны существенно превышает толщину пластины. Полная теория распространения гармонических волн Лэмба, не связанная с длинноволновым приближением, получена в [3]. В этой теории уравнение движения записывалось в виде

$$c_p^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - c_s^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где \mathbf{u} — поле перемещений, а c_p и c_s — скорости соответственно продольной и поперечной объемных волн:

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2)$$

В выражениях (2) λ и μ — константы Ламе, ρ — плотность среды. Далее, для поля перемещений использовалось представление поля перемещений в терминах скалярного (Φ) и векторного (Ψ) потенциалов

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi + \operatorname{rot} \Psi. \quad (3)$$

Потенциалы предполагались гармоническими по времени

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi'(\mathbf{x}) e^{i\omega t}, \quad \Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi'(\mathbf{x}) e^{i\omega t}. \quad (4)$$

Подстановка представления (4) в уравнение (1) приводила к двум независимым уравнениям Гельмгольца

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_p^2} \right) \Phi' = 0, \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) \Psi' = 0. \quad (5)$$

Для учета пространственной периодичности и упрощения последующего анализа ниже вводится следующее расщепление пространственных переменных:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w}, \quad (6)$$

где \mathbf{n} — единичный волновой вектор, \mathbf{v} — единичная нормаль к срединной поверхности пластины и $\mathbf{w} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$.

Замечание 1. Для рассматриваемых волн Лэмбом предполагалось, что поле перемещений не зависит от переменной $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}$. Это предположение позволило ввести скалярные потенциалы Ψ и Ψ' в (4) вместо векторных (в действительности, Лэмб рассматривал векторные потенциалы, состоящие из одной ненулевой компоненты $(\Psi \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w}$).

Следующее допущение относится к пространственной периодичности потенциалов в направлении распространения

$$\Phi'(\mathbf{x}) = \phi(x'') e^{x'}, \quad \Psi'(\mathbf{x}) = \psi(x'') e^{x'}, \quad (7)$$

где безразмерные координаты x' и x'' определяются выражениями

$$x' = i r \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}, \quad x'' = i r \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}. \quad (8)$$

В (8) $i = \sqrt{-1}$, а r — волновое число, связанное с длиной волны l соотношением

$$r = \frac{2\pi}{l}. \quad (9)$$

Подстановка представлений (7) в уравнение (5) дает систему несвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\varphi}{dx''^2} + \left(1 - \frac{c^2}{c_p^2}\right)\varphi = 0, \quad \frac{d^2\psi}{dx''^2} + \left(1 - \frac{c^2}{c_s^2}\right)\psi = 0, \quad (10)$$

где фазовая скорость c связана с частотой и волновым числом соотношением

$$c = \frac{\omega}{r}. \quad (11)$$

Следуя Лэмбу, общее решение уравнений (10) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x'') &= C_1 \operatorname{sh}(\gamma_1 x'') + C_2 \operatorname{ch}(\gamma_1 x''), \\ \psi(x'') &= C_3 \operatorname{sh}(\gamma_2 x'') + C_4 \operatorname{ch}(\gamma_2 x''), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\gamma_1 = \left(1 - \frac{c^2}{c_p^2}\right)^{1/2}, \quad \gamma_2 = \left(1 - \frac{c^2}{c_s^2}\right)^{1/2}. \quad (13)$$

Неизвестные коэффициенты в (12) определяются (с точностью до множителя) из граничных условий на свободных поверхностях пластины

$$\mathbf{t}_v \equiv (\lambda \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t)) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \pm h, \quad (14)$$

где $2h$ – толщина пластины. Подстановка представления (3) в граничные условия (14) дает граничные условия в терминах потенциалов φ и ψ :

$$\begin{aligned} & \left(\lambda \Delta \Phi' \mathbf{I} + 2\mu \left(\nabla \nabla \Phi' + \frac{1}{2} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\nabla \operatorname{rot} \Psi' + (\nabla \operatorname{rot} \Psi')^t \right) \right) \right) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \pm h. \end{aligned} \quad (15)$$

Подстановка решений (12) в уравнение (15) при учете Замечания 1 дает дисперсионное уравнение, найденное впервые в [1, 3]:

$$\frac{\operatorname{th}(\gamma_2 rh)}{\operatorname{th}(\gamma_1 rh)} - \left(\frac{4\gamma_1 \gamma_2}{(1 + \gamma_2^2)^2} \right)^{\pm 1} = 0. \quad (16)$$

Знак “+” в этом уравнении относится к симметричным, а “–” к антисимметричным модам. Ввиду (11) и (13), полученное дисперсионное уравнение определяет фазовую скорость c как неявную функцию частоты. Уравнения для скоростей, относящихся к длинноволновым и коротковолновым пределам, были найдены в [3].

Переход к коротковолновому пределу $rh \rightarrow \infty$ в (16) дает

$$1 = \left(\frac{4\gamma_1 \gamma_2}{(1 + \gamma_2^2)^2} \right). \quad (17)$$

Это уравнение совпадает с вековым уравнением для скорости рэлеевской волны, полученным в [4]. Таким образом, первая предельная скорость совпадает со скоростью волны Рэлея

$$c_{1,\lim} = c_R. \quad (18)$$

Анализ уравнения (16) при $rh \rightarrow 0$ (длинноволновый предел) приводит к уравнению [5]

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \left(\frac{4\gamma_1 \gamma_2}{(1 + \gamma_2^2)^2} \right), \quad (19)$$

откуда удается определить две предельные скорости

$$c_{2,\lim} = 2c_s \sqrt{1 - \frac{c_s^2}{c_p^2}}, \quad (20)$$

$$c_{3,\lim} = c_s. \quad (21)$$

Выражение (20) для предельной скорости впервые получено в [1, 2]. Надо отметить, что это выражение отличается от предельной скорости для длинных акустических волн в стержнях.

Дисперсия антисимметричной фундаментальной моды, определяемой по уравнению (16), исследована в [6] с помощью метода возмущений. Исследования по волнам Лэмба в слое, контактирующим с полупространством, рассматривались в [7–10] в связи с геофизическими приложениями. Анализ дисперсионных кривых при различных значениях коэффициента Пуассона (включая отрицательные значения) осуществлялся в [11–13]. В [14] исследовались точки пересечения дисперсионных кривых.

Групповая скорость

Понятие групповой скорости введено Стоксом [15] для описания распространения волнового пакета гравитационных волн в гидродинамике. В [16–18] понятие групповой скорости обобщено на поверхностные волны в теории упругости. Формально групповая скорость может быть определена следующим соотношением:

$$c^{\text{group}} = \frac{d\omega}{dr}, \quad (22)$$

Численный анализ [19–25] дисперсии групповой скорости (в основном, при условии Пуассона $\lambda = \mu$) подтвердил гипотезу Рэлея [16, 17] о том, что возможны отрицательные значения групповой скорости при малых значениях волнового числа. Численные эксперименты [25] обнаружили существование более широкого диапазона отрицательных значений групповой скорости при значениях коэффициентах Пуассона, лежащих в интервале $0.31 < \nu < 0.45$. С физической точки зрения групповая скорость определяет скорость распространения пакета гармонических волн, различающихся частотами [25]. Отдельные волны в пакете могут распространяться с различными фазовыми скоростями ввиду дисперсии, однако с точки зрения внешнего наблюдателя существует некоторая скорость, определяющая движение всего пакета. В связи с этим отрицательная групповая скорость определяет собой движение пакета в сторону, противоположную движению отдельных волн.

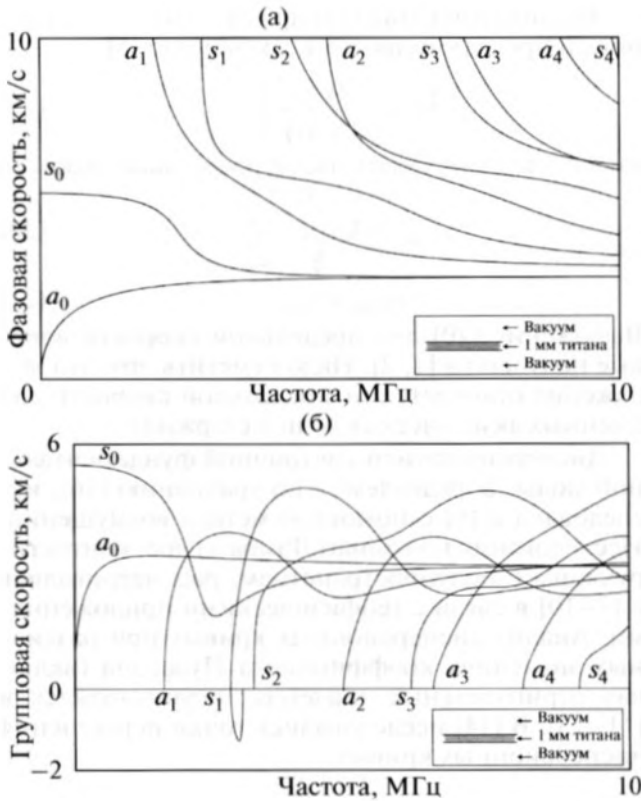


Рис. 1. Типичные дисперсионные кривые волн Лэмба в 1.0 мм титановой пластине [27]: а) фазовая скорость; б) групповая скорость.

Уравнение (16) позволяет получить другие формулы для определения групповой скорости. Например, подставляя фазовую скорость, определяемую по уравнению (11), в выражение (13), обозначая правую часть уравнения (16) как $F^\pm(r, \omega)$ и предполагая, что ω является функцией r , получаем при дифференцировании (16) следующее уравнение:

$$\frac{\partial F^\pm(r, \omega)}{\partial r} + \frac{\partial F^\pm(r, \omega)}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dr} = 0, \quad (23)$$

откуда, с помощью (22), вековое уравнение для групповой скорости приобретает вид

$$c^{\text{group}} = - \frac{\frac{\partial F^\pm(r, \omega)}{\partial r}}{\frac{\partial F^\pm(r, \omega)}{\partial \omega}}. \quad (24)$$

В (24) параметр r рассматривается как функция ω . Еще одно выражение для групповой скорости, которое можно получить из (22), было найдено в [6]:

$$c^{\text{group}} = c^{\text{phase}} - l \frac{dc^{\text{phase}}}{dl}, \quad (25)$$

где l – длина волны.

Теоретические исследования фазовой, групповой и лучевой скоростей проводились также в

[26]. В соответствии с уравнением (24) условие $c^{\text{group}} < 0$ означает, что обе частные производные в (24) имеют одинаковые знаки; последнее эквивалентно одновременному возрастанию или убыванию (относительно r и ω) функций $F^\pm(r, \omega)$.

Уравнение (24) позволяет выявить условия, при которых групповая скорость обращается в нуль. Действительно, условие $c^{\text{group}} = 0$ означает,

что либо $\frac{\partial F^\pm(r, \omega)}{\partial r} = 0$ при конечном значении $\frac{\partial F^\pm(r, \omega)}{\partial \omega}$, или бесконечное значение $\frac{\partial F^\pm(r, \omega)}{\partial \omega}$ при конечном значении $\frac{\partial F^\pm(r, \omega)}{\partial r}$.

Типичные дисперсионные кривые фазовой и групповой скоростей, определенные для титановой пластины толщиной 1.0 мм, показаны на рис. 1 [27].

На этих графиках обозначения a_k отвечают антисимметричным модам, а s_k – симметричным. Как следует из приведенных графиков, отрицательная групповая скорость соответствует только симметричной моде s_1 , что согласуется с результатами [25].

Ортогональность и полнота мод Лэмба

Вообще говоря, распространяющиеся моды волн Лэмба не ортогональны в смысле интегрирования по поперечному разрезу [28]:

$$\int_{-h}^h \mathbf{u}_{(m)}(x') \cdot \bar{\mathbf{u}}_{(n)}(x') dx' \neq 0, \quad m \neq n, \quad (26)$$

где $\mathbf{u}_{(m)}$, $\mathbf{u}_{(n)}$ – перемещения, отвечающие различным модам; x' – безразмерная координата, определенная по (8); $2h$ – толщина пластины. Однако в [29] была определена обобщенная ортогональность мод Лэмба, основанная на соотношении взаимности Бетти. Следуя [29, 30], это соотношение может быть записано в виде

$$\int_{-h}^h (\mathbf{u}_{(m)}(x'); \mathbf{t}_{v(m)}(x')) \cdot \mathbf{H}(x') \times \times (\mathbf{u}_{(n)}(x'); \mathbf{t}_{v(n)}(x'))' u dx' = 0, \quad m \neq n, \quad (27)$$

где $\mathbf{H}(x')$ – некоторая 4×4 матрица; см. также [31, 32] и [33], где предложен иной метод получения условий обобщенной ортогональности. Условия ортогональности в цилиндрических координатах получены в [34].

Начиная с первых работ по волнам Лэмба в изотропных пластинах [1–4], стало очевидным, что распространяющиеся моды образуют неполную систему функций, главным образом, из-за

наличия частот отсечки; в этой связи см. [35–37]. Проблема полноты обсуждалась также в [33].

На рис. 2 приведен трехмерный график семейства комплексных дисперсионных кривых, отвечающих симметричным модам, см. [5, 35].

График на рис. 2 показывает переход от действительных к комплексным модам при частотах отсечки. Надо отметить, что полнота комплексных мод Лэмба, установленная в [33], является следствием теоремы о полноте системы собственных функций линейного эллиптического оператора в гильбертовом пространстве [38, 39]. Вопросы суперпозиции нераспространяющихся (затухающих в направлении распространения) мод с фундаментальной модой s_0 исследовались в [40].

Наконец, проблема устойчивости мод Лэмба изучалась в [41]. Эта проблема связана с доказательством отсутствия нераспространяющихся мод, отвечающих волновым числам с отрицательными мнимыми частями. Последнее обеспечивает отсутствие мод Лэмба, экспоненциально растущих с возрастанием частоты.

Анизотропные пластины, трехмерный формализм

В первых работах по теоретическим исследованиям распространения волн Лэмба в анизотропных пластинах применялся трехмерный формализм. Вначале этот формализм применялся для анализа волн Рэлея в трансверсально изотропном полупространстве [42]; в дальнейшем этот подход был распространен на другие виды упругой анизотропии [43–47]. Далее, с небольшими видоизменениями подход [42] применялся к анализу волн Лэмба в анизотропных пластинах [48–58].

В этих работах, за исключением [48], где рассматривался более сложный случай цилиндрической анизотропии, использовалось следующее представление для поля перемещений:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \left(\sum_{k=1}^6 C_k \frac{\mathbf{m}_k e^{\gamma_k x''}}{\mathbf{u}_k(x'')} \right) e^{i(\mathbf{r}\mathbf{m}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}, \quad (28)$$

где C_k – комплексные коэффициенты, определяемые с точностью до множителя из граничных условий; \mathbf{u}_k – перемещения, соответствующие k -ой парциальной волне; \mathbf{m}_k – векторная, в общем случае комплексная амплитуда, определяемая из уравнения Кристоффеля (это уравнение будет введено ниже); γ_k – корень уравнения Кристоффеля. Заметим, что в соответствии с (8), координата x'' – мнимая. Шесть парциальных волн в (28) соответствуют шести (возможно, кратным) корням уравнения Кристоффеля.

Подстановка представления (28) в уравнение движения

$$\mathbf{A}(\partial_x, \partial_t)\mathbf{u} \equiv \text{div}_x \mathbf{C} \cdot \nabla_x \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0, \quad (29)$$

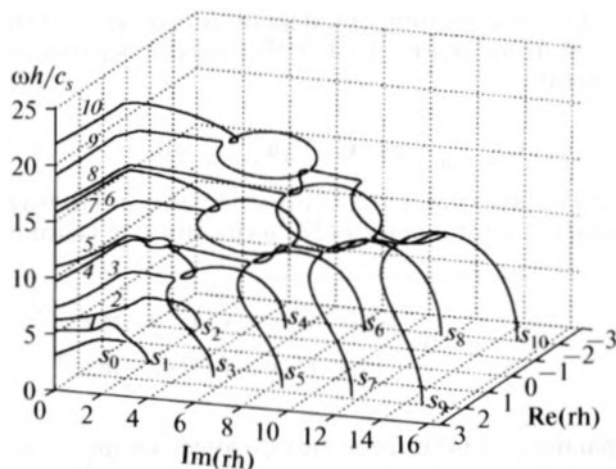


Рис. 2. Безразмерные дисперсионные кривые, отвечающие симметричным модам; по [35].

где \mathbf{C} – четырехвалентный положительно определенный тензор упругости, дает уравнение Кристоффеля

$$\left[(\gamma_k \mathbf{v} + \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} + \gamma_k \mathbf{v}) - \rho c^2 \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{m}_k = 0, \quad (30)$$

где \mathbf{I} – единичная диагональная матрица. Уравнение (30) может быть представлено в эквивалентном виде

$$\det \left[(\gamma_k \mathbf{v} + \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} + \gamma_k \mathbf{v}) - \rho c^2 \mathbf{I} \right] = 0. \quad (31)$$

Левая часть уравнения (31) представляет собой полином шестого порядка относительно параметров Кристоффеля γ_k . Уравнения (30), (31) показывают, что корни γ_k и соответствующие собственные векторы \mathbf{m}_k могут рассматриваться как функции скорости c .

Замечание 2. а) В случае рэлеевской волны параметры γ_k в представлении (28) должны быть комплексными с $\text{Im}(\gamma_k) < 0$. Это условие обеспечивает затухание рэлеевской волны в “нижнем” полупространстве $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) < 0$. Условие $\text{Im}(\gamma_k) < 0$ ограничивает интервал допустимых скоростей и количество парциальных волн в (28). В случае, когда $\text{Re}(\gamma_k) = 0$ для всех парциальных волн, соответствующая волна Рэлея называется истинной волной, если же $\text{Re}(\gamma_k) \neq 0$ при некоторых k , то соответствующая волна называется обобщенной волной Рэлея [43]. Для волн Лэмба случаи $\text{Re}(\gamma_k) = 0$ и $\text{Re}(\gamma_k) \neq 0$ обычно не различают.

б) В рамках обсуждаемого формализма случай появления кратных корней γ_k и совпадающих корневых векторов \mathbf{m}_k рассмотрен в [59] применительно к волнам Рэлея и в [60] при анализе дисперсионного уравнения для дозвуковых волн Лэмба.

в) В случае анизотропных пластин предельные скорости (20), (21) исследовались в [61, 62].

Для получения дисперсионного уравнения рассмотрим условия на свободных поверхностях пластины

$$\mathbf{t}_v|_{x,v=\pm h} \equiv \pm \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \nabla_x \mathbf{u}|_{x,v=\pm h} = 0, \quad (32)$$

где $2h$ обозначает толщину пластинки. Подстановка представления (28) в граничные условия

$$\det \begin{pmatrix} (\gamma_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}_1 e^{+i\gamma_1 h} & \dots & (\gamma_6 \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}_6 e^{+i\gamma_6 h} \\ (\gamma_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}_1 e^{-i\gamma_1 h} & \dots & (\gamma_6 \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}_6 e^{-i\gamma_6 h} \end{pmatrix} = 0. \quad (34)$$

Уравнение (34) определяет фазовую скорость как функцию волнового числа или, ввиду (11), как функцию круговой частоты.

Анизотропные пластины, шестимерный формализм Стро

Первоначально этот формализм [63] применялся для анализа рэлеевских волн, распространяющихся в анизотропном полупространстве; см. также [64–70]. Случай “неполупростого” вырождения фундаментальной матрицы рассматривался в [68] (этот случай связан с появлением кратных корней и совпадающих корневых векторов в уравнении Кристоффеля). В [71, 72] формализм Стро применялся для описания волн Лэмба в анизотропных пластинах.

Следуя [64], поле перемещений для волн Рэлея или Лэмба разыскивается в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(x'') e^{i(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (35)$$

где неизвестная функция \mathbf{f} рассматривается как функция комплексной координаты x'' , определенной формулой (8). Подстановка представления (35) в уравнение движения (29) дает

$$(\mathbf{A}_1 \partial_{x''}^2 + (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2') \partial_{x''} + \mathbf{A}_3) \cdot \mathbf{f}(x'') = 0, \quad (36)$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} - \rho c^2 \mathbf{I}. \quad (37)$$

Матрица \mathbf{A}_1 – невырожденная вследствие положительной определенности тензора упругости.

Замечание 3. Для изотропного материала матрицы (37) представимы в виде

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} \mu - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \rho c^2 \end{pmatrix}.$$

С точностью до множителя $e^{i(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ поверхностные усилия на любой плоскости, параллель-

(32) дает следующее дисперсионное уравнение:

$$\sum_{k=1}^6 C_k (\gamma_k \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}_k e^{\pm i\gamma_k h} = 0. \quad (33)$$

Уравнение (33) может быть представлено в иной форме, более удобной для численного анализа:

$$\mathbf{t}_v(x'') \equiv (\mathbf{A}_1 \partial_{x''} + \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{f}(x''). \quad (39)$$

Основная идея формализма Стро состоит в записи уравнений движения (29) в терминах перемещений и поверхностных усилий: умножая обе части уравнения (39) на матрицу \mathbf{A}_1^{-1} , получаем следующее выражение для производной $\partial_{x''} \mathbf{f}(x'')$:

$$\partial_{x''} \mathbf{f}(x'') = \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{t}_v(x'') - \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{f}(x''). \quad (40)$$

Объединение уравнений (36)–(40) дает искомое уравнение движения в терминах векторов \mathbf{f} и \mathbf{t}_v :

$$\partial_{x''} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{t}_v \end{pmatrix} = \mathbf{N} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{t}_v \end{pmatrix}, \quad (41)$$

где \mathbf{N} – фундаментальная матрица:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1^{-1} \\ \mathbf{A}_2' \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3 & -\mathbf{A}_2' \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \end{pmatrix} \quad (42)$$

С помощью фундаментальной матрицы общее решение уравнения (41) может быть представлено в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{t}_v \end{pmatrix} = \exp(x'' \mathbf{N}) \cdot \mathbf{C}_6, \quad (43)$$

где \mathbf{C}_6 – шестимерный, вообще говоря, комплексный вектор неизвестных коэффициентов. Этот вектор с точностью до множителя определяется из граничных условий. Подстановка решения (43) в граничные условия (32) дает

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(+irh) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \exp(+irh \mathbf{N}) \cdot \mathbf{C}_6, \quad (44)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(-irh) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \exp(-irh \mathbf{N}) \cdot \mathbf{C}_6.$$

Исключение вектора \mathbf{C}_6 из уравнения (44)₁ и подстановка получающегося выражения в (44)₂ дает следующее дисперсионное уравнение:

$$\det((\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \exp(-2irh \mathbf{N})) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = 0. \quad (45)$$

Несмотря на очевидную простоту вывода уравнения (45), в работах [71, 72] по получению дис-

персионных соотношений для волн Лэмба применялся более сложный подход.

В следующем разделе рассматривается еще один вариант комплексного шестимерного формализма для анализа дисперсии волн Лэмба в пластинах с произвольной упругой анизотропией. Поскольку этот подход связан с приведением системы уравнений второго порядка (36) к нормальной форме Коши, соответствующий формализм будет называться формализмом Коши.

ШЕСТИМЕРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ КОШИ

Основная концепция

В этом формализме, так же, как и в формализме Стро, применяется представление (35) для волны Лэмба. Ведением новой вектор-функции

$$\mathbf{v}(x'') = \partial_{x'} \mathbf{f}(x'') \quad (46)$$

уравнение движения (29) может быть приведено к нормальной форме Коши

$$\partial_{x'} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (47)$$

где

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_3 & -\mathbf{A}_1 \cdot (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2^t) \end{pmatrix} \quad (48)$$

и матрицы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ определены по (37). По аналогии с формализмом Стро 6×6 -матрица \mathbf{G} будет именоваться фундаментальной матрицей.

Аналогично (43) общее решение уравнения (47) может быть представлено в эйлеровой форме

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(x'') \\ \mathbf{v}(x'') \end{pmatrix} = \exp(x'' \mathbf{G}) \cdot \mathbf{C}_6, \quad (49)$$

где \mathbf{C}_6 – шестимерный, в общем случае комплексный вектор неизвестных коэффициентов, определяемый с точностью до множителя из граничных условий.

Поле поверхностных усилий определяется уравнением (39). Далее, объединяя уравнения (49) и (39), получаем поля перемещений и усилий на свободных поверхностях пластины в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(\pm irh) \\ \mathbf{t}_v(\pm irh) \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \exp(\pm irh \mathbf{G}) \cdot \mathbf{C}_6, \quad (50)$$

где

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Надо отметить, что матрица \mathbf{Z} – невырожденная, ввиду положительной определенности тензора упругости.

Уравнение (50) позволяет исключить вектор \mathbf{C}_6 , выражая перемещения и усилия на од-

ной из поверхностей пластины через соответствующие векторы на другой:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(-irh) \\ \mathbf{t}_v(-irh) \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{f}(+irh) \\ \mathbf{t}_v(+irh) \end{pmatrix}, \quad (52)$$

где

$$\mathbf{T} = \mathbf{Z} \cdot \exp(-2irh \mathbf{G}) \cdot \mathbf{Z}^{-1}. \quad (53)$$

Матрица \mathbf{T} может быть названа передаточной матрицей, поскольку она “передает” перемещения и усилия с одной поверхности на другую. Надо отметить, что матрица \mathbf{T} не зависит от граничных условий.

Дисперсионные соотношения и предельная скорость

Уравнение (52) служит основой для определения дисперсионных соотношений и получения выражения для предельной скорости $c_{2,\text{lim}}$ при $r \rightarrow 0$.

Пластина со свободными поверхностями. Если обе граничные поверхности свободны, то

$$\mathbf{t}_v(\pm irh) = \mathbf{0}. \quad (54)$$

Условие (54) означает, что 3×3 -отображение

$$R^3 \xrightarrow{(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}} R^3 \quad (55)$$

из трехмерного пространства нетривиальных перемещений и нулевых усилий на “верхней” границе в трехмерное пространство усилий на “нижней” границе – вырождено. Последнее эквивалентно условию

$$\det \left((\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (56)$$

Таким образом, уравнение (56) дает искомое дисперсионное уравнение для пластины со свободными границами.

Переход к пределу при $r \rightarrow 0$ в (55) не позволяет получить содержательного уравнения, поскольку детерминант (56) тождественно равен нулю при $r = 0$ и любой фазовой скорости. Для получения содержательного уравнения необходимо продифференцировать (55) по волновому числу (см. [74–76]), это дает следующее уравнение для определения скорости $c_{2,\text{lim}}$:

$$\det \left((\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (57)$$

Другие типы граничных условий, рассмотренные ниже, приводят к очевидным изменениям в уравнении для $c_{2,\text{lim}}$.

Замечание 4. Подстановка матриц (38) в уравнение (57) дает для изотропной пластины уравнение (20).

Зашемленная пластина. В случае, когда обе поверхности пластины зашемлены, соответствующие граничные условия имеют вид

$$\mathbf{f}(\pm irh) = 0. \quad (58)$$

Условие (58) означает, что отображение из пространства нулевых перемещений и ненулевых усилий на “верхней” граничной плоскости в пространство перемещений на “нижней” границе — вырождено:

$$\det \left((\mathbf{I}, \mathbf{0}) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (59)$$

Уравнение (59) является искомым дисперсионным уравнением для зашемленной пластины.

Пластина со свободной и зашемленной поверхностями. Для пластины с “верхней” зашемленной и “нижней” свободной границей соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$\det \left((\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (60)$$

Благодаря симметрии матрицы \mathbf{T} , уравнение (60) инвариантно по отношению к смене поверхностей, на которых заданы рассматриваемые граничные условия.

Пластины со смешанными граничными условиями.

Рассматривается два типа смешанных граничных условий: (i) нулевые нормальные к границе компоненты усилий и нулевые касательные к границе смещения и (ii) нулевые касательные компоненты усилий и нулевые нормальные к границе перемещения. Граничные условия (i) могут быть записаны в виде

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_v(\pm irh) = 0, \quad (\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{f}(\pm irh) = 0. \quad (61)$$

Соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$\det \left((\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \\ \mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (62)$$

По аналогии с условиями (61) граничные условия (ii) могут быть представлены в виде

$$(\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}_v(\pm irh) = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}(\pm irh) = 0. \quad (63)$$

Условия (63) дают следующее дисперсионное уравнение

$$\det \left((\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (64)$$

ПРИМЕНЕНИЯ ВОЛН ЛЭМБА

Применения в геофизике

Начиная с открытия волн Лэмба [2, 3], эти волны, наряду с волнами Рэлея и Лява, рассматривались в качестве основного источника переноса сейсмической энергии при землетрясениях. Надо отметить, что в первых работах по волнам в стратифицированном полупространстве соответствующие поверхностные волны назывались волнами Рэлея, см. [19–24]. Однако в современной лите-

ратуре поляризованные в вертикальной плоскости волны в стратифицированном полупространстве обычно называют волнами Рэлея–Лэмба, см. [77].

Вопросы теории и применения волн Лэмба и Рэлея–Лэмба, возникающих при землетрясениях, обсуждаются в [53, 78–80]. Различные применения этих волн в геологических исследованиях рассматриваются в [81].

Применения в неразрушающей диагностике материалов и дефектов

Волны Лэмба широко используются в неразрушающей диагностике. В [82] изложена методология применения этих волн для идентификации возможных дефектов, а также диагностики физических свойств и геометрии пластин. Позднее в работах [6, 83] этот подход был распространен на ультразвуковые волны Лэмба.

Широкое распространение волн Лэмба в неразрушающей диагностике основано на следующих свойствах этих волн: (i) возможность их распространения без существенного затухания (в материалах без существенной вязкости); (ii) дисперсия волн, позволяющая исследовать геометрические и физические свойства как однородной пластины, так и отдельных слоев в случае неоднородной пластины; (iii) простота возбуждения и регистрации этих волн; см. [6, 27, 32, 40, 57], а также недавние работы [84–86].

ВОПРОСЫ ТЕХНИКИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Вычисление экспоненциальной матрицы

Экспоненциальная матрица, встречающаяся в различных вариантах шестимерных формализмов, может быть определена с помощью ряда Тейлора

$$\exp(\mathbf{G}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{G}^k}{k!}. \quad (65)$$

Однако с вычислительной точки зрения формула (65) неудобна, главным образом, из-за медленной сходимости ряда [87]. Значительно более быстрые численные алгоритмы могут быть построены на основе приведения фундаментальной матрицы \mathbf{G} к жордановой нормальной форме [87]

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{W}, \quad (66)$$

где \mathbf{W} — матрица, состоящая из собственных векторов и, возможно, обобщенных собственных векторов, а \mathbf{J} — матрица, состоящая из собственных значений и, возможно, жордановых блоков. С помощью разложения (66) экспоненциальная матрица приобретает вид [88, 89]

$$\exp(\mathbf{G}) = \mathbf{W}^{-1} \cdot \exp(\mathbf{J}) \cdot \mathbf{W}. \quad (67)$$

Численная устойчивость

Как отмечалось в [90–95], вычисления, связанные с построением дисперсионных кривых, обычно приводят к численной неустойчивости, обусловленной либо потерей точности вычислений, либо переполнением разрядной сетки из-за присутствия экспоненциальных множителей с большими показателями.

В то время как проблема переполнения легко решается с помощью алгоритмов перенормализации, потеря точности требует применения более сложных алгоритмов [90–94]. В большинстве таких алгоритмов [90–92] задача нахождения параметров, при которых детерминанты разрешающих уравнений обращаются в нуль, осуществляется с помощью нахождения минимальных по модулю собственных значений соответствующих матриц; еще один подход связан с техникой высокоточных вычислений, при которых мантиссы имеют большее число значащих цифр, чем при вычислениях с удвоенной точностью. Численные примеры [74–76], основанные на высокоточных алгоритмах [95, 96], показывают, что вычисления с мантиссой до ~1000 десятичных разрядов позволяют полностью избавиться от проблемы, связанной с потерей точности.

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ ДЛЯ КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ

Ниже рассматриваются три кубических кристалла с единичной нормализованной плотностью и упругими параметрами, нормализованными по отношению к C_{1111} .

Для оценки отклонения упругих констант кубических кристаллов от соответствующих параметров изотропной среды, вводится мера

$$\delta \equiv \left| \frac{C_{1111}}{C_{1122} + 2C_{1212}} - 1 \right|. \quad (68)$$

В (68) параметры C_{1122} и C_{1212} соответствовали бы параметрам Ламе λ и μ , а C_{1111} был бы равен знаменателю в (68), если бы материал был изотропен.

Первый из рассматриваемых кристаллов имеет следующие упругие параметры:

$$C_{1111} = 1, \quad C_{1122} = 0.1, \quad C_{1212} = 0.5. \quad (69)$$

Для этого кристалла мера отклонения от изотропии весьма незначительна: $\delta \approx 0.09$.

Второй кубический кристалл имеет следующие значения упругих параметров:

$$C_{1111} = 1, \quad C_{1122} = 0, \quad C_{1212} = 0.25. \quad (70)$$

Эти параметры отличаются от изотропной среды существенно больше: $\delta = 1$.

Третий кубический кристалл принадлежит группе ауксетиков [97], характеризуемой отрицательными значениями коэффициента Пуассона

$$C_{1111} = 1, \quad C_{1122} = -0.1, \quad C_{1212} = 0.5. \quad (71)$$

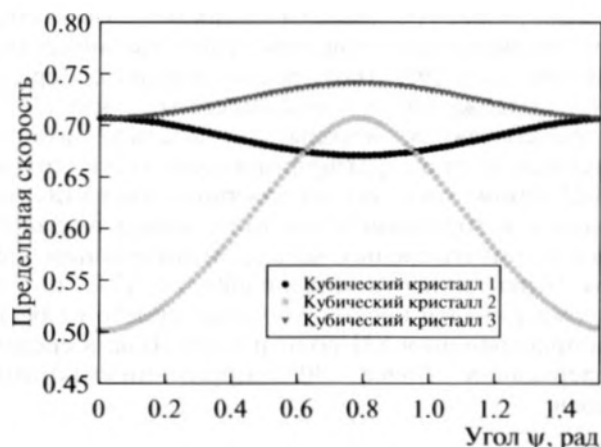


Рис. 3. Изменение предельной скорости $c_{2,lim}$ в зависимости от угла ψ .

Для ауксетика (71) $\delta \approx 0.09$, что совпадает с соответствующим значением для первого кристалла.

Для рассматриваемых кристаллов векторы \mathbf{v} и \mathbf{n} задавались следующими компонентами (в главных осях упругости рассматриваемых кристаллов):

$$\mathbf{v} = (1; 0; 0), \quad \mathbf{n} = (0; \cos \psi; \sin \psi). \quad (72)$$

Изменение предельной скорости $c_{2,lim}$ в зависимости от угла ψ показано на рис. 3.

Графики на рис. 3 показывают, что предельная скорость $c_{2,lim}$ является достаточно информативной для идентификации направления распространения волны Лэмба: даже для первого и третьего кристаллов по значению скорости $c_{2,lim}$ можно судить о направлении распространения волны Лэмба.

Замечание 5. При неразрушающих испытаниях предельная скорость $c_{2,lim}$ играет важную роль, поскольку соответствующую волну легко возбудить. Действительно, энергия, необходимая для возбуждения, пропорциональна квадрату частоты, а для рассматриваемой предельной волны соответствующая частота близка к нулю.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящее время развитие исследований по волнам Лэмба и Рэлея–Лэмба в основном связано как с разработкой и совершенствованием экспериментальной техники за счет освоения новых частотных диапазонов, так и с развитием теоретических методов для анализа сред с усложненными свойствами.

Экспериментальные исследования связаны с созданием трансдьюсеров и соответствующей регистрирующей аппаратуры, способных работать в гигагерцовом частотном диапазоне [84–86], проводятся исследования по освоению терагерцового диапазона [98].

При разработке теоретических методов внимание уделяется исследованиям слоистых микрополярных сред [99, 100], рассматриваются среды Био, содержащие водонасыщенные слои [101], разрабатываются методы для анализа поверхностных волн в стратифицированных жидкостях [102]. Кроме того, за счет совершенствования методов и алгоритмов численного анализа удается рассматривать среды с весьма значительным числом упруго анизотропных слоев, см. [74–76], где рассматривался несколько более простой случай распространения SH волн и волн Лява в средах, содержащих более 30 упруго-анизотропных слоев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh J.W.* On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter // *Proc. Math. Soc. London.* 1889. V. 20. P. 225–234.
2. *Lamb H.* On the flexure of an elastic plate // *Proc. Math. Soc. London.* 1889. V. 21. P. 70–90.
3. *Lamb H.* On waves in an elastic plate // *Proc. Roy. Soc.* 1917. V. A93. P. 114–128.
4. *Rayleigh J.W.* On wave propagating along the plane surface of an elastic solid // *Proc. London Math. Soc.* London. 1885. V. 17. P. 4–11.
5. *Mindlin R.D.* Waves and vibrations in isotropic, elastic plates / *The First Symposium on Naval Structural Mechanics*, 1958. Ed. by J. N. Goodies and N. J. Hoff. Oxford: Pergamon Press, 1960. P. 199–232.
6. *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М. Наука, 1966.
7. *Jeffreys H.* The surface waves of Earthquakes // *Geophysical J. Int.* 1935. V. 3. P. 253–261.
8. *Гоголадзе В.Г.* Дисперсия волн Рэлея в слое // *Тр. Сейс. ин-та АН СССР.* 1947. Т. 119. С. 27–38.
9. *Wilson J.T., Baykal O.* On the North Atlantic basin as determined from Rayleigh wave dispersion // *Bull. Seism. Soc. America.* 1948. V. 38. P. 41–53.
10. *Dobrin M.B.* Dispersion in seismic surface waves // *Geophysics.* 1951. V. 16. P. 63–80.
11. *Freedman A.* The variation, with the Poisson ratio, of Lamb modes in a free plate I. General spectra // *J. Sound Vibration.* 1990. V. 137. P. 209–230.
12. *Freedman A.* The variation, with the Poisson ratio, of Lamb modes in a free plate. II. At transitions and coincidence values // *J. Sound Vibration.* 1990. V. 137. P. 231–247.
13. *Freedman A.* The variation, with the Poisson ratio, of Lamb modes in a free plate. III. Behavior of individual modes // *J. Sound Vibration.* 1990. V. 137. P. 249–266.
14. *Zhu Q., Mayer W.G.* On the crossing points of Lamb wave velocity dispersion curves // *J. Acoust. Soc. Am.* 1993. V. 93 (4). P. 1893–1895.
15. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1847. V. 8. P. 441–455.
16. *Rayleigh J.W.* On progressive waves // *Proc. London Math. Soc. London.* 1877. V. 9. P. 21–26.
17. *Rayleigh J.W.* *Theory of sound.* Ulan Press, 2011. 528 p.
18. *Reynolds O.* On the rate of progression of groups of waves and the rate at which energy is transmitted by waves // *Nature.* 1877. V. 16. P. 343–344.
19. *Sezawa K., Kanai K.* On the propagation of Rayleigh waves in dispersive elastic media // *Bull. Earthquake Research Inst. (Tokyo).* 1941. V. 19. P. 549–553.
20. *Sato Y.* Study on surface waves. II: Velocity of surface waves propagated upon elastic plates // *Bull. Earthquake Research Inst. (Tokyo).* 1951. V. 29. P. 223–261.
21. *Press F., Ewing M.* Theory of air-coupled flexural waves // *J. Appl. Phys.* 1951. V. 22. P. 892–899.
22. *Press F., Oliver J.* Model study of air-coupled surface waves // *J. Acoust. Soc. Am.* 1955. V. 27. P. 43–46.
23. *Tolstoy I.* Dispersion and simple harmonic sources in wave ducts // *J. Acoust. Soc. Am.* 1955. V. 27. P. 897–910.
24. *Tolstoy I., Usdin E.* Wave propagation in elastic plates: Low and high mode dispersion // *J. Acoust. Soc. Am.* 1957. V. 29. P. 37–42.
25. *Negishi K.* Existence of negative group velocities for Lamb waves // *Japanese J. Appl. Physics.* 1987. V. 26. Suppl. 26–1. P. 171–173.
26. *Biot M.A.* General theorems on the equivalence of group velocity and energy transport // *Phys. Rev.* 1957. V. 105. P. 1129–1137.
27. *Lowe M.J.S.* Plate waves for the NDT of diffusion bonded titanium / *PhD thesis.* UK: Imperial College, 1992.
28. *Lyon R.H.* Response of an elastic plate to localized driving forces // *J. Acoust. Soc. Am.* 1955. V. 27. P. 259–265.
29. *Bobrovnikskii Yu.I.* Orthogonality relations for Lamb waves // *Soviet Acoustical Physics.* 1973. V. 18 (4). P. 432–433.
30. *Auld B.A.* *Acoustic Fields and Waves in Solids*, 2nd ed. Malabar, Florida: Robert E. Krieger Publishing Company, 1990. V. 2.
31. *Вовк А.Е., Тютюкин В.В.* Возбуждение нормальных волн в плоском упругом волноводе силами, заданными в его поперечном сечении // *Тр. Акуст. Института.* 1969. Вып. IX. С. 5–26.
32. *Duquenne L., Moulin E., Assaad J., Grondel S.* Transient modeling of Lamb waves generated in viscoelastic materials by surface bonded piezoelectric transducers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. V. 116. P. 133–141.
33. *Kirrmann P.* On the completeness of Lamb modes // *Journal of Elasticity.* 1995. V. 37. P. 39–69.
34. *Zakharov D.D.* Orthogonality of 3D guided waves in viscoelastic laminates and far field evaluation to a local acoustic source // *Int. J. Solids and Structures.* 2008. V. 45. P. 1788–1803.
35. *Pagneux V., Maurel A.* Determination of Lamb mode eigenvalues // *J. Acoust. Soc. Am.* 2001. V. 110. P. 1307–1314.
36. *Malischewsky W.* Orthonormalization of plane surface and body waves (in German) // *Gerlands Beiträge zur Geophys.* 1970. V. 79. P. 468–474.

37. *Stange S., Friederich W.* Guided wave propagation across sharp lateral heterogeneities: the complete wavefield at plane vertical discontinuities // *Geophys. J. Int.* 1992. V. 109. P. 183–190.
38. *Keldysh M.V.* On the completeness of eigenfunctions of some classes of non self-adjoint linear operators // *Russian Mathematical Surveys.* 1971. V. 26 (4). P. 15–44.
39. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // *Commun. Pure Appl. Math.* 1962. V. 15. P. 119–147.
40. *Lowe M.J.S., Diligent O.* Low-frequency reflection characteristics of the s_0 Lamb wave from a rectangular notch in a plate // *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. V. 111. P. 64–74.
41. *Brevdo L.* On the stability of Lamb modes // *Acta Mech.* 1996. V. 117. P. 71–80.
42. *Stoneley R.* The seismological implications of aelotropy in continental structures // *Roy. Astronomical Soc., Monthly Notes, Geophys. Suppl.* 1949. V. 5. P. 343–353.
43. *Musgrave M.J.P.* On the propagation of elastic waves in aelotropic media. I. General principles // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1954. V. 226. P. 339–355.
44. *Musgrave M.J.P.* On the propagation of elastic waves in aelotropic media. II. Media of hexagonal symmetry // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1954. V. 226. P. 356–366.
45. *Buchwald V.T.* Rayleigh waves in transversely isotropic media // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1961. V. 14. P. 293–317.
46. *Stoneley R.* The propagation of surface elastic waves in a cubic crystal // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1955. V. 232. P. 447–458.
47. *Miller G.F., Musgrave M.J.P.* On the propagation of elastic waves in aelotropic media. III. Media of cubic symmetry // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1956. V. 236. P. 352–383.
48. *Mitra M.* Propagation of elastic waves in an infinite plate of cylindrically aelotropic material // *ZAMP.* 1959. V. 10. P. 579–583.
49. *Anderson D.L.* Elastic wave propagation in layered anisotropic media // *J. Geophysical Research.* 1961. V. 66. P. 2953–2963.
50. *Solie L.P., Auld B.A.* Elastic waves in free anisotropic plates // *J. Acoust. Soc. Am.* 1973. V. 54. P. 50–65.
51. *Nayfeh A.H., Chimenti D.E.* Free wave propagation in plates of general anisotropic media // *J. Appl. Mech.* 1989. V. 56(4). P. 881–886.
52. *Dayal V., Kinra V.K.* Leaky Lamb waves in an anisotropic plate. I: An exact solution and experiments // *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. V. 85. P. 2268–2276.
53. *Ben-Menahem A., Sena A.G.* Seismic source theory in stratified anisotropic media // *J. Geophys. Research.* 1990. V. 95. № B10. P. 15.395–15.427.
54. *Liu G.R., Tani J., Watanabe K., Ohyoshi T.* Lamb wave propagation in anisotropic laminates // *J. Appl. Mech.* 1990. V. 57. P. 923–929.
55. *Lin W., Keer L.M.* A study of Lamb waves in anisotropic plates // *J. Acoust. Soc. Am.* 1992. V. 92. P. 888–894.
56. *Neau G.* Lamb waves in anisotropic viscoelastic plates. Study of the wave fronts and attenuation. PhD thesis. L'Université de Bordeaux, 2003.
57. *Neau G., Deschamps M., Lowe M.J.S.* Group velocity of Lamb waves in anisotropic plates: Comparison between theory and experiment / *Review of Progress in Quantitative NDE* (ed. by D.O. Thompson and D.E. Chimenti). American Inst. Physics: New York, 2001. V. 20. P. 81–88.
58. *Wang L., Yuan, F.G.* Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments // *Composites Science and Technology.* 2007. V. 67. P. 1370–1384.
59. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of Non-Rayleigh type // *Quart. Appl. Math.* 2003. V. 61. P. 575–582.
60. *Kuznetsov S.V.* Subsonic Lamb waves in anisotropic plates // *Quart. Appl. Math.* 2002. V. 60. P. 577–587.
61. *Маркус С.А.* Низкочастотные приближения для нулевых мод нормальных волн в анизотропных пластинах // *Акуст. журн.* 1987. Т. 33. № 6. С. 1091–1095.
62. *Альици В.И., Любимов В.Н.* Аномальная дисперсия поверхностных упругих волн в анизотропной пластине // *Кристаллография.* 1988. Т. 33. С. 279–285.
63. *Stroh A.N.* Steady state problems in anisotropic elasticity // *J. Math. Phys.* 1962. V. 41. P. 77–103.
64. *Ingebrigtsen K.A., Tonning A.* Elastic surface waves in crystals // *Phys. Rev.* 1969. V. 184. P. 942–951.
65. *Barnett D.M., Lothe J.* Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, Greens functions, and surface waves in anisotropic elastic solids // *Phys. Norv.* 1973. V. 7. P. 13–19.
66. *Chadwick P., Smith G.D.* Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials / *Advances in Applied Mechanics.* N.Y.: Acad. Press, 1977. V. 17. P. 303–376.
67. *Ting T.C.T., Barnett D.M.* Classifications of surface waves in anisotropic elastic materials // *Wave Motion.* 1997. V. 26. P. 207–218.
68. *Ting T.C.T.* On extraordinary semisimple matrix $N(\nu)$ for anisotropic elastic materials // *Quart. Appl. Math.* 1997. V. 55. P. 723–738.
69. *Fu Y.B.* Hamiltonian interpretation of the Stroh formalism in anisotropic elasticity // *Proc. Roy. Soc. A.* 2007. V. 463. P. 3073–3087.
70. *Tanuma K.* *Stroh Formalism and Rayleigh Waves.* Springer, 2010. ISBN 978–9048176229.
71. *Shuvalov A.L.* On the theory of wave propagation in anisotropic plates // *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A.* 2000. V. 456. P. 2197–2222.
72. *Alshits V., Deschamps M., Maugin G.* Elastic waves in anisotropic plates: short-wavelength asymptotics of the dispersion branches $V_n(k)$ // *Wave Motion.* 2003. V. 37 (3). P. 273–292.
73. *Ting T.C.T.* *Anisotropic elasticity: theory and applications.* N.Y.: Oxford Univ. Press, 1996.
74. *Kuznetsov S.V.* Love waves in stratified monoclinic media // *Quart. Appl. Math.* 2004. V. 62. P. 749–766.
75. *Kuznetsov S.V.* SH-waves in laminated plates // *Quart. Appl. Math.* 2006. V. 64. P. 153–165.
76. *Kuznetsov S.V.* Love waves in nondestructive diagnostics of layered composites // *Acoust. Phys.* 2010. V. 56. P. 877–892.

77. *Gregory R.D., Gladwell I.* The reflection of a symmetric Rayleigh-Lamb wave at the fixed or free edge of a plate // *J. Elasticity*. 1983. V. 13. P. 185–206.
78. *Aki K., Richards P.G.* Quantitative Seismology. Theory and Methods. N.Y.: W.H. Freeman and Company, 1980. V. 1.
79. *Ben-Menahem A., Singh S.J.* Seismic Waves and Sources. Dover Publications, 2012. 2nd edition.
80. *Chapman C.* Fundamentals of Seismic Wave Propagation. N.Y.: Cambridge University Press, 2010.
81. *Sheriff R.E., Geldart R.P.* Exploration Seismology. N.Y.: Cambridge University Press, 1995. 2nd edition.
82. *Bergmann L.* Der Ultraschall. Zurich: S. Hirzel Verlag, 1949. 5th Ed.
83. *Викторов И.А.* Ультразвуковые волны Лэмба. Обзор // *Акуст. журн.* 1965. Т. 11. С. 1–18.
84. *Doxbeck M.A., Hussain M.A., Rama J., Abate A., Frankel J.* An algorithm for the determination of coating properties from laser generated and detected Rayleigh waves using wavelet analysis // *Review of Progress in QNDE*. 2002. V. 21. P. 292–299.
85. *Golubev E.V., Gurevich S.Yu., Petrov Yu.V.* On the theory of Lamb wave excitation in metals by pulsed laser radiation // *Acoust. Phys.* 2011. V. 57. P. 620–626.
86. *Royer D., Dieulesaint E.* Elastic Waves in Solids 1. Free and Guided Propagation. N.Y.: Springer, 2009. 2nd edition.
87. *Moler C., Loan Ch.V.* Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later // *SIAM Review*. 2003. V. 45. P. 1–46.
88. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. N.Y.: SIAM, 2002.
89. *Pease M.C.* III. Methods of Matrix Algebra. London: Academic Press, 1965.
90. *Dunkin J.W.* Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1965. V. 55. P. 335–358.
91. *Lévesque D., Piché L.* A robust transfer matrix formulation for the ultrasonic response of multilayered absorbing media // *J. Acoust. Soc. Am.* 1992. V. 92. P. 452–467.
92. *Castaings M., Hosten B.* Delta operator technique to improve the Thomson–Haskell method stability for propagation in multilayered anisotropic absorbing plate // *J. Acoust. Soc. Am.* 1994. V. 95. P. 1931–1941.
93. *Lowe M.J.S.* Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 1995. V. 42. P. 525–542.
94. *Wang L., Rokhlin S.I.* Stable reformulation of transfer matrix method for wave propagation in layered anisotropic media // *Ultrasonics*. 2001. V. 39. P. 413–424.
95. *Bailey D.H.* A portable high performance multiprecision package // *NASA RNR Technical Report, RNR-90-022*. 1993. P. 1–29.
96. *Bailey D.H.* Automatic translation of Fortran programs to multiprecision // *NASA RNR Technical Report, RNR-91-025*. 1993. P. 1–21.
97. *Guo C.Y., Wheeler L.* Extreme Poisson's ratios and related elastic crystal properties // *J. Mech. Phys. Solids*. 2006. V. 54. P. 690–707.
98. *Schecklman S., Zurk L.M., Henry S., Kniffin G.P.* Terahertz material detection from diffuse surface scattering // *J. Appl. Phys.* 2011. V. 109, 094902, <http://dx.doi.org/10.1063/1.3561806>.
99. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. С. 227–235.
100. *Кулеш М.А., Грекова Е.Ф., Шардаков И.Н.* Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. С. 216–225.
101. *Марков М.Г.* Распространение волны Рэлея вдоль границы пористой среды, насыщенной неньютоновской жидкостью // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. С. 502–508.
102. *Бобровницкий Ю.И.* Волна рэлеевского типа на плоской границе двух однородных жидких полупространств // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. С. 579–581.