АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2014, том 60, № 4, с. 376–383

АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

УДК 591.463.21

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ОКЕАНИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

© 2014 г. В. М. Кузькин*, М. В. Куцов, С. А. Пересёлков****

**Научный центр волновых исследований Института общей физики им. А.М. Прохорова РАН*
119991 Москва, ул. Вавилова 38
E-mail: kumiov@yandex.ru
***Воронежский государственный университет*
394006 Воронеж, Университетская пл. 1
E-mail: misha87f@gmail.com; pereselkov@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.11.2013 г.

Получены выражения для частотных смещений интерференционных максимумов, регистрируемых в разнесенных точках наблюдения, которые обусловлены двумерным случайным анизотропным возмущением океанической среды. Показана взаимосвязь между частотными смещениями максимумов поля в точках наблюдения и изменениями разности фазы между интерферирующими нормальными волнами. Рассмотрены применения частотных смещений для решения прямых задач распространения волн.

Ключевые слова: частотные смещения, разность фаз, интерференционный инвариант, структурная функция.

DOI: 10.7868/S0320791914040066

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы анализа пространственной интерференционной картины в океанических волноводах, базирующейся на понятии интерференционного инварианта (ИИ) [1], привлекают внимание уже в течение нескольких последних десятилетий, что нашло отражение, например, в материалах конференций [2, 3]. Эта измеряемая величина определяет смещение частоты излучения, необходимое для выравнивания изменений фаз мод, расфазировка которых вызвана изменением расстояния между источником и приемником. Данная особенность обусловлена волноводной дисперсией, т.е. различием в частотной зависимости постоянных распространения мод, которая обусловливает основные волновые свойства. Максимумы являются хорошо заметными "метками" поля, их положения легко измеряемы и помехоустойчивы [4]. Процессы, возникающие при этом, имеют принципиальное сходство с процессами формирования фазовых голограмм в традиционных областях их применения. Различие в способах их получения не так существенно. Запись интерферограммы, отвечающей океанической среде с ее неоднородностями, заключена в положении выбранного локального максимума, а информация об изменении состояния среды – в частотном сдвиге этого максимума. Интерес к изучению частотных смещений интерференционных максимумов (частотных смещений) вызван потребностями решения как прямых, так и обратных задач (см., например, обзоры [5, 6]). В работах [7, 8] впервые обсуждены возможности мониторинга внутренних солитонов, основанного на информации о частотных смещениях, в условиях взаимодействия нормальных волн.

Вопрос о пространственных (в разнесенных точках наблюдения) частотных смещениях, обусловленных случайными двумерными полями в горизонтальной плоскости, в приближении независимости нормальных волн рассматривался в работе [9]. При этом подробно исследован только случай кругового разнесения точек наблюдения и обсуждены две частные схемы расположения точек наблюдения при изотропном поле возмущения. Настоящая работа, являющаяся продолжением [9], посвящается рассмотрению флуктуаций частотных смещений для произвольного случая положения точек наблюдения по отношению к источнику (исключая случай кругового разнесения), вызванных анизотропным двумерным полем океанических неоднородностей. Обсуждается взаимосвязь между частотными смещениями и изменениями разности фазы интерферирующих мод. На двух примерах демонстрируется значение частотных смещений для решения прямых задач.

2. ЧАСТОТНЫЕ СМЕЩЕНИЯ

При отсутствии возмущения волновод считается горизонтально-однородным. В случайно-неоднородном волноводе поле звукового источника

преобразуется в сумму распространяющихся взаимодействующих мод, амплитуда и фаза которых определяются граничными условиями и параметрами неоднородности. Считается, что амплитуды мод медленно изменяются по частоте и расстоянию по сравнению с быстро осциллирующими фазами, что характерно для крупномасштабных неоднородностей, как, например, поверхностное волнение и внутренние волны. Это позволяет заменить неоднородность фазовым экраном, который воздействует только на фазу распространяющейся нормальной волны, но не на ее амплитуду, что эквивалентно условию адиабатичности.

Геометрия расположения точек наблюдения $Q_1(\mathbf{r}_1, z)$, $Q_2(\mathbf{r}_2, z)$ в горизонтальной плоскости $z = \text{const}$ показана на рисунке. Здесь $\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{n}_{1,2}r_{1,2}$, где $r_{1,2}$ – горизонтальные удаления точек наблюдения $Q_{1,2}$ от точечного источника ($r_{1,2} \gg \lambda$, λ – длина волны), расположенного в начале координат, а $\mathbf{n}_{1,2}$ – единичные векторы в их направлении. В приближении $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$ независимости нормальных волн поле источника u записывается в виде

$$u_{1,2} = \sum_m A_m(\mathbf{r}_{1,2}\omega)\exp\left[i\int_0^{r_{1,2}} h_m(\mathbf{n}_{1,2}r, \omega)dr\right], \quad (1)$$

где A_m и h_m – амплитуда и действительная часть постоянной распространения моды номера m, ω – циклическая частота.

Положим, что в точках наблюдения конструктивно интерферирует совокупность однотипных мод с близкими номерами в окрестности l-го номера моды. Это позволяет, считая номер моды изменяющимся непрерывно, величину h_m разложить в ряд в этой окрестности, ограничившись линейным приближением

$$h_m(\omega, \mathbf{r}_{1,2}) = h_l(\omega, \mathbf{r}_{1,2}) + \alpha(\omega, \mathbf{r}_{1,2})(m - l), \quad (2)$$

где

$$\alpha(\omega, \mathbf{r}_{1,2}) = \partial h_l(\omega, \mathbf{r}_{1,2})/\partial l = h_{(l+1)}(\omega, \mathbf{r}_{1,2}) - h_l(\omega, \mathbf{r}_{1,2}).$$

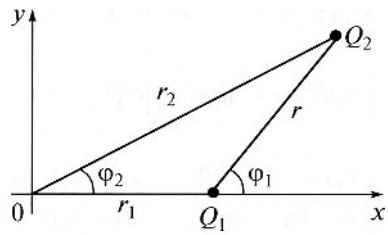
В предположении, что величина $\alpha(\omega, \mathbf{r}_{1,2})$ мало отличается от своего невозмущенного значения $\bar{\alpha}(\omega)$,

$$\alpha(\omega, \mathbf{r}_{1,2}) = \bar{\alpha}(\omega) + \tilde{\alpha}(\omega, \mathbf{r}_{1,2}), \quad |\tilde{\alpha}| \ll |\bar{\alpha}|,$$

$$\bar{\alpha}(\omega) = \partial\bar{h}_l(\omega)/\partial l, \quad \tilde{\alpha}(\omega, \mathbf{r}_{1,2}) = \partial\tilde{h}_l(\omega, \mathbf{r}_{1,2})/\partial l,$$

$$|\tilde{h}_l| \ll |\bar{h}_l|.$$

Ссылки на оценки номера l-й моды и числа Δl синфазно возбужденных мод, формирующих интерференционную картину, приведены в [5]. Поправку $\tilde{h}_l$ к невозмущенному значению $\bar{h}_l$, которое считается известным, можно аналитически вычислить в рамках теории возмущений [10]. Метод выделения групп однотипных мод звукового поля в океанических волноводах, проявляющих разную чувствительность по отношению к различным видам неоднородностей, изложен в [11].



Геометрия расположения точек наблюдения Q_1 и Q_2 в горизонтальной плоскости (x, y). $0Q_1 = r_1$, $0Q_2 = r_2$, $Q_1Q_2 = r$.

Пусть возмущением дисперсионной характеристики волновода являются фоновые внутренние волны $\zeta(z, \mathbf{r}) = \Psi_1(z)\upsilon(\mathbf{r})$, в представлении которых можно ограничиться только собственной функцией $\Psi_1(z)$ первой моды. Тогда поправка для постоянной распространения l-й моды дается выражением

$$\tilde{h}_l(\omega, \mathbf{r}) = -\upsilon(\mathbf{r})\frac{Q\omega^2}{\bar{h}_l(\omega)\bar{c}^2(0)} \times \int_0^H N^2(z)\Psi_1(z)\bar{\psi}_l^2(\omega, z)dz.$$

Здесь $N(z)$ – частота плавучести; $\bar{c}(0)$ и $\bar{\psi}_l(z)$ – скорость звука на поверхности $z = 0$ и собственная функция l-моды невозмущенного волновода; H – глубина волновода; $Q \approx 2.4$ с^2/м – константа, определяемая физическими свойствами воды. Если возмущением является, например, поверхностное волнение $s(\mathbf{r})$, то

$$\tilde{h}_l(\omega, \mathbf{r}) = \frac{s(\mathbf{r})}{2\bar{h}_l(\omega)}\left(\frac{d\bar{\psi}_l(\omega, 0)}{dz}\right)^2.$$

Положения выделенного максимума поля в точках наблюдения $Q_{1,2}$ на частотах $\Omega_{1,2}$ обозначим через $\Omega(\mathbf{r}_{1,2})$. Значения Ω_2 и Ω_1 удовлетворяют условию сохранения фазы для конструктивно интерферирующих мод произвольных номеров m и n, $m \neq n$:

$$\int_0^{r_2} h_{mn}(\Omega_2, \mathbf{n}_2 r'')dr'' = \int_0^{r_1} h_{mn}(\Omega_1, \mathbf{n}_1 r')dr', \quad (3)$$

где $h_{mn} = h_m - h_n$. Разложим фазу в левой части (3) в окрестности точки Ω_1, воспользовавшись представлением (2). В результате для частотного сдвига $\Delta\Omega(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$, полагая выполнение неравенств $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \ll r_{1,2}$ и $|\partial\tilde{\alpha}(\Omega_1)/\partial\omega| \ll |\partial\bar{\alpha}(\Omega_1)/\partial\omega|$, получаем

$$\Delta\Omega(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \Omega(\mathbf{r}_2) - \Omega(\mathbf{r}_1) =$$

$$= -b\left[\int_0^{r_2}\alpha(\Omega_1, \mathbf{n}_2 r'')dr'' - \int_0^{r_1}\alpha(\Omega_1, \mathbf{n}_1 r')dr'\right] = \quad (4)$$

$$= -b\Delta\Phi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = -b[\Delta\Phi_{(l+1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) - \Delta\Phi_l(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)],$$

так что частотный сдвиг с точностью до множителя $(-b)$ воспроизводит разность фаз $\Delta\Phi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ интерферирующих $(l+1)$ и l нормальных волн между точками приема. Здесь $b = [r_1\partial\bar{\alpha}(\Omega_1)/\partial\omega]^{-1}$ – частотный период интерференции между $(l+1)$ и l модами на расстоянии r_1, $\partial\bar{\alpha}(\Omega_1)/\partial\omega = (1/\bar{c}_{g(l+1)}(\Omega_1)) - (1/\bar{c}_{gl}(\Omega_1))$, $\bar{c}_{gl}$ – невозмущенная групповая скорость l-й моды. Частотный сдвиг содержит как среднюю (регулярную) $\Delta\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1$, так и случайную (флуктуационную) $\Delta\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_2 - \tilde{\Omega}_1$ компоненты, $\Delta\Omega = \Delta\bar{\Omega} + \Delta\tilde{\Omega}$, обусловленные дисперсионными характеристиками $\bar{\alpha}$ и $\tilde{\alpha}$ и изменением расстояния. Уравнение (4) определяет локализацию интерференционной полосы в системе координат частотный сдвиг–расстояние между точками наблюдения. Ниже аргумент Ω_1 у соответствующих величин опускается, если это не вызывает вопросов.

В силу инвариантности частотного сдвига к номерам интерферирующих нормальных волн разность фаз $\Delta\Phi_{mn}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$, используя (3) и (4), можно представить как

$$\Delta\Phi_{mn}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \Delta\Phi_m(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) - \Delta\Phi_n(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \\ = -\Delta\Omega/b_{mn}, \quad b_{mn} = [r_1\partial\bar{h}_{mn}/\partial\omega]^{-1}, \quad (5)$$

т.е. для любой пары однотипных мод (m, n) разность фаз $\Delta\Phi_{mn}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ равна произведению частотного сдвига $\Delta\Omega$ на весовой множитель $(-1/b_{mn})$, определяемый частотным масштабом интерференции этих мод. Таким образом, регистрируя частотные смещения, можно изучать интерференционную картину, формируемую в условиях многомодового распространения. Данный подход к интерферометрическим измерениям весьма актуален в мелком море, когда моды не разрешаются.

Регулярная составляющая частотного сдвига, согласно (4), равна

$$\Delta\bar{\Omega} = -b(r_2 - r_1)\bar{\alpha}, \quad (6)$$

где с точностью до квадратичного члена малости r^2/r_1^2 разность расстояний точек наблюдения от источника (рис.) дается выражением

$$r_2 - r_1 = r(\cos\varphi_1 + r\sin^2\varphi_1/2r_1). \quad (7)$$

Учитывая определение ИИ $\bar{\beta}$ [1], соотношение (6) можно представить также в виде

$$\Delta\bar{\Omega} = \frac{\bar{\beta}\Omega_1(r_2 - r_1)}{r_1}.$$

В мелком море интерференционный инвариант однотипных групп мод оценивается величиной порядка нескольких единиц, его методы измерения, не прибегая к регистрации частотных смещений, изложены в работах [11, 12].

Запишем разложение флуктуационной компоненты однородного случайного поля $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$ в двухмерный интеграл Фурье [13]

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{\alpha}(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{kr})d^2k, \quad (8)$$

где $\hat{\alpha}(\mathbf{v})$ – пространственная спектральная амплитуда поля $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\nu_x, \nu_y)$ – волновой вектор, $d^2\nu = d\nu_x d\nu_y$. Используя разложение (8), можно выразить флуктуационную составляющую частотного сдвига в соответствии с (4), что дает

$$\Delta\tilde{\Omega}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = -b \times \\ \times\left[r_2\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\alpha}(\mathbf{v})\exp(i\xi_2)\frac{\sin\xi_2}{\xi_2}d^2\nu - r_1 \times \right. \\ \left. \times r_1\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\alpha}(\mathbf{v})\exp(i\xi_1)\frac{\sin\xi_1}{\xi_1}d^2\nu\right]. \quad (9)$$

Здесь $\xi_2 = (\nu_x r_{2x} + \nu_y r_{2y})/2 = \mathbf{v}\mathbf{r}_2/2$, $r_{2x} = r_2 \times \cos\varphi_2$, $r_{2y} = r_2\sin\varphi_2$; $\xi_1 = \nu_x r_1/2 = \mathbf{v}\mathbf{r}_1/2$. У однородного случайного поля $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$ спектральные амплитуды $\hat{\alpha}(\mathbf{v}')$ и $\hat{\alpha}(\mathbf{v}'')$ дельта-коррелированы по $\mathbf{v}$ [13]:

$$\overline{\hat{\alpha}(\mathbf{v}')\hat{\alpha}(\mathbf{v}'')} = F_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v}')\delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}''),$$

где $F_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v}')$ – пространственный спектр поля $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$, что позволяет средний квадрат флуктуаций частотных смещений (9), представляющий структурную функцию $D_{\tilde{\Omega}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ случайного поля $\tilde{\Omega}(\mathbf{r})$ частотных положений максимумов, записать в виде

$$D_{\tilde{\Omega}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = b^2\left[r_2^2\int_{-\infty}^{\infty}F_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v})T_2^2(\mathbf{v}\mathbf{r}_2)d^2\mathbf{v} + \right. \\ + \int_{-\infty}^{\infty}F_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v})T_1^2(\mathbf{v}\mathbf{r}_1)d^2\mathbf{v} - 2r_1r_2\int_{-\infty}^{\infty}F_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v})T_1(\mathbf{v}\mathbf{r}_1)T_2(\mathbf{v}\mathbf{r}_2) \times \\ \left. \times\cos[(\nu_x(r_{2x} - r_1) + \nu_y r_{2y})/2]d^2\nu\right], \quad (10)$$

где $T_{1,2} = \sin\xi_{1,2}/\xi_{1,2}$. При $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ структурная функция обращается в нуль, $D_{\tilde{\Omega}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) = 0$.

Сомножители $T_{1,2}$ под знаками интегралов в (10) подавляют пространственные частоты ν_x, ν_y, удовлетворяющие условиям $|\nu_x r_1| > 2\pi$, $|\nu_x r_{2x} + \nu_y r_{2y}| > 2\pi$, т.е. сглаживают быстрые (в масштабах r_1, r_{2x}, r_{2y}) изменения $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$. Можно сказать, что эта операция отвечает действию пространственных фильтров с передаточными функциями $T_{1,2}$.

Полоса пропускания таких фильтров определяется отношением $r_1/\Delta r_x$, $r_{2x}/\Delta r_x$, $r_{2y}/\Delta r_y$, где $\Delta r_{x,\,y}$ – радиусы корреляции поля $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$ в направлении осей x, y (для анизотропных полей радиусы корреляции по разным направлениям неодинаковы). Ширина спектра $\Delta\nu_{x,\,y}$ и радиус корреляции $\Delta r_{x,\,y}$ связаны соотношением "неопределенности" (размытости): $\Delta\nu_x\Delta r_x \geq 1$, $\Delta\nu_y\Delta r_y \geq 1$ [13]. При этом коротко-коррелированным полям ($\Delta r_{x,\,y}$ малы) отвечают широкие пространственные спектры ($\Delta\nu_{x,\,y}$ велики), тогда как при больших радиусах корреляции (долго-коррелированные поля) ширина спектра мала. Таким образом, функции передачи пространственных фильтров в той или иной мере сужают спектр входного воздействия и, следовательно, уменьшают средний квадрат флуктуаций частотного сдвига. Характер фильтрации зависит от удаленности точек наблюдения и их расположения по отношению к полю возмущения. Можно пояснить это также следующим образом. Уменьшение длины возмущения вдоль трассы усиливает частоту изменения его знака, что приводит к более частым случайным перескокам фазы на π и, следовательно, к уменьшению интенсивности флуктуаций частотных смещений. Передаточные функции $T_{1,\,2}$ описывают механизм сглаживания этих флуктуаций.

Рассмотрим случай низкочастотной (длинноволновой) области возмущения и сравнительно коротких трасс, когда выполняются условия $\xi_{1,\,2} < \pi/4$. Тогда можно считать $T_{1,\,2} \approx 1$ и выражение (10) упрощается:

$$\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = b^2(r_2-r_1)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v})d^2\nu = b^2(r_2-r_1)^2\sigma_{\tilde{\alpha}}^2,$$
$$\sigma_{\tilde{\alpha}}^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}F_{\alpha}(\mathbf{v})d^2\nu, \tag{11}$$

т.е. интенсивность флуктуаций частотного сдвига определяется дисперсией $\sigma_{\tilde{\alpha}}^2$ возмущения $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$ и не зависит от ориентации положения точек наблюдения по отношению к его направлению распространения. При этом разность расстояний до точек наблюдения дается соотношением (7). Это можно пояснить следующим образом. В длинноволновой области дифракция слабо зависит от ориентации неоднородностей анизотропной среды по отношению к направлению распространения звуковой волны. С уменьшением длины волны и увеличением расстояния, проходимого волной в такой среде, дифракционные эффекты возрастают и накапливаются, что делает их зависимыми от длины и направления расположения точек наблюдения относительно расположения неоднородностей. Очевидно, что оценку $\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2}$ (11) можно рассматривать как оценку сверху для среднего квадрата флуктуаций частотного сдвига.

Обратимся к вопросу о спектральном разложении $F_{\tilde{\Omega}}(\mathbf{v})$ поля положений максимумов $\tilde{\Omega}(\mathbf{r})$. Как известно [13], спектральное разложение и структурная функция связаны соотношением

$$D_{\tilde{\Omega}}(\mathbf{r}) = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_{\tilde{\Omega}}(\mathbf{v})(1-\cos\mathbf{vr})d^2\nu. \tag{12}$$

Сравнивая выражения (11) и (12), находим

$$F_{\tilde{\Omega}}(\mathbf{v}) = \frac{b^2}{2}(r_2-r_1)^2\frac{F_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v})}{(1-\cos\mathbf{vr})}.$$

Обсудим два частных случая расположения точек наблюдения.

2.1. Поперечное разнесение

Рассмотрение сводится к разобранному выше случаю, если положить $\varphi_1 = \pi/2$. Регулярный частотный сдвиг и средний квадрат флуктуаций частотных смещений ($\xi_{1,\,2} < \pi/4$) определяются выражениями (6) и (11) соответственно, в которых, согласно (7), следует положить $r_2 - r_1 = r^2/2r_1$.

Проанализируем случай дальней зоны, $r_{1,2} \gg r^2/\lambda$. Можно считать, что в точки наблюдения волны приходят по параллельным траекториям, $r_2 = r_1 = r_0$. Очевидно, что регулярная составляющая частотного сдвига равна нулю, $\Delta\bar{\Omega} = 0$. Флуктуации частотного сдвига, в отличие от (4), записываются как

$$\Delta\tilde{\Omega} = -b\int\limits_{0}^{r_0}[\tilde{\alpha}(x,r)-\tilde{\alpha}(x,0)]dx.$$

Если теперь применительно к данному выражению проделать выкладки, аналогичные вышеизложенным, то для интенсивности флуктуаций частотных смещений получаем

$$\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = 2b^2r_0^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(\nu_x r_0/2)}{(\nu_x r_0/2)^2}(1-\cos\nu_y r)\times$$
$$\times F_{\tilde{\alpha}}(\nu_x,\nu_y)d\nu_x d\nu_y. \tag{13}$$

Перейдем к полярным координатам в ν-пространстве: $F_{\tilde{\alpha}}(\nu) = F_{\tilde{\alpha}}(\nu,\theta)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\nu,\theta)$, $\nu = |\mathbf{v}|$. Положим, что пространственный спектр факторизуется:

$$F_{\tilde{\alpha}}(\nu,\theta) = G_{\tilde{\alpha}}(\nu)W_{\tilde{\alpha}}(\theta), \tag{14}$$

при этом угловой спектр $W_{\tilde{\alpha}}(\theta) = \int\limits_{0}^{\infty}F_{\tilde{\alpha}}(\nu,\theta)\nu d\nu$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}W_{\tilde{\alpha}}(\theta)d\theta = 1.$$

В результате, вводя переменные $\eta = \nu r_0/2$, $\mu = \nu r$, имеем

$$\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = 2b^2r_0^2\int_0^\infty G_{\tilde{\alpha}}(\nu)H(\eta,\mu)\nu d\nu, \qquad (15)$$

где

$$H(\eta,\mu) = \int_{-\pi}^{\pi} W_{\tilde{\alpha}}(\theta)\frac{\sin^2(\eta\cos\theta)}{(\eta\cos\theta)^2}[1-\cos(\mu\sin\theta)]d\theta. \qquad (16)$$

Оценим средний квадрат флуктуаций частотных смещений в случае сильной анизотропии, характерной для фоновых внутренних волн [14]. С этой целью зададим угловой спектр $W_{\tilde{\alpha}}(\theta)$ прямоугольной функцией с малой шириной $\Delta\theta$:

$$W_{\tilde{\alpha}}(\theta) = \begin{cases} 2\pi/\Delta\theta, & -(\Delta\theta/2)+\theta_0 \le \theta \le \theta_0+(\Delta\theta/2), \\ 0, & \theta < \theta_0-(\Delta\theta/2), \quad \theta > \theta_0+(\Delta\theta/2). \end{cases} \qquad (17)$$

Рассмотрим отдельно два примера.

Пример 1. Положим $\theta_0 = 0$, что соответствует распространению возмущения вдоль трассы, т.е. волновой фронт перпендикулярен трассе. Соответствующее (17) выражение (16) имеет вид

$$H(\eta,\mu) = \frac{\pi}{3}(\Delta\theta)^2\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\sin^2\left(\frac{\nu r_0}{2}\right),$$

при этом, согласно (15), принимая во внимание обозначение коэффициента b (см. пояснение к (4)), средний квадрат флуктуаций частотных смещений равен

$$\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = \frac{2\pi}{3}\frac{(\Delta\theta)^2}{(\partial\bar{\alpha}/\partial\omega)^2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \times \int_0^\infty G_{\tilde{\alpha}}(\nu)\sin^2(\nu r_0/2)\nu d\nu.$$

Видно, что интенсивность флуктуаций частотного сдвига ослабляется с увеличением расстояния r_0 между источником и точками наблюдения и повышается с ростом расстояния r между точками наблюдения, ширины $\Delta\theta$ углового спектра возмущения и частоты звука. В предельном случае дельта-функции углового спектра, $W_{\tilde{\alpha}}(\theta) = \delta(\theta-0)$, $\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = 0$.

Пример 2. Пусть $\theta_0 = \pi/2$, т.е. трасса расположена вдоль волнового фронта возмущения. Тогда при выполнении условий $(\Delta\theta)^2 \ll (6/\nu r_0)^2$ функция (16) запишется как

$$H(\eta,\mu) = 2\pi(1-\cos\mu)$$

и, считая $\mu \ll 1$, выражение (15) принимает вид

$$\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = 2\pi\frac{r^2}{(\partial\bar{\alpha}/\partial\omega)^2}\int_0^\infty G_{\tilde{\alpha}}(\nu)\nu^3 d\nu, \qquad (18)$$

так что интенсивность флуктуаций частотных смещений, в отличие от предыдущего примера, не зависит от расстояния до точек наблюдения.

2.2. Продольное разнесение

Источник и точки приема расположены на одной прямой: $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $r_2 = r_1 + r$ (рисунок). Регулярная составляющая частотного сдвига равна

$$\Delta\tilde{\Omega} = -\frac{r}{r_1}\frac{\bar{\alpha}}{(\partial\bar{\alpha}/\partial\omega)} = \bar{\beta}\Omega_1\frac{r}{r_1}. \qquad (19)$$

Флуктуации частотного сдвига, согласно (4) и (8), записываются как

$$\Delta\tilde{\Omega} = -b\int_{r_1}^{r_2}\exp(i\nu_x x)dx\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\alpha}(\nu_x,\nu_y)d\nu_x d\nu_y$$

и для среднего квадрата $\Delta\tilde{\Omega}$ находим

$$D_{\tilde{\Omega}}(r) = \overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = b^2r^2\int_{-\infty}^{\infty}F_{\tilde{\alpha}}(\nu_x,\nu_y)\frac{\sin^2(\nu_x r/2)}{(\nu_x r/2)^2}d\nu_x d\nu_y. \qquad (20)$$

В длинноволновом приближении и для небольших расстояний между точками наблюдений, $\nu_x r < \pi/2$, как и прежде (см. (11)), интенсивность флуктуаций частотного сдвига

$$\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = b^2r^2\sigma_{\tilde{\alpha}}^2$$

полностью определяется дисперсией возмущения $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$ и не зависит от ориентации положения точек наблюдения по отношению к направлению его распространения.

Выясним, как связаны пространственные спектры возмущения дисперсионной характеристики $\tilde{\alpha}(\mathbf{r})$ и частотных положений максимумов поля $\tilde{\Omega}(\mathbf{r})$. В рассматриваемом случае спектральное разложение и структурная функция определяются соотношением [13]

$$D_{\tilde{\Omega}}(r) = 2\int_{-\infty}^{\infty}F_{\tilde{\Omega}}(\theta)(\nu_x,\nu_y)[1-\cos\nu_x r]d\nu_x d\nu_y. \qquad (21)$$

Продифференцируем (20) и (21) по r и сравним полученные выражения между собой. В результате получаем

$$F_{\tilde{\Omega}}(\nu_x,\nu_y) = b^2\frac{F_{\tilde{\alpha}}(\nu_x,\nu_y)}{\nu_x^2}.$$

Если теперь перейти к полярным координатам и представить пространственный спектр возмущения в форме (14), то, выражение (20) примет вид

$$\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = 2b^2r^2\int_0^\infty G_{\tilde{\alpha}}(\nu)N(\tau)\nu d\nu, \qquad (22)$$

где

$$N(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} W_{\tilde{\alpha}}(\theta)\frac{\sin^2(\tau\cos\theta)}{(\tau\cos\theta)^2}d\theta.$$

Здесь $\tau = \nu r/2$. Полагая, что угловой спектр задается соотношением (17), рассмотрим средний квадратичный частотный сдвиг для случаев $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = \pi/2$ направлений распространения возмущения относительно трассы.

Пусть $\theta_0 = 0$, тогда

$$N(\tau) = 2\pi\frac{\sin^2(\nu r/2)}{(\nu r/2)^2}$$

и (22) записывается как

$$\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = 2\pi\frac{r^2}{r_1^2(\partial\bar{\alpha}/\partial\omega)^2}\int_0^\infty G_{\tilde{\alpha}}(\nu)\frac{\sin^2(\nu r/2)}{(\nu r/2)^2}\nu d\nu,$$

что в случае $\nu r/2 < \pi/4$, т.е. $\sin(\nu r/2) \approx \nu r/2$, дает

$$\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2} = 2\pi\frac{r^2}{r_1^2(\partial\bar{\alpha}/\partial\omega)^2}\int_0^\infty G_{\tilde{\alpha}}(\nu)\nu d\nu, \qquad (23)$$

так что интенсивность флуктуаций частотных смещений инвариантна по отношению к анизотропии поля возмущения.

Положим $\theta_0 = \pi/2$. При условии $(\Delta\theta)^2 \ll (6/\nu r_1)^2$ функция $N(\eta, \mu) = 2\pi$ и выражение для среднего квадратичного частотного сдвига сводится к (23). При сильной анизотропии возмущения, как и следовало ожидать, наибольший уровень флуктуаций частотных смещений имеет место при угле $\theta_0 = \pi/2$.

3. ИЗМЕРЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЯ

Проиллюстрируем на двух примерах возможность использования частотных смещений для решения прямых задач.

3.1. Интерференционная картина

Изменчивость ИИ β рассмотрим применительно к продольному разнесению точек наблюдения. В рамках численного моделирования влияние внутренних волн и поверхностного волнения на поведение ИИ обсуждалось в работах [12, 14–17], однако аналитически, насколько известно авторам, задача о влиянии возмущения на статистические характеристики ИИ не получила до настоящего времени общего решения.

При возмущении океанической среды ИИ представим в виде

$$\beta = \bar{\beta} + \tilde{\beta},$$

где $\bar{\beta} = (\Delta\bar{\Omega}/\Omega_1)(r_1/r)$ – регулярная составляющая, $\tilde{\beta} = (\Delta\tilde{\Omega}/\Omega_1)(r_1/r)$ – флуктуационная составляющая. Согласно (6) и (22), регулярная составляющая равна

$$\bar{\beta} = -(\bar{\alpha}/\Omega_1)(\partial\alpha/\partial\omega)^{-1},$$

а среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_\beta = \frac{|\partial\alpha/\partial\omega|^{-1}}{\Omega_1}\left[\int_0^\infty G_{\tilde{\alpha}}(\nu)N(\tau)\nu d\nu\right]^{1/2}.$$

Регулярная составляющая $\bar{\kappa}$ и среднеквадратичное отклонение σ_κ углового коэффициента $\kappa = \Delta\Omega/r$ линии равной фазы соответственно равны

$$\bar{\kappa} = -\frac{\bar{\alpha}}{r_1}(\partial\bar{\alpha}/\partial\omega)^{-1},$$

$$\sigma_\kappa = \frac{|\partial\alpha/\partial\omega|}{r_1}\left[\int_0^\infty G_{\tilde{\alpha}}(k)N(\tau)kdk\right]^{1/2}.$$

Размеры δr, $\delta\Omega$ локализованной полосы оценим из условия, что в пределах ее ширины относительно центра (r_1, Ω_1) разность фаз между крайними однотипными модами с номерами i и j не превышает π:

$$|h_{ij}(\Omega_1)|\delta r = \pi, \quad |h_{ij}(\Omega_1 + \delta\Omega)|r_1 - |h_{ij}(\Omega_1)|r_1 = \pi.$$

Положим $h_{ij} = \bar{h}_{ij} + \tilde{h}_{ij}$, тогда, если воспользоваться линейным приближением для второго условия, получаем

$$\delta r = \overline{\delta r} + \tilde{\delta r}, \quad \delta\Omega = \overline{\delta\Omega} + \tilde{\delta\Omega},$$

где

$$\overline{\delta r} = \frac{\pi}{\bar{h}_{ij}}, \quad \overline{\delta\Omega} = \frac{\pi}{r_1(\partial\bar{h}_{ij}/\partial\omega)}$$

– размеры в отсутствие возмущения,

$$\tilde{\delta r} = -\overline{\delta r}\frac{\tilde{h}_{ij}}{\bar{h}_{ij}}, \quad \tilde{\delta\Omega} = -\overline{\delta\Omega}\frac{\partial\tilde{h}_{ij}/\partial\omega}{\partial\bar{h}_{ij}/\partial\omega}$$

– случайные составляющие, обусловленные возмущением. Откуда для среднеквадратичных отклонений размеров интерференционной полосы получаем

$$\sigma_{\delta r} = |\overline{\delta r}|\frac{\sigma_{ij}}{|\bar{h}_{ij}|}, \quad \sigma_{\delta\Omega} = |\overline{\delta_\Omega}|\frac{\sigma_{h'_{ij}}}{h'_{ij}},$$

где $\sigma^2_{h_{ij}} = \overline{\tilde{h}^2_{ij}}$, $\sigma^2_{h'_{ij}} = \overline{(\tilde{h}'_{ij})^2}$ – средние квадраты случайных процессов $\tilde{h}_{ij}$ и $\tilde{h}'_{ij}$ соответственно, $\tilde{h}'_{ij} = \partial\tilde{h}_{ij}/\partial\omega$.

3.2. Флуктуации фазы

Рассмотрим поперечное разнесение точек наблюдения в дальней зоне, ограничившись случаем, когда трасса расположена вдоль волнового фронта возмущения (раздел 2.1, пример 2).

Согласно (5) и (18), выражение для среднего квадрата случайной разности фаз $\Delta\tilde{\Phi}_{mn}$ имеет вид

$$\overline{|\Delta\tilde{\Phi}_{mn}|^2} = 2\pi\frac{b^2}{b_{mn}^2}(r_0 r)^2\int_0^\infty G_{\tilde{\alpha}}(\nu)\nu^3 d\nu,$$

так что средний квадратичный набег разности фаз мод обратно пропорционален квадрату частотного периода интерференции между ними. Следовательно, увеличение частоты звука и номеров мод влечет за собой возрастание флуктуаций разности фаз нормальных волн.

Случайная фаза $\tilde{\Phi}_m$ моды номера m является гауссовой функцией со средним значением равным нулю, $\overline{\tilde{\Phi}_m} = 0$. Разность фаз между точками приема равна

$$\Delta\tilde{\Phi}_m = \tilde{\Phi}_m(r_0 r) - \tilde{\Phi}_m(r_0, 0) = \int_0^{r_0}[\tilde{h}_m(x, r) - \tilde{h}_m(x, 0)]dx,$$

что для среднего квадрата $\Delta\tilde{\Phi}_m$, представляющего собой структурную функцию фазы $\tilde{\Phi}_m$, дает

$$(\overline{|\Delta\tilde{\Phi}_m|^2} = 2\pi(r_0 r)^2)\int_0^\infty G_{\tilde{h}_m}(\nu)\nu^3 d\nu,$$

где $G_{\tilde{h}_m}(\nu)$ – волновой спектр возмущения $\tilde{h}_m$. При квадратичном законе изменения структурной функции реализации фазы представляют собой линейные функции со случайным наклоном. Линейная зависимость $\tilde{\Phi}_m(r)$ не нарушает когерентности при сложении полей, принимаемых разными участками апертуры. Это приводит лишь к случайному сдвигу диаграммы направленности по отношению к невозмущенной среде. Если величина этого сдвига превышает ширину характеристики направленности $\Delta\vartheta = \lambda/r$, то направленность антенны не будет иметь ничего общего с ее направленностью в отсутствие возмущения. Следует ожидать, что и при распространении нескольких мод линейная зависимость разности фаз вдоль апертуры сохраняется. Сканирование по углу в условиях многомодового распространения, вызванное возмущением, может приводить к нарушению когерентного сложения нормальных волн в пределах апертуры, что приводит к разрушению диаграммы направленности [18]. Критический размер антенны r_{cr}, $r \le r_{cr}$, при котором наступает этот фактор, можно рассматривать как поперечный радиус когерентности.

Рассмотрим эти вопросы подробнее. Волновое поле (1) в точках приема запишем как

$$u_1 = \sum_m A_m \exp[ih_m r_0 + i\tilde{\Phi}_m(r_0, 0)],$$

$$u_2 = \sum_m A_m \exp[ih_m r_0 + i\tilde{\Phi}_m(r_0, 0)],$$

откуда следуют соотношения для фазы

$$\Phi_1 = \operatorname{arctg}\frac{\sum_m A_m \sin[h_m r_0 + \tilde{\Phi}_m(r_0, 0)]}{\sum_m A_m \cos[h_m r_0 + \tilde{\Phi}_m(r_0, 0)]},$$

$$\Phi_2 = \operatorname{arctg}\frac{\sum_m A_m \sin[h_m r_0 + \tilde{\Phi}_m(r_0, r)]}{\sum_m A_m \cos[h_m r_0 + \tilde{\Phi}_m(r_0, r)]},$$

что позволяет выражение для разности фаз $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$, считая возмущение разности фаз $\tilde{\Phi}_m - \tilde{\Phi}_n$ малой величиной, $|\tilde{\Phi}_m - \tilde{\Phi}_n| \ll 1$, преобразовать к виду

$$\Delta\Phi = \frac{1}{|\bar{u}|^2} = \sum_m\sum_n A_m A_n \cos(h_m r_0)\cos(h_n r_0)(\Delta\tilde{\Phi}_{mn}), \tag{24}$$

где $\bar{u}$ – поле источника (1) в отсутствие возмущения. Если $m = n$, то $\Delta\Phi = 0$. Как и следовало ожидать, в отсутствие возмущения $\Delta\Phi = 0$.

Угол наклона фазового фронта γ, характеризующий угловое смещение диаграммы направленности, определяется по разности фаз:

$$\gamma = \frac{\Delta\Phi}{kr},$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число [13]. Откуда для дисперсии угла наклона, используя (5) и (24), имеем

$$\sigma_\gamma^2 = \overline{\gamma^2} = \frac{\lambda^2}{(2\pi r)^2}\frac{\overline{|\Delta\tilde{\Omega}|^2}}{|\bar{u}|^4}w^2, \tag{25}$$

где

$$w = \sum_m\sum_n A_m A_n \frac{1}{b_{mn}}\cos(h_m r_0)\cos(h_n r_0),$$

$$m \ne n.$$

Область допустимых флуктуаций угла γ, для которых выполнено неравенство

$$\sigma_\gamma \le \Delta\vartheta/2,$$

определим как критерий приемлемого сдвига диаграммы направленности, которое, согласно (25), накладывает на среднеквадратичное отклонение частотного сдвига $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}$ ограничение

$$\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}} \le \frac{\pi|\bar{u}|^2}{w}.$$

Этому неравенству, учитывая (18), можно придать форму

$$r \le r_* = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{|\bar{u}|^2}{br_0 w}\left[\int_0^\infty G_{\tilde{\alpha}}(\nu)\nu^3 d\nu\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{26}$$

Критическое значение расстояния r_{cr} (поперечный радиус когерентности) между точками наблюдения можно оценить из соображений син-

фазности нормальных волн при среднеквадратичном угле наклона σ_γ (25) фазового фронта [18]. При малых углах, $\sin\gamma \approx \gamma$, получаем

$$r \le r_{cr} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho_{ij}|\bar{u}|^2}{\lambda b r_0 w}\left[\int_0^\infty G_{\tilde{\alpha}}(\nu)\nu^3 d\nu\right]^{-\frac{1}{2}}, \qquad (27)$$

где $\rho_{ij} = 2\pi/\bar{h}_{ij}$ – наименьший пространственный период интерференции, i и j – максимальный и минимальный номера однотипных мод. В рамках численного моделирования влияние фоновых внутренних волн на поведение поперечного радиуса когерентности r_{cr} обсуждалось в работе [19]. Отметим, что при малых r, $r \ll l_{\tilde{\alpha}}$, где $l_{\tilde{\alpha}}$ – поперечный радиус корреляции $\tilde{\alpha}$, угол прихода, определяемый направлением нормали к фазовому фронту, совпадает с γ [13].

Отношение $\varepsilon = r_{cr}/r_*$, согласно (26) и (27), равно

$$\varepsilon = \rho_{ij}/\lambda,$$

так что $\varepsilon \gg 1$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для произвольной геометрии расположения точек наблюдения в горизонтальной плоскости, исключая случай кругового разнесения, обсуждены статистические характеристики пространственных частотных смещений, вызванных двумерным случайным анизотропным возмущением океанической среды. Задача рассматривалась в приближении независимости нормальных волн. Измерения частотных сдвигов позволяют получать картину изменения разности фаз интерферирующих нормальных волн, чего невозможно добиться другими известными методами, если моды не разрешаются. Подробно рассмотрены случаи продольного и поперечного разнесения точек наблюдения. Проанализированы статистические характеристики ИИ и оценены смещение диаграммы направленности и размер пространственного радиуса когерентности.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований Отделения физических наук РАН “Фундаментальные основы акустической диагностики искусственных и природных сред” и Научной школы № НШ-4484.2014.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чупров С.Д.* Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане // Акустика океана. Современное состояние. М.: Наука, 1982. С. 71–82.
2. Ocean acoustic interference phenomena and signal processing (San Francisco, CA, May 1–3, 2001; AIP Conf. Proc.), Ed. by Kuperman W.A. and D'Spain G.L. (N.Y., Melville, 2002).
3. Интерференционные явления в акустике океана // Акустика океана / Докл. XIV школы-семинара им. акад. Л.М. Бреховских, совмещенной с XXVI сессией РАО. М.: ГЕОС, 2013. 341–395 с.
4. *Кузькин В.М., Луньков А.А., Пересёлков С.А.* Корреляционный метод измерения частотных сдвигов максимумов звукового поля, вызванных возмущениями океанической среды // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 5. С. 655–661.
5. *Kuz'kin V.M., Lyakhov G.A., Pereselkov S.A.* Method for measuring the frequency shifts of interference maxima in monitoring of dispersion media: theory, implementation, and prospects // Phys. Wave Phenom. 2010. V. 18. № 3. P. 196–222.
6. *Кузькин В.М., Куцов М.В., Пересёлков С.А.* Интерференция нормальных волн в мелком море // Труды ИОФ РАН. М.: Наука, 2013. Т. 69. С. 171–198.
7. *Кузькин В.М., Луньков А.А., Пересёлков С.А.* Частотные смещения максимумов звукового поля, вызванные интенсивными внутренними волнами // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 3. С. 342–349.
8. *Kuz'kin V.M., Kutsov M.V., Pereselkov S.A.* Frequency shifts of sound field maxima in few-mode propagation, which are initiated by internal wave solitons // Phys. Wave Phenom. 2013. V. 21. № 2. P. 139–151.
9. *Kuz'kin V.M., Pereselkov S.A., Petnikova E.A.* The possibility of reconstruction of two-dimensional random inhomogeneities in a shallow sea by frequency shifts of the spatial interference structure of the sound field // Phys. Wave Phenom. 2008. V. 16. № 1. P. 42–51.
10. *Буров В.А., Сергеев С.Н.* Современные методы теории возмущения при расчете гидроакустических полей // Вестн. МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 1992. Т. 33. № 2. С. 49–56.
11. *Кузькин В.М., Куцов М.В., Пересёлков С.А.* Выделение групп однотипных мод в мелком море // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 6. С. 735–743.
12. *Rouseff D.* Effect of shallow water internal waves on ocean acoustic striation patterns // Waves Random Media. 2001. V. 11. P. 377–393.
13. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
14. *Кузькин В.М., Лаврова О.Ю., Пересёлков С.А., Петников В.Г., Сабинин К.Д.* Анизотропное поле фоновых внутренних волн на морском шельфе и его влияние на распространение низкочастотного звука // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 1. С. 74–86.
15. *Кузькин В.М., Пересёлков С.А.* Влияние фоновых внутренних волн на интерференционную структуру звукового поля в мелком море // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 1. С. 103–112.
16. *Kuz'kin V.M., Pereselkov S.A.* Effect of intense internal waves on the sound field interference structure // Phys. Wave Phenom. 2010. V. 18. № 3. P. 223–229.
17. *Кузькин В.М., Куцов М.В., Пересёлков С.А.* Влияние поверхностного волнения на изменчивость интерференционного инварианта // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 1. С. 76–80.
18. *Кравцов Ю.А, Кузькин В.М.* Протяженные антенны в океанических волноводах // Распространение волн в слоистых средах. IX Всесоюзная школа по дифракции и распространению волн / Под ред. Кинбера Б.Е. Казань: Авиационный институт, 1988. С. 114–144.
19. *Луньков А.А., Петников В.Г.* Когерентность низкочастотного звука в мелком море при наличии внутренних волн // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 1. С. 65–75.