АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2014, том 60, № 4, с. 395–397

АТМОСФЕРНАЯ И АЭРОАКУСТИКА

УДК 534.26;542.34

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ ПРИ СХЛОПЫВАНИИ ВИХРЕВОГО ДИПОЛЯ

© 2014 г. К. А. Наугольных

Zel Technologies, LLC/Physical Sciences Division, Earth System Research Laboratory
NOAA 325 Broadway, Boulder, Colorado 80305
E-mail: konstantin.naugolnykh@noaa.gov

Поступила в редакцию 26.12.2013 г.

Излучение звука вихревым диполем уменьшает энергию диполя и меняет распределение вихревой скорости. Происходит относительное смещение компонент диполя. Ранее такой процесс акустической неустойчивости вихря рассматривался применительно к случаю слабого акустического излучения, описываемого волновым уравнением. Особенности акустической неустойчивости при излучении сильно нелинейного звука вихрем рассматриваются в настоящей работе.

Ключевые слова: вихревой диполь, неустойчивость, излучение звука, акустическая нелинейность.

DOI: 10.7868/S032079191404011X

ВВЕДЕНИЕ

Вихревое движение является источником звукового излучения. В свою очередь, излучение звука вихрем уменьшает энергию вихревого диполя. Развивается акустическая неустойчивость и относительное движение вихрей диполя [1]. Линейная стадия этого процесса рассматривалась ранее, и было установлено, что одинаковые вихри расходятся [2], а вихри различной интенсивности и знака – сближаются, и происходит коллапс вихрей разного знака [2, 3]. В результате сближения – коллапса вихрей – интенсивность возмущения растет, и эффекты нелинейного звука становятся существенными. Этот процесс рассматривается в настоящей работе методом сращивания асимптотических разложений решения для диполя из точечных вихрей в несжимаемой жидкости и решения нелинейного уравнения Бюргерса в сжимаемой среде. При этом приняты во внимание эффекты цилиндрического расхождения волны и нелинейной эволюции профиля.

ВИХРЕВОЕ ПОЛЕ ДИПОЛЯ

Два вихря с интенсивностью соответственно χ_1 и χ_2, ($\chi = \Gamma/2\pi$, Γ – циркуляция вихря) и угловой частотой вращения вокруг общего центра $\omega = (\chi_1 - \chi_2)/a^2$, где a – расстояние между вихрями, в несжимаемой жидкости производят поток с потенциалом скорости [4]

$$\phi(r,\theta,t) = i\chi_1 \ln(re^{i\theta} - a_1 e^{i\omega t}) + i\chi_2 \ln(re^{i\theta} - a_2 e^{i\omega t}). \quad (1)$$

Здесь r и θ – полярные координаты точки наблюдения, t – время, в формуле (1) $a_1 = a[\chi_2/(\chi_1 + \chi_2)]$, $a_2 = a[\chi_1/(\chi_1 + \chi_2)]$. Энергия диполя определяется интенсивностями вихрей и зависит от расстояния a между ними:

$$E = 2\pi\rho_0\chi_1\chi_2 \ln(a/r). \quad (2)$$

При этих обозначениях уравнение (1) в области

$$\lambda \gg r \gg a \quad (3)$$

дает асимптотическое соотношение вида

$$\phi(r,\theta,t) = \frac{\chi_1\chi_2}{2(\chi_1 + \chi_2)}(a/r)^2 e^{2i(\omega t - \theta)}, \quad (4)$$

которое можно рассматривать в качестве граничного условия для уравнения звуковой волны. Здесь λ – длина звуковой волны. Соответственно радиальная составляющая скорости определяется соотношением [3]

$$v(r,\theta,t) = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{a^2\chi_1\chi_2}{2(\chi_1 + \chi_2)r^3} e^{2i(\omega t - \theta)}. \quad (5)$$

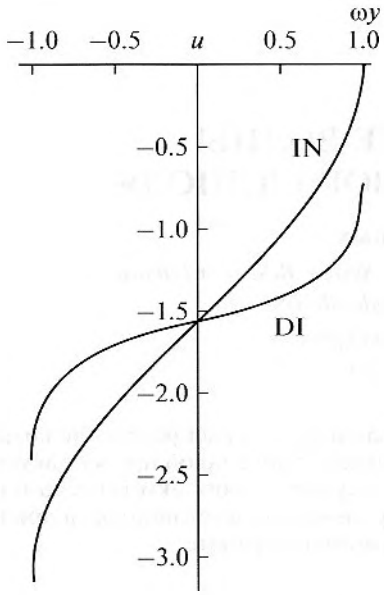
В области малых r радиальная скорость возрастает и нелинейные эффекты становятся заметными.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

Распространение звуковой волны конечной амплитуды описывается уравнением Бюргерса для скорости частицы v. В обобщенном виде это уравнение учитывает расхождение сферической или цилиндрической волны и выглядит так [4, 5]:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + n\frac{v}{r} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v\frac{\partial v}{\partial y} = b\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (6)$$

Здесь r – "медленная" полярная координата; $y = t - r/c_0$; t – время; c_0 – скорость звука; $n = 1, 1/2, 0$ для сферической, цилиндрической и плоской



Профили распределения скорости частиц в волне: IN – начальное распределение, DI – нелинейно-деформированный профиль.

волны соответственно; $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$ – нелинейный параметр, где $\gamma = (\partial c^2/\partial\rho)_s(\rho_0/c_0^2) + 1$, ρ – плотность жидкости, индекс 0 указывает на равновесное значение величины; b – диссипативный коэффициент. В случае большого числа Рейнольдса, $\mathrm{Re} = \varepsilon v/c_o^2 b\omega \gg 1$, где ω – круговая частота возмущения, диссипативным членом уравнения Бюргерса можно пренебречь, и получаем следующее уравнение в нормированном виде:

$$\frac{\partial W}{\partial z} - W\frac{\partial W}{\partial y} = 0. \qquad (7)$$

Для цилиндрической волны члены этого уравнения определяются соотношениями

$$z = 2\sigma_0\left|\sqrt{\frac{r}{r_0}} - 1\right|, \quad W(\omega y) = \frac{v}{v_0}\sqrt{\frac{r}{r_0}}, \qquad (8)$$

где $\sigma_0 = \varepsilon M k r_0$, $M = v/c_0$ – число Маха, и $k = \omega/c_0$. Распространение расходящейся цилиндрической волны конечной амплитуды, заданной функцией $F(\omega y)$ в точке $r = r_0$, определяется уравнением простой волны:

$$W(\omega y) = F(\omega y + zW). \qquad (9)$$

Рассмотрим сначала случай, когда нелинейные поправки малы и это уравнение приближенно может быть представлено в виде разложения

$$W(\omega y) \approx F(\omega y) + zWF'(\omega y), \qquad (10)$$

где штрих обозначает производную функции $F(\omega y)$. В размерном виде получается уравнение

$$\frac{v}{v_0}\sqrt{\frac{r}{r_0}} = F(\omega y) + 2\sigma_0\left|\sqrt{\frac{r}{r_0}} - 1\right| F'(\omega y) \qquad (11)$$

или, при $r/r_0 > 1$,

$$\frac{v}{v_0} = F(\omega y)\sqrt{\frac{r_0}{r}} + 2\sigma_0 F'(\omega y), \qquad (12)$$

так что линейно-акустический член цилиндрической волны убывает пропорционально $1/\sqrt{r}$, а нелинейный член не меняется с расстоянием, нелинейные эффекты компенсируют цилиндрическое расхождение, и этот член – в рамках цилиндрической модели – в дальней зоне вносит основной вклад в излучение вихря.

Рассмотрим теперь решение уравнения Бюргерса, удовлетворяющее граничному условию $F(\omega y)$ в точке $r = r_0$ и соответствующее сильным нелинейным эффектам. Уравнение простой волны эквивалентно характеристическому уравнению

$$\omega y = -zW + F^{-1}(\omega y), \qquad (13)$$

где $F^{-1}(\omega y)$ – функция, обратная $F(\omega y)$. В размерной форме это уравнение принимает вид

$$\omega y = -2\sigma_0\left|\sqrt{\frac{r}{r_0}} - 1\right|\frac{v}{v_0}\sqrt{\frac{r}{r_0}} + F^{-1}\left(\frac{v}{v_0}\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right). \qquad (14)$$

Два члена в правой части уравнения определяются соответственно нелинейным эффектом и граничным условием. Особенности распространения нелинейного звука определяются безразмерным коэффициентом $\sigma_0 = \varepsilon M k r_0$, который указывает, насколько нелинейный эффект, пропорциональный εM, накапливается в процессе распространения. С уменьшением r_0 скорость частиц v увеличивается (см. (5)) и число Маха растет. Решение (14) дает профиль волны $\omega y(v/v_0)$ на различных расстояниях r/r_0 при заданном σ_0. В качестве примера рассмотрим излучение вихрем звуковой волны, заданной граничным условием (5) и представленной на рисунке в виде функции безразмерной скорости $u = v/v_0$ от безразмерной координаты ωy. Начальное распределение скорости частиц и нелинейно-деформированный профиль представлены на рисунке кривыми IN и DI.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Излучение звука приводит к уменьшению энергии вихря, соответствующему изменению вихревого поля диполя и развитию акустической неустойчивости [1]. Линейная теория процессов акустической неустойчивости и эволюции вихрей, опубликованная в литературе, показывает, что в результате неустойчивости одинаковые вихри расходятся [2], а вихри различной интенсивности и знака – сближаются и происходит коллапс вихрей разного знака [3, 4]. В результате коллапса вихрей интенсивность возмущения растет, и эффекты нелинейного звука могут стать существен-

ными. Этот процесс рассматривается в настоящей работе методом сращивания асимптотических разложений решения для диполя из точечных вихрей в несжимаемой жидкости и решения нелинейного уравнения Бюргерса в сжимаемой среде. При этом как эффекты цилиндрического расхождения волны, так и нелинейной эволюции профиля приняты во внимание. Показано, что линейно-акустический член цилиндрической волны убывает пропорционально $1/\sqrt{r}$, а нелинейный член не меняется с расстоянием, так как нелинейные эффекты компенсируют цилиндрическое расхождение. В рамках цилиндрической модели этот член в дальней зоне вносит основной вклад в излучение вихря.

В заключение отметим, что процессы акустической неустойчивости обсуждались в Акустическом журнале в основном применительно к излучению звука струями (см. [8] и цитируемую в ней литературу). Об истории создания использованных выше нелинейных моделей подробно рассказано в историческом обзоре [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Broadbend E.G., Moore D.W.* Acoustic destabilization of vortices // Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A. 1979. V. 290. P. 353.
2. *Кляцкин В.И.* Звуковое излучение системы вихрей // Изв. АН СССР. ФАО. 1966. Т. 6. № 2. С. 87–92.
3. *Копьев И.Ф., Леонтьев Е.А.* Об акустической неустойчивости аксиального вихря // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 192–198.
4. *Гряник В.М.* Излучение звука линейными вихревыми нитями // Изв. АН СССР. ФАО. 1983. Т. 19. № 2. С. 203–206.
5. *Milne-Thomson L.M.* Theoretical Hydrodynamics. Macmillan Company: New-York, 1957. Ch. 13.
6. *Наугольных К.А.* Поглощение звуковых волн конечной амплитуды / Мощные ультразвуковые поля. Под ред. Розенберга Л.Д. М.: Наука, 1968. 268 с.
7. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
8. *Копьев В.Ф., Беляев И.В., Зайцев М.Ю., Копьев В.А., Фараносов Г.А.* Акустическое управление волнами неустойчивости в турбулентной струе // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 1. С. 19–30.
9. *Руденко О.В.* К 40-летию уравнения Хохлова–Заболотской // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 4. С. 452–462.