

АКУСТИКА СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 539.3

К ПРОБЛЕМЕ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СЛОИСТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© 2014 г. Т. И. Белянкова, В. В. Калинин

Южный научный центр РАН

344007 Ростов-на-Дону, пр. Чехова 41

e-mail: kalin@ssc-ras.ru

Поступила в редакцию 05.12.2013 г.

Развит эффективный метод построения матрицы—функции Грина слоисто-неоднородного полупространства. Предложены удобные для программирования матричные формулы, позволяющие с высокой точностью изучать свойства многослойного полупространства. На примере задачи о колебаниях трехслойного полупространства показана трансформация дисперсионных характеристик структурно-неоднородной среды в зависимости от соотношения механических и геометрических параметров ее составляющих. Исследование свойств функции Грина среды с низкоскоростным слоистым включением показало, что каждая мода поверхностной волны существует в ограниченном диапазоне частот: наряду с критической частотой возникновения моды существует частота ее исчезновения — частота, выше которой мода подавляется за счет наложения нуля функции Грина на ее полюс. Аналогичное исследование, проведенное для среды с высокоскоростным слоистым включением, показало, что наряду с частотой отсечки (частота, на которой распространяющаяся в низкочастотном диапазоне поверхностная волна исчезает) существует частота повторного ее зарождения — верхняя граница “диапазона запираения” первой моды. Вне этого диапазона первая мода является распространяющейся, могут появляться другие распространяющиеся моды. Установлено критическое соотношение геометрических параметров среды, определяющее существование и границы диапазона запираения волны.

Ключевые слова: слоисто-неоднородные среды, функция Грина слоисто-неоднородных сред, поверхностные волны, дисперсионные характеристики, фазовая скорость.

DOI: 10.7868/S0320791914050013

ВВЕДЕНИЕ

Изучению особенностей распространения волн в слоисто-неоднородных средах уделяется большое внимание. В [1–3] детально исследованы вопросы отражения, преломления и волноводного распространения нормальных волн в слоистых средах, в [4] исследовались особенности распространения поверхностных волн, в [3, 4] предложены различные методы анализа волновых полей, в [5, 6] выявлены особенности распространения нормальных волн и волн Рэлея при наличии низкоскоростных слоев в трехслойных средах, в [7] предложены методы анализа волновых полей, основанные на использовании функции Грина среды. В [7–10] изучены динамические смешанные задачи для полугораниченных тел, приведены методы построения матриц Грина неоднородных сред типа слоя, пакета слоев, стратифицированного полупространства, выполненных из изотропных и анизотропных материалов, исследованы вопросы возникновения резонансных явлений при их взаимодействии с массивными телами. В [7] определены критерии и сформулированы условия существования и

единственности решения динамических смешанных задач для полугораниченных тел. В [8] при исследовании динамики двух- и трехслойного полупространства изучены дисперсионные свойства среды и исследован вопрос о влиянии ее неоднородности на перераспределение энергии различных типов волн. В [9] предложен эффективный метод построения матрицы Грина для пакета слоев, исследованы вопросы возникновения изолированных резонансов в системе “массивное тело—полугораниченная среда”. В [10] исследовались вопросы распространения волн в слоисто-неоднородном преднапряженном полупространстве. В [11] в рамках модели двухслойного полупространства исследовано влияние начальных напряжений в неоднородном полупространстве на его динамические характеристики и дисперсионные свойства. В [12, 13] на основе детального анализа дисперсионных свойств неоднородного полупространства построены решения интегральных уравнений, обоснован учет всех вещественных особенностей соответствующих функций Грина. В [14, 15] исследованы дисперсионные свойства слоисто-неоднородного полупространства, а также полупространства с

неоднородным покрытием. В [14] получены рекуррентные формулы, определяющие элементы и определитель матрицы-символа Грина динамической пространственной задачи о колебаниях многослойной среды, исследовано влияние соотношения параметров структурно неоднородного полупространства на его дисперсионные свойства. В настоящей работе предложена модификация матричного подхода к построению функции Грина для полупространства с многослойным покрытием. На примере трехслойного полупространства с податливым или жестким внутренним слоем показана трансформация дисперсионных свойств среды в зависимости от соотношения ее механических и геометрических параметров. Показано, что при анализе поверхностных волн необходимо учитывать распределение как полюсов, так и нулей функции Грина среды. Первые определяют ее дисперсионные свойства, вторые определяют структуру поверхностного волнового поля. Так, в среде с низкоскоростным слоистым включением для каждой моды распространяющейся поверхностной волны наряду с частотой ее возникновения существует частота, на которой она трансформируется в "захваченную" волну [5], распространяющуюся внутри полупространства вдоль включения. На поверхности мода подавляется, ее амплитуда становится пренебрежимо малой за счет наложения нуля функции Грина на ее полюс. Для среды с высокоскоростным слоистым включением установлено критическое соотношение геометрических параметров среды, при котором наряду с частотой отсечки (распространяющаяся волна исчезает, что характерно для сред с высокоскоростным покрытием [5]) существует частота повторного зарождения волны – верхняя граница "диапазона запираения" первой моды.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются колебания слоисто-неоднородной среды под действием нагрузки $\mathbf{q}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$, распределенной в области Ω (рис. 1). Среда представляет собой пакет слоев $|x_1|, |x_2| \leq \infty$, $h_{k+1} \leq x_3 \leq h_k$, $k = 1, 2, \dots, M - 1$, лежащих на поверхности полупространства $x_3 \leq 0$. Между слоями и полупространством имеют место условия жесткого сцепления. Материал слоев и полупространства полагается однородным, изотропным, гиперупругим.

Краевая задача описывается уравнениями движения

$$\nabla \cdot \Theta^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2} \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности и на границе раздела сред:

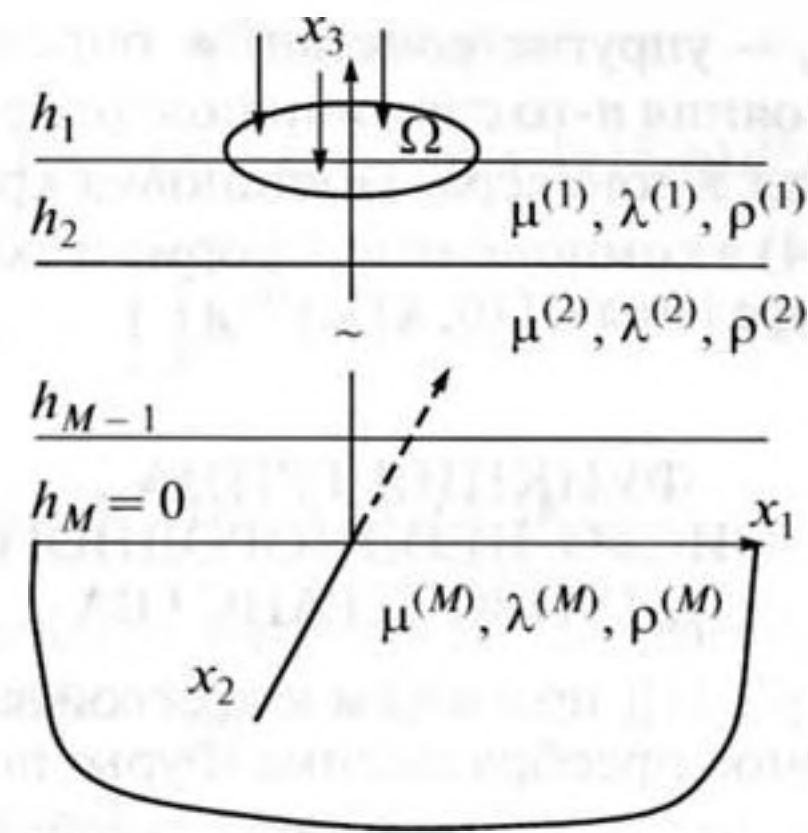


Рис. 1. Геометрия слоисто-неоднородной среды.

$$x_3 = h_1: \mathbf{N} \cdot \Theta^{(1)} = \begin{cases} \mathbf{q}(x_1, x_2, t), & x_1, x_2 \in \Omega \\ 0, & x_1, x_2 \notin \Omega \end{cases} \quad (2)$$

$$x_3 = h_n: \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{u}^{(n+1)}, \quad \mathbf{N} \cdot \Theta^{(n)} = \mathbf{N} \cdot \Theta^{(n+1)}, \quad n = 2, \dots, M - 1. \quad (3)$$

Замыкают задачу условия излучения на бесконечности:

$$\mathbf{u}^{(M)} \rightarrow 0 \text{ при } x_3 \rightarrow -\infty. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{u}^{(n)} = \{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}\}$ – вектор перемещений произвольной точки, $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ – вектор нагрузки, \mathbf{N} – вектор нормали, $\Theta^{(n)}$ – тензор напряжений m -слоя ($n = m$) или полупространства ($n = M$). Полагаем, что режим колебаний среды установившийся, все участвующие в задаче величины представляются в виде

$$f = f_0(x_1, x_2, x_3)e^{-i\omega t}.$$

Далее в работе используются безразмерные параметры: упругие модули, напряжения и усилия отнесены к модулю сдвига подстилающего полупространства $\mu^{(M)}$, плотность – к плотности полупространства $\rho^{(M)}$, линейные параметры – к характерному линейному размеру, например толщине m -го слоя $l = h_m$. В качестве безразмерной частоты используется параметр $\kappa_2 = \omega h_m / V_S^{(M)}$, где $V_S^{(M)} = \sqrt{\mu^{(M)} / \rho^{(M)}}$ – скорость сдвиговой волны в подстилающем полупространстве. Для упругих модулей будем применять обозначения $\lambda^{(n)} = \lambda^{(n)} / \mu^{(M)}$, $\mu^{(n)} = \mu^{(n)} / \mu^{(M)}$. При этом $\mu^{(M)} = 1$, далее штрихи опускаем. Участвующие в выражениях (1) и (2) компоненты тензоров $\Theta^{(n)}$ представляются формулой [10]

$$\theta_{pl}^{(n)} = \chi_{plms}^{(n)} u_{m,s}^{(n)}. \quad (5)$$

В случае изотропной среды они имеют вид [10, 11]

$$\chi_{plms}^{(n)} = (\delta_{pl}\delta_{ms} + \delta_{ml}\delta_{ps})\mu^{(n)} + \delta_{pm}\delta_{ls}\lambda^{(n)}. \quad (6)$$

Здесь $\chi_{pmls}^{(n)}$ — упругие константы, определяющие закон состояния n -го слоя или полупространства, δ_{ij} — символ Кронекера. Постановка краевой задачи (1)–(4) в компонентной форме и схема ее решения приведены в [10, 11].

**ФУНКЦИЯ ГРИНА
СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОГО
ПОЛУПРОСТРАНСТВА**

Следуя [7–11], применим к краевой задаче (1)–(4) двумерное преобразование Фурье по координатам x_1, x_2 (α_1, α_2 — параметры преобразования). Решение задачи ищем в виде $(U_i^{(n)}, i = 1, 2, 3$ — трансформанты фурье-компонент вектора смещений среды $\mathbf{u}^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)})$, $p = 6(n - 1)$, $n = 1, 2, \dots, M - 1, l = 1, 2)$:

$$U_l^{(n)} = \sum_{k=1}^3 f_{lk}^{(n)} [g_{k+p}^{(n)} \text{sh } \sigma_k^{(n)} x_3 + g_{k+3+p}^{(n)} \text{ch } \sigma_k^{(n)} x_3], \quad (7)$$

$$U_3^{(n)} = \sum_{k=1}^3 f_{3k}^{(n)} [g_{k+p}^{(n)} \text{ch } \sigma_k^{(n)} x_3 + g_{k+3+p}^{(n)} \text{sh } \sigma_k^{(n)} x_3],$$

$$U_l^{(M)} = \sum_{k=1}^3 f_{lk}^{(M)} g_{k+6(M-1)}^{(M)} e^{\sigma_k^{(M)} x_3}, \quad (8)$$

$$U_3^{(M)} = \sum_{k=1}^3 f_{3k}^{(M)} g_{k+6(M-1)}^{(M)} e^{\sigma_k^{(M)} x_3}.$$

Параметры $\sigma_k^{(n)}$ удовлетворяют характеристическим уравнениям ($n = 1, 2, \dots, M$):

$$\sigma_1^{(n)2} - \alpha^2 + \rho^{(n)} (\lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)})^{-1} \kappa_2^2 = 0, \quad (9)$$

$$\sigma_k^{(n)2} - \alpha^2 + \rho^{(n)} (\mu^{(n)})^{-1} \kappa_2^2 = 0, \quad (k = 2, 3),$$

$$f_{m1}^{(n)} = -i\alpha_m (\sigma_1^{(n)})^{-1}, \quad f_{m2}^{(n)} = -i\alpha_m \sigma_2^{(n)} \alpha^{-2}, \quad m = 1, 2,$$

$$f_{31}^{(n)} = f_{32}^{(n)} = 1, \quad f_{33}^{(n)} = 0, \quad f_{13}^{(n)} = -\alpha_2, \quad (10)$$

$$f_{23}^{(n)} = \alpha_1, \quad \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Неизвестные константы $g_k^{(n)}$ определяются при подстановке функций (7) и (8) в трансформированные после действия преобразования Фурье граничные условия (2) и (3). В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных констант:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{Q}. \quad (11)$$

Здесь \mathbf{C} — вектор неизвестных констант, \mathbf{Q} — фурье-трансформанта вектора заданной нагрузки ($\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3, 0, \dots, 0\}$),

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(1)}(h_1) & 0 \\ \mathbf{A}^{(1)}(h_{2, \dots, M}) & \mathbf{B}^{(M)}(h_M) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

$\mathbf{B}^{(1)}(h_1)$ и $\mathbf{B}^{(M)}(h_M)$ — прямоугольные матрицы размера $S \times 2S$ и $2S \times S$ (где S — размерность задачи) соответственно. \mathbf{A} и $\mathbf{A}^{(1)}(h_{2, \dots, M})$ — квадратные матрицы, размер которых зависит от геометрических параметров задачи и определяется формулами $[S(2M - 1)]$ и $[2S(M - 1)]$ соответственно. Например, в задаче о колебании двухслойного полупространства в пространственной постановке матрицы \mathbf{A} и $\mathbf{A}^{(1)}(h_{2, \dots, M})$ имеют размер 9×9 и 6×6 . Участвующие в представлении (12) элементы представляются в виде

$$\mathbf{B}^{(1)}(h_1) = \begin{pmatrix} l_{11}^{(1)} c_{11}^1 & l_{12}^{(1)} c_{21}^1 & l_{13}^{(1)} c_{31}^1 & l_{11}^{(1)} s_{11}^1 & l_{12}^{(1)} s_{21}^1 & l_{13}^{(1)} s_{31}^1 \\ l_{21}^{(1)} c_{11}^1 & l_{22}^{(1)} c_{21}^1 & l_{23}^{(1)} c_{31}^1 & l_{21}^{(1)} s_{11}^1 & l_{22}^{(1)} s_{21}^1 & l_{23}^{(1)} s_{31}^1 \\ l_{31}^{(1)} s_{11}^1 & l_{32}^{(1)} s_{21}^1 & l_{33}^{(1)} s_{31}^1 & l_{31}^{(1)} c_{11}^1 & l_{32}^{(1)} c_{21}^1 & l_{33}^{(1)} c_{31}^1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{B}^{(M)}(h_M) = \begin{pmatrix} -f_{11}^{(M)} & -f_{12}^{(M)} & -f_{13}^{(M)} \\ -f_{21}^{(M)} & -f_{22}^{(M)} & -f_{23}^{(M)} \\ -f_{31}^{(M)} & -f_{32}^{(M)} & -f_{33}^{(M)} \\ -l_{11}^{(M)} & -l_{12}^{(M)} & -l_{13}^{(M)} \\ -l_{21}^{(M)} & -l_{22}^{(M)} & -l_{23}^{(M)} \\ -l_{31}^{(M)} & -l_{32}^{(M)} & -l_{33}^{(M)} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\mathbf{A}^{(1)}(h_M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_{11}^{(1)} & f_{12}^{(1)} & f_{13}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & f_{21}^{(1)} & f_{22}^{(1)} & f_{23}^{(1)} \\ f_{31}^{(1)} & f_{32}^{(1)} & f_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ l_{11}^{(1)} & l_{12}^{(1)} & l_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21}^{(1)} & l_{22}^{(1)} & l_{23}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{31}^{(1)} & l_{32}^{(1)} & l_{33}^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Здесь использованы обозначения

$$l_{pk}^{(n)} c_{ki}^n = l_{pk}^{(n)} \text{ch } \sigma_k^{(n)} h_i, \quad l_{pk}^{(n)} s_{ki}^n = l_{pk}^{(n)} \text{sh } \sigma_k^{(n)} h_i \quad (16)$$

($p, k = 1, 2, 3, n = 1, \dots, M, i = 1, \dots, M - 1$).

Коэффициенты $f_{pk}^{(n)}$ определены формулами (10), $l_{pk}^{(n)}$ имеют вид

$$l_{k1}^{(n)} = -i\mu^{(n)} \alpha_k, \quad l_{k2}^{(n)} = i\mu^{(n)} \alpha_k \theta^{(n)} \alpha^{-2},$$

$$l_{k3}^{(n)} = i\mu^{(n)} \alpha_k \theta^{(n)} \alpha^{-2}, \quad k = 1, 2,$$

$$l_{31}^{(n)} = \mu^{(n)} \theta^{(n)} (\sigma_1^{(n)})^{-1}, \quad l_{32}^{(n)} = \mu^{(n)} \sigma_2^{(n)}, \quad l_{33}^{(n)} = \mu^{(n)} \sigma_2^{(n)}, \quad (17)$$

$$\theta^{(n)} = \alpha^2 - 0.5\rho^{(n)} (\mu^{(n)})^{-1} \kappa_2^2.$$

В задаче о колебаниях трехслойного полупространства ($M = 3, h_3 = 0, S = 3$) размер матриц \mathbf{A} и $\mathbf{A}^{(1)}(h_{2,3})$ становится равным 15×15 и 12×12 соответственно. При этом

$$\mathbf{A}^{(1)}(h_{2,3}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^1(h_2) & \mathbf{P}^2(h_2) \\ 0 & \mathbf{B}^2(h_3) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

В представлении (18) $\mathbf{B}^n(h_k)$ и $\mathbf{P}^2(h_2) = -\mathbf{B}^2(h_2)$ – матрицы размером 6×6 . Верхний индекс отвечает номеру слоя, аргумент – границе раздела слоев. Матрицы $\mathbf{B}^1(h_2)$ и $\mathbf{B}^2(h_3)$ в общем виде с учетом представлений (13)–(15) определяются формулами

$$\mathbf{B}^n(h_k) = \begin{pmatrix} f_{11}^{(n)} s_{1k}^n & f_{12}^{(n)} s_{2k}^n & f_{13}^{(n)} s_{3k}^n & f_{11}^{(n)} c_{1k}^n & f_{12}^{(n)} c_{2k}^n & f_{13}^{(n)} c_{3k}^n \\ f_{21}^{(n)} s_{1k}^n & f_{22}^{(n)} s_{2k}^n & f_{23}^{(n)} s_{3k}^n & f_{21}^{(n)} c_{1k}^n & f_{22}^{(n)} c_{2k}^n & f_{23}^{(n)} c_{3k}^n \\ f_{31}^{(n)} c_{1k}^n & f_{32}^{(n)} c_{2k}^n & f_{33}^{(n)} c_{3k}^n & f_{31}^{(n)} s_{1k}^n & f_{32}^{(n)} s_{2k}^n & f_{33}^{(n)} s_{3k}^n \\ l_{11}^{(n)} c_{1k}^n & l_{12}^{(n)} c_{2k}^n & l_{13}^{(n)} c_{3k}^n & l_{11}^{(n)} s_{1k}^n & l_{12}^{(n)} s_{2k}^n & l_{13}^{(n)} s_{3k}^n \\ l_{21}^{(n)} c_{1k}^n & l_{22}^{(n)} c_{2k}^n & l_{23}^{(n)} c_{3k}^n & l_{21}^{(n)} s_{1k}^n & l_{22}^{(n)} s_{2k}^n & l_{23}^{(n)} s_{3k}^n \\ l_{31}^{(n)} s_{1k}^n & l_{32}^{(n)} s_{2k}^n & l_{33}^{(n)} s_{3k}^n & l_{31}^{(n)} c_{1k}^n & l_{32}^{(n)} c_{2k}^n & l_{33}^{(n)} c_{3k}^n \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{B}^{(M-1)}(h_M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_{11}^{(M-1)} & f_{12}^{(M-1)} & f_{13}^{(M-1)} \\ 0 & 0 & 0 & f_{21}^{(M-1)} & f_{22}^{(M-1)} & f_{23}^{(M-1)} \\ f_{31}^{(M-1)} & f_{32}^{(M-1)} & f_{33}^{(M-1)} & 0 & 0 & 0 \\ l_{11}^{(M-1)} & l_{12}^{(M-1)} & l_{13}^{(M-1)} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21}^{(M-1)} & l_{22}^{(M-1)} & l_{23}^{(M-1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{31}^{(M-1)} & l_{32}^{(M-1)} & l_{33}^{(M-1)} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Дальнейшее увеличение числа слоев приводит к увеличению размерности матриц \mathbf{A} и $\mathbf{A}^{(1)}(h_{2,\dots,M})$, однако структура матрицы \mathbf{A} , равно как и структура матрицы $\mathbf{B}^n(h_k)$, не изменяется, меняется только число элементов. Матрица $\mathbf{A}^{(1)}(h_{2,\dots,M})$ становится ленточной. Например, матрица $\mathbf{A}^{(1)}(h_{2,\dots,6})$ имеет вид

$$\mathbf{A}^{(1)}(h_{2,\dots,6}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^1(h_2) & \mathbf{P}^2(h_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^2(h_3) & \mathbf{P}^3(h_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}^3(h_4) & \mathbf{P}^4(h_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}^4(h_5) & \mathbf{P}^5(h_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}^5(h_6) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Матрицы $\mathbf{B}^n(h_k)$, $\mathbf{P}^n(h_k) = -\mathbf{B}^n(h_k)$ ($n, k = 1, \dots, 5$) и $\mathbf{B}^{M-1}(h_M)$ размерности 6×6 определены формулами (19) и (20). Дисперсионное уравнение задачи имеет вид

$$\Delta_0 = \det \mathbf{A} = 0. \quad (22)$$

Решение краевой задачи (1)–(4) после применения обратного преобразования Фурье к выражениям (7) и (8) представляется выражением

$$\mathbf{u}^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} \mathbf{k}^{(n)}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3) \mathbf{q}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (23)$$

$$\mathbf{k}^{(n)}(s, t, x_3) = \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) e^{-i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (24)$$

$$\mathbf{K}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \left\| K_{lj}^{(n)} \right\|_{l,j=1}^3.$$

Компоненты матрицы $\mathbf{K}^{(n)}$ определены формулами ($p = 6(n - 1)$, $n = 1, 2, \dots, M - 1$, $l = 1, 2$):

$$K_{lj}^{(n)} = \sum_{k=1}^3 f_{lk}^{(n)} \left[\Delta_{j,k+p} \operatorname{sh} \sigma_k^{(n)} x_3 + \Delta_{j,k+3+p} \operatorname{ch} \sigma_k^{(n)} x_3 \right], \quad (25)$$

$$K_{3j}^{(n)} = \sum_{k=1}^2 \left[\Delta_{j,k+p} \operatorname{ch} \sigma_k^{(n)} x_3 + \Delta_{j,k+3+p} \operatorname{sh} \sigma_k^{(n)} x_3 \right],$$

$$K_{lj}^{(M)} = \sum_{k=1}^3 f_{lk}^{(M)} \Delta_{j,k+6(M-1)} e^{\sigma_k^{(M)} x_3}, \quad (26)$$

$$K_{3j}^{(M)} = \sum_{k=1}^2 \Delta_{j,k+6(M-1)} e^{\sigma_k^{(M)} x_3}.$$

Формулы (23)–(26) определяют перемещение произвольной точки среды под действием заданной на ее поверхности нагрузки. Контуры Γ_1 и Γ_2 в представлении (24) выбираются специальным образом в соответствии с правилами, указанными в [7]. Их вид и расположение диктуются свойствами элементов $K_{lj}^{(n)}$, что определяет необходимость детального изучения поведения этих функций в каждом конкретном случае.

Для прозрачности изложения рассмотрим случай вертикальных колебаний слоистого полупространства под действием распределенной на его поверхности нагрузки $\mathbf{q} = (0, 0, q_3)$. Из выражений (23)–(26) следует, что нормальные колебания в среде определяются формулами

$$u_3^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} k_{33}^{(n)}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3) q_3(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (27)$$

$$k_{33}^{(n)}(s, t, x_3) = \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K_{33}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) e^{-i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (28)$$

В силу центральной симметрии все вещественные особенности (нули $\xi_n = \xi_n(\kappa_2)$, полюса $\zeta_n = \zeta_n(\kappa_2)$, точки ветвления $\gamma_n = \gamma_n(\kappa_2)$) функции $K_{33}^{(n)}$ в системе координат $\kappa_2, \alpha_1, \alpha_2$ представляют собой поверхности, имеющие форму тел вращения с осью κ_2 . Для дальнейшего анализа будем рассматривать их сечение полуплоскостью, проходящей через ось κ_2 и положительную полу-

ось α_2 . В системе координат $\alpha = \alpha_1$, κ_2 функция $K_{33}^{(n)}$ имеет на вещественной оси от одной до трех пар точек ветвления (в зависимости от размерности задачи) и конечное, зависящее от частоты, количество нулей и полюсов. Однократные нули и полюсы (далее регулярные) должны строго чередоваться между собой [7]. Двукратные вещественные полюсы (аномальные) с момента зарождения расщепляются на два однократных. Большой из них ведет себя как регулярный — возрастая, меньший — аномально, убывая с увеличением частоты. Достигнув критической частоты, этот полюс сначала обращается в ноль, а затем становится комплексным. Контуры Γ_1 и Γ_2 в представлении (28), как правило [7], обходят отрицательные регулярные полюсы и точки ветвления функции $K_{33}^{(n)}$ сверху, положительные — снизу. Аномальные полюсы — противоположным образом. В случае, когда $K_{33}^{(n)}$ имеет на вещественной оси двукратный полюс, контуры интегрирования должны проходить через него, функция $Q(\alpha_1, \alpha_2)$ в этой точке должна обращаться в ноль [7].

ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ТРЕХСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НИЗКОСКОРОСТНЫМ ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

Наиболее точное и полное представление о динамических свойствах слоисто-неоднородного полупространства дает исследование распределения нулей и полюсов функции Грина [7–10]. Изучение только дисперсионных свойств, равно как и модальный анализ, может привести к некорректным результатам. Например, в [5] на рис. 5а, 6а и 7а представлены графики, на которых скорость некоторых мод с какой-то частоты является постоянной величиной, имеют место пересечения мод между собой. Пересечение мод можно заметить и на рис. 3а в [6]. Однако в работе [7] была показана невозможность пересечения дисперсионных кривых, что нашло подтверждение при анализе динамики широкого круга структурно-неоднородных сред [8–13]. Ниже представлены результаты численного анализа свойств функции $K_{33}^{(1)}(\alpha_1, 0, h_1)$ для модели трехслойного полупространства с низкоскоростным внутренним слоем с использованием значений десятой группы параметров из табл. 2 [5]. Графики, приведенные на рис. 2а–2д, иллюстрируют свойства функции $K_{33}^{(1)}$. Здесь и далее на графиках пунктирные или штриховые линии, отмеченные символами α_S , V_S и α_R^{I*} , V_R^{I*} , соответствуют волновому числу и скорости сдвиговой волны полупространства (индекс S) и рэлеевской волны полупространства с параметрами внутреннего слоя (индекс R).

На рис. 2а приведены кривые нулей (штриховые линии) и полюсов (сплошные линии) функции $K_{33}^{(1)}$. Символами κ_n^0 отмечены критические частоты зарождения соответствующих мод поверхностных волн, символами κ_n^* отмечены частоты, на которых имеет место наложение кривой нуля с номером n на кривую соответствующего полюса. За счет этого мода с номером n на частоте κ_n^* трансформируется в “захваченную” (на поверхности подавляется), а значение вычета, определяющее амплитуду волны, становится малой величиной. Таким образом, для каждой моды существует частотный диапазон $[\kappa_n^0, \kappa_n^*]$ (по сути — полоса пропускания), в котором она доминирует на поверхности. В каждом конкретном случае этот диапазон, равно как и амплитуда моды, определяются взаимным расположением нулей и полюсов функции Грина.

Замечание. Анализ взаимного расположения нулей и полюсов функции Грина позволяет существенно упростить качественный анализ структуры поверхностного волнового поля и оценивать достоверность результатов модального анализа. Например, в [5] при модальном анализе свойств модели трехслойного полупространства с параметрами десятой группы из табл. 2 (рис. 5б) утверждается, что четвертая мода от момента зарождения доминирует в широкой (без ограничения сверху) частотной полосе, энергия пятой моды концентрируется в очень узкой полосе. Однако поведение кривых на рис. 2а показывает, что это утверждение не совсем корректно: начиная с частоты κ_4^* , амплитуда четвертой моды будет мала, пятая мода будет доминировать в достаточно широком диапазоне $[\kappa_4^*, \kappa_5^*]$.

На рис. 2б и 2г приведены дисперсионные кривые и кривые относительных фазовых скоростей соответственно. На рис. 2в и 2д представлены фрагменты соответствующих графиков. Как следует из рис. 2б и 2г, пересечений дисперсионных кривых, равно как и кривых относительных фазовых скоростей, нет — имеет место их значительное сближение (рис. 2в и 2д).

ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ТРЕХСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ВЫСОКОСКОРОСТНЫМ ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

Рассмотрим среду, представляющую собой пакет двух слоев, занимающих области $|x_1|, |x_2| \leq \infty$, $h_2 \leq x_3 \leq h_1$ и $|x_1|, |x_2| \leq \infty$, $h_3 \leq x_3 \leq h_2$ ($M = 3$, $h_1 = H$, $h_2 = h$, $h_3 = 0$), жестко сцепленных с полупространством $x_3 \leq 0$ с параметрами $\rho^{(3)} = 7.748 \times 10^3$ кг/м³,

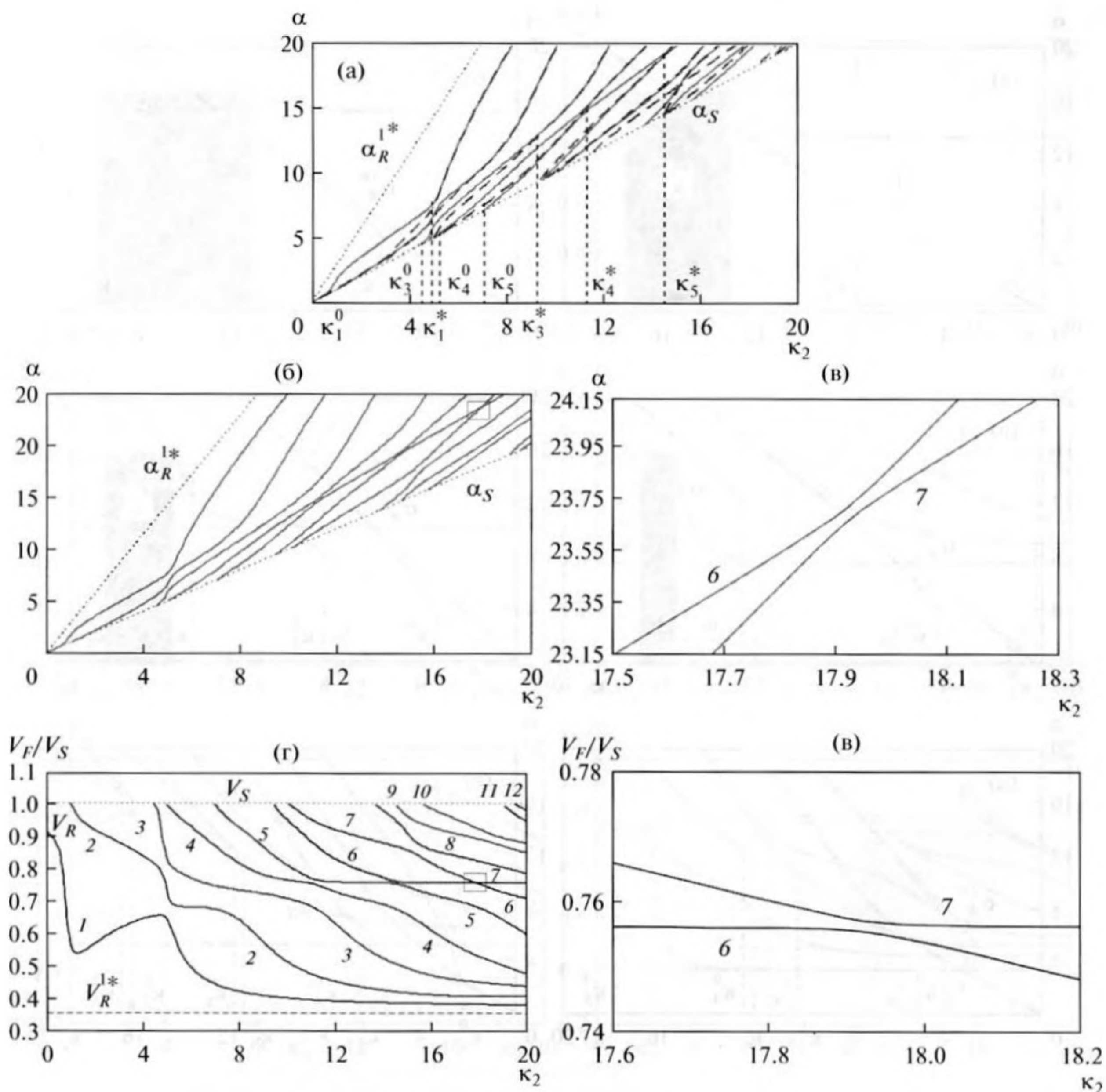


Рис. 2. Дисперсионные свойства трехслойного полупространства с низкоскоростным внутренним слоем. Рисунки (в) и (д) – выделенные в прямоугольниках на рисунках (б) и (г) фрагменты.

$V_p^{(3)} = 5912$ м/с, $V_s^{(3)} = 3221$ м/с. Полагаем, что $\gamma_2 = V_s^{(2)}/V_s^{(3)} = 2.6$. Дисперсионное уравнение задачи имеет вид (22) с матрицей (12), (13)–(15). На рис. 3 и 4 представлено влияние податливости внешнего слоя на дисперсионные кривые (рис. 3а–3е) и относительные фазовые скорости (рис. 4а–4е) для случаев $\gamma_1 = V_s^{(1)}/V_s^{(3)} = 1, 0.89, 0.77, 0.63, 0.55, 0.45$. Как следует из графиков, наличие высокоскоростного слоя приводит к появлению диапазона частот $[\kappa_1^*, \kappa_1^0]$, в котором поверхностная волна исчезает (уравнение (22) не имеет вещественных

корней). Поведение дисперсионной кривой на низких частотах определяется свойствами полупространства и жесткого слоя: выйдя из нуля, она все время заключена в створе угла, образованного лучами α_S и α_R^{1*} . Кривая сначала возрастает, но, приблизившись к лучу α_R^{1*} на частоте $\kappa_2 = 0.72$, начинает убывать. Достигнув луча α_S на частоте отсечки κ_1^* , кривая исчезает. На высоких частотах преобладающую роль начинает играть внешний слой: существует критическая частота κ_1^0 повторного возникновения дисперсионной кривой.

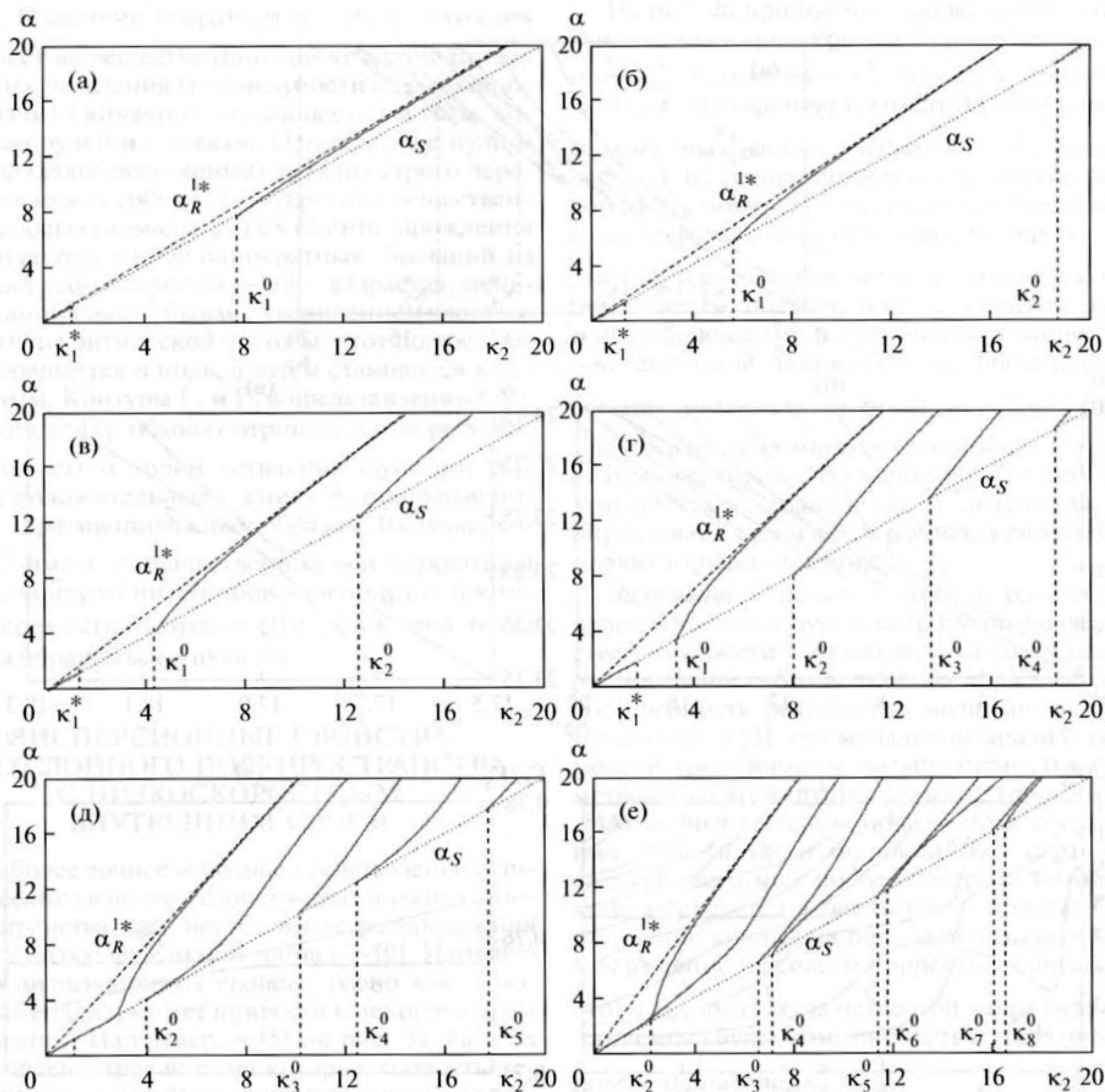


Рис. 3. Влияние податливости внешнего слоя на дисперсионные кривые трехслойного полупространства с высокоскоростным внутренним слоем ($\gamma_2 = 2.6$) при фиксированных геометрических параметрах $H = 1$, $h = 0.5$.

Сойдя с луча α_S , кривая далее возрастает, асимптотически приближаясь к лучу α_R^{1*} (рис. 3а). Увеличение податливости внешнего слоя (γ_1 уменьшается) приводит к сужению диапазона $[\kappa_1^*, \kappa_1^0]$, увеличению раствора угла, ограничивающего дисперсионные кривые, и появлению новых мод. Чем меньше γ_1 , тем ниже частоты выхода мод и тем больше дисперсионных кривых находятся в фиксированном частотном диапазоне (рис. 3б–3г). Начиная с $\gamma_1 = 0.55$ (рис. 3д), интервал $[\kappa_1^*, \kappa_1^0]$ исчезает. Дальнейшее уменьшение γ_1 приводит к значительному усложнению поведения дисперсионных кривых (рис. 3е).

Изменение дисперсионных свойств трехслойного полупространства с жестким внутренним слоем в зависимости от податливости внешнего слоя иллюстрируют графики, представленные на рис. 4а–4е, которые соответствуют значениям параметра $\gamma_1 = 1, 0.89, 0.77, 0.63, 0.55, 0.45$ соответственно. Частотные диапазоны, в которых поверхностная волна отсутствует, выделены штриховкой, цифрой 1 отмечены кривые для $\gamma_1 = 1$. Анализ графиков на рис. 4а–4е дает наглядное представление о трансформации структуры поверхностного волнового поля. Рисунок 4а – одна поверхностная волна с большим диапазоном $[\kappa_1^*, \kappa_1^0]$. С увеличением податливости внешнего

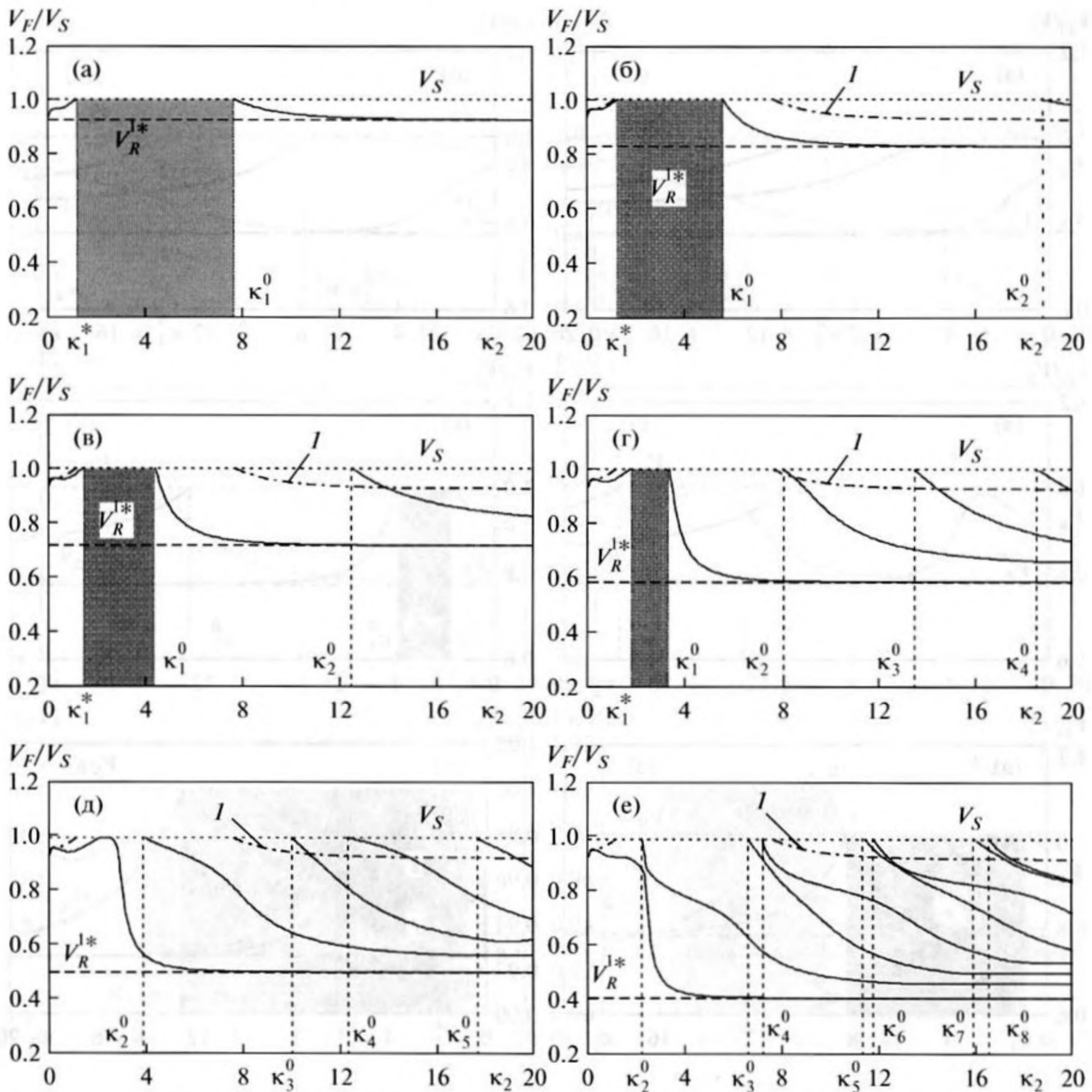


Рис. 4. Влияние податливости внешнего слоя на относительные фазовые скорости поверхностных волн трехслойного полупространства с высокоскоростным внутренним слоем ($\gamma_2 = 2.6$) при фиксированных геометрических параметрах $H = 1, h = 0.5$.

слоя диапазон $[\kappa_1^*, \kappa_1^0]$ сужается, появляются дополнительные моды (рис. 4б–4г). Дальнейшее увеличение податливости (рис. 4д, 4е) приводит к исчезновению диапазона $[\kappa_1^*, \kappa_1^0]$, структура поверхностного волнового поля становится более сложной. Наблюдается трансформация как первой, так и остальных мод.

Графики на рис. 5а–5е, 7а–7е и 9а–9е иллюстрируют влияние геометрических параметров (соотношения толщин слоев) на относительные фазовые скорости поверхностных волн трехслойного полупространства при фиксированных

механических характеристиках слоев ($\gamma_2 = 2.6$; (а–д) $\gamma_1 = 0.84$, (е) $\gamma_1 = 1$). На рис. 6а, 6б, 8а, 8б и 10а, 10б показаны зависимости частот выхода (сплошные линии) и исчезновения (пунктирные линии) мод дисперсионных кривых от соотношения толщин слоев при фиксированных параметрах ($\gamma_2 = 2.6$); (а) $\gamma_1 = 0.84$, (б) $\gamma_1 = 1$. Как и ранее, в заштрихованных областях распространяющаяся поверхностная волна отсутствует.

На рис. 5а–5д представлены графики, рассчитанные при фиксированной общей толщине пакета слоев $H = 1$: меняется лишь толщина внутреннего высокоскоростного слоя $h = 0.01, 0.1, 0.3,$

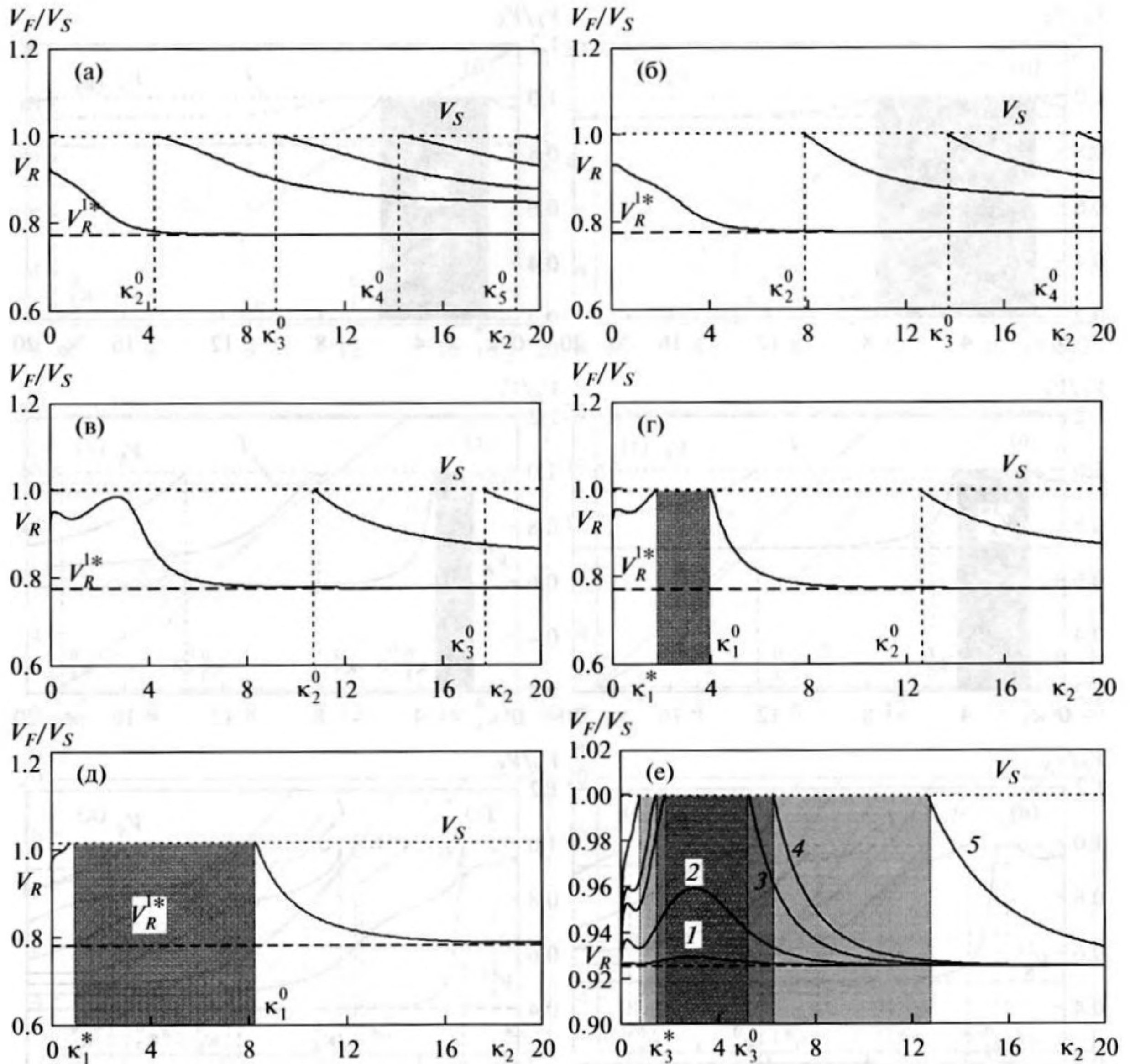


Рис. 5. Влияние изменения толщины внутреннего слоя при фиксированной толщине пакета $H = 1$ на относительные фазовые скорости поверхностных волн трехслойного полупространства с жестким внутренним слоем ($\gamma_2 = 2.6$); (а-д) $\gamma_1 = 0.84$, (е) $\gamma_1 = 1$.

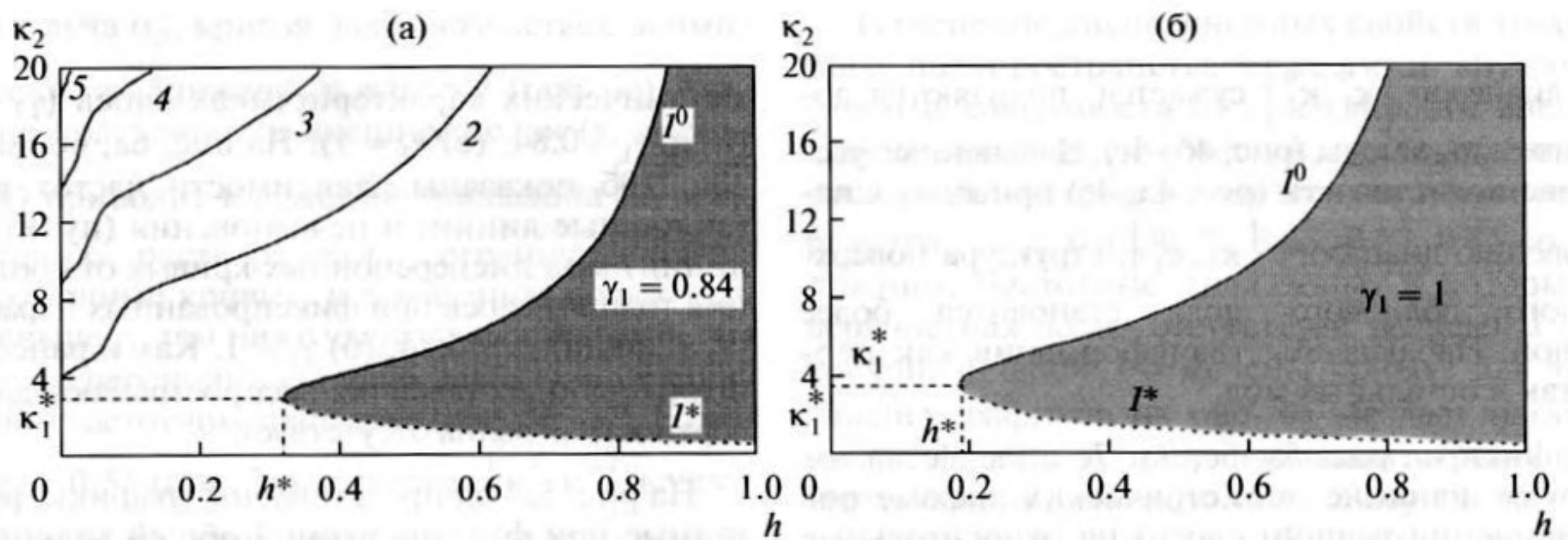


Рис. 6. Зависимости частот исчезновения и повторного появления первой моды, а также частот возникновения высших мод от толщины внутреннего жесткого слоя при фиксированной толщине пакета $H = 1$.

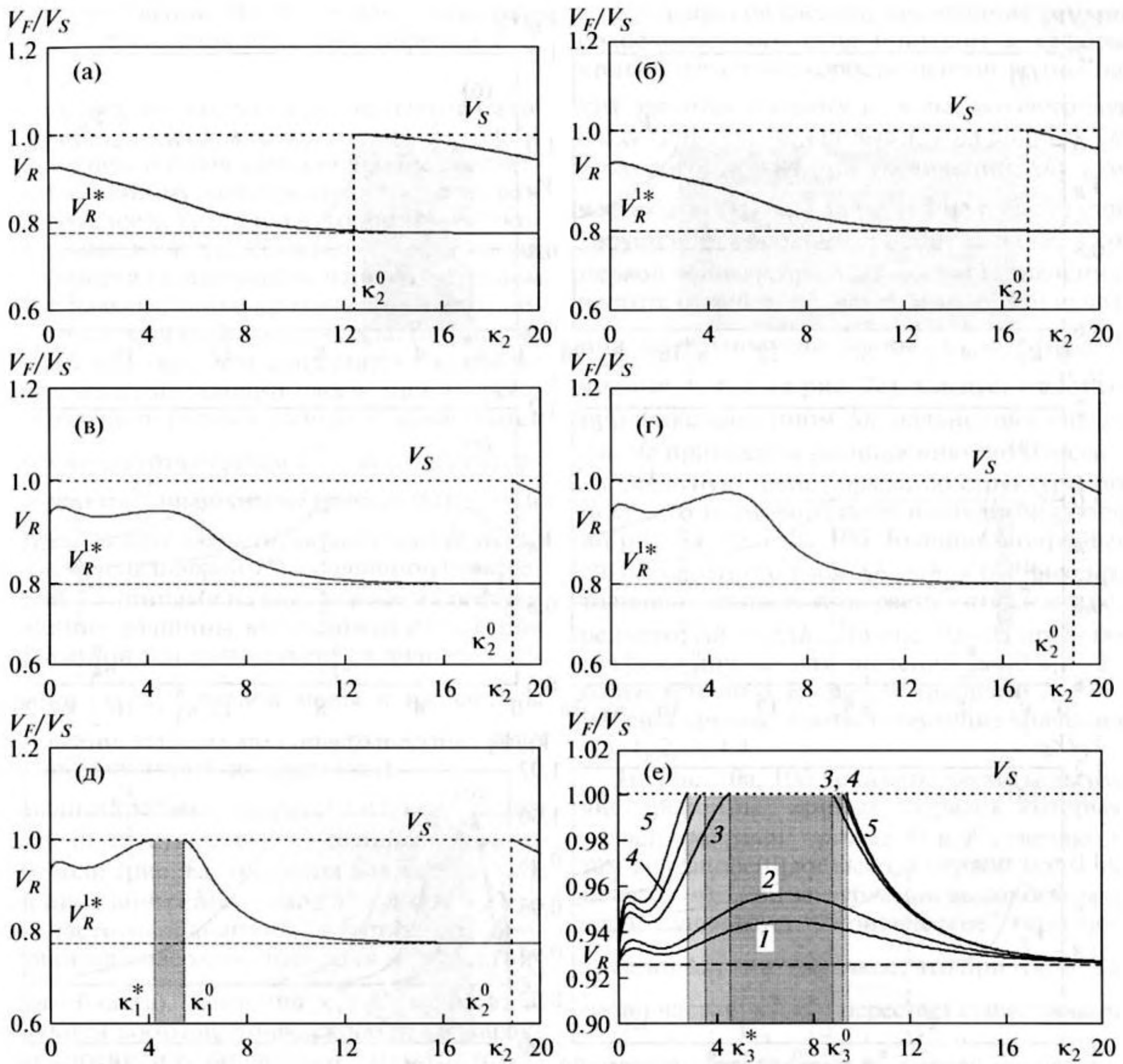


Рис. 7. Влияние изменения толщины внутреннего жесткого слоя при фиксированной толщине внешнего низкоскоростного слоя на относительные фазовые скорости поверхностных волн.

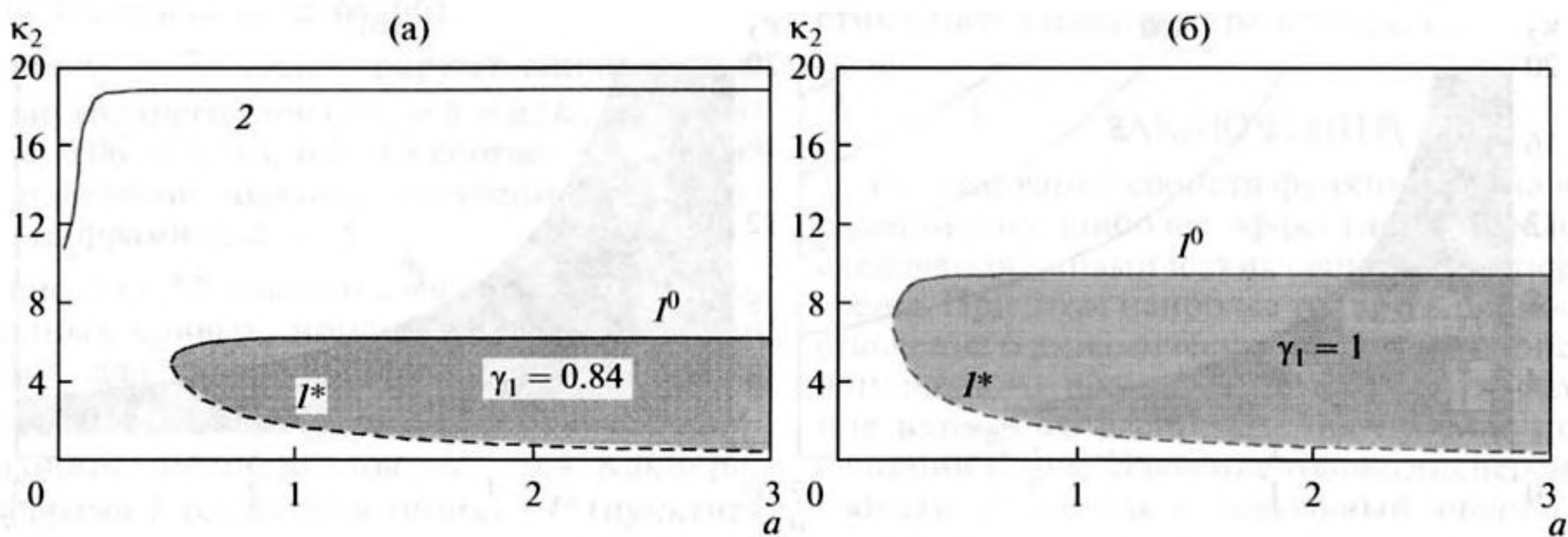


Рис. 8. Зависимости критических частот возникновения и исчезновения дисперсионных кривых от толщины внутреннего слоя при фиксированной толщине внешнего.

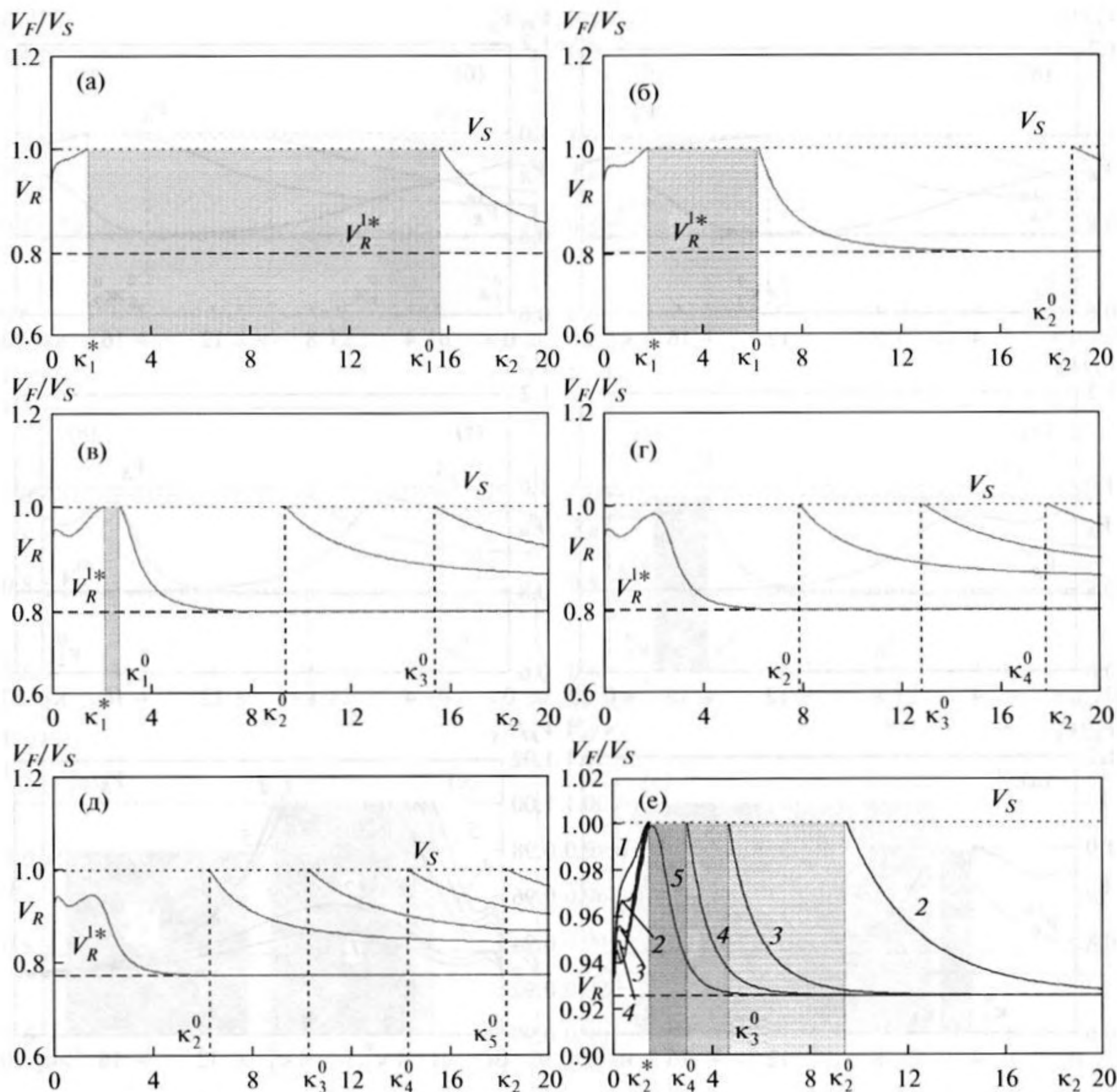


Рис. 9. Влияние изменения толщины внешнего слоя $\Delta h_2 = a\Delta h_1$ при фиксированной толщине внутреннего слоя на относительные фазовые скорости поверхностных волн трехслойного полупространства.

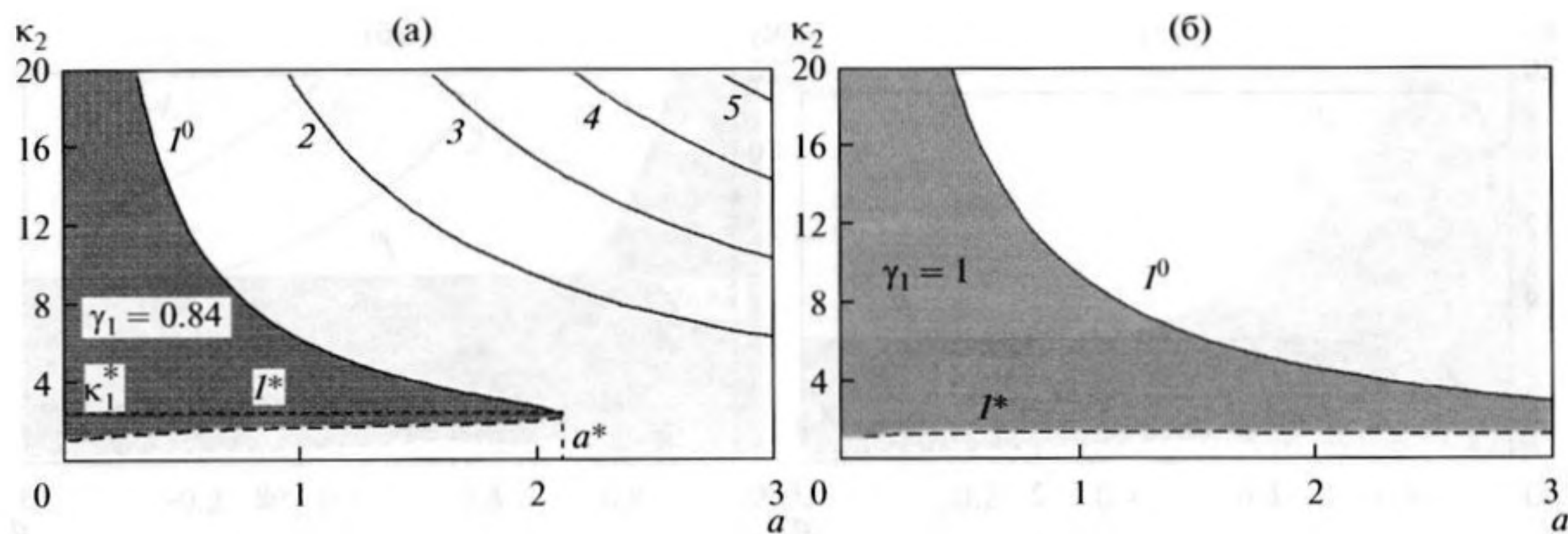


Рис. 10. Зависимости частот выхода и отсечки мод дисперсионных кривых от толщины внешнего слоя при постоянной толщине внутреннего высокоскоростного слоя.

0.4, 0.7 соответственно. На рис. 5е изменение толщины внутреннего слоя отмечено цифрами 1, 2, ..., 5.

Из рисунков видно, что при незначительной толщине внутреннего жесткого слоя $h = 0.01$ (рис. 5а) дисперсионная картина вполне соответствует двухслойному полупространству с низкоскоростным слоем. Увеличение толщины жесткого слоя приводит к существенной деформации кривой скорости первой волны в низкочастотном диапазоне и возрастанию критических частот появления новых мод поверхностных волн (рис. 5б, 5в). Анализ показал, что существует “критическое” соотношение толщин слоев, при котором первая мода претерпевает разрыв — появляются критические частота отсечки κ_1^* и частота повторного возникновения волны κ_1^0 (рис. 5г, 5е).

Заштрихованные области, ограниченные пунктирной (отмечена цифрой I^*) и сплошной (отмечена цифрой I^0) линиями на рис. 6а и 6б, иллюстрируют влияние толщины внутреннего слоя h при фиксированной толщине пакета на диапазон исчезновения $[\kappa_1^*, \kappa_1^0]$ первой моды и на частоты возникновения высших мод поверхностных волн (цифры соответствуют номерам мод).

Из анализа графиков на рис. 6а и 6б видно, что в области $[0, h^*]$ существуют несколько поверхностных волн (рис. 6а) или одна волна (рис. 6б). При толщине внутреннего слоя $h^* < h < H = 1$ появляется частотный диапазон, в котором распространяющихся поверхностных волн нет (заштрихованная область). Значения κ_1^* , h^* полностью определяются соотношением скоростных характеристик слоев γ_1 и γ_2 . Значение $h = 0$ соответствует случаю податливого слоя на полупространстве (рис. 6а) или однородному полупространству (рис. 6б), $h = 1$ отвечает случаю жесткого слоя на полупространстве — распространяющаяся поверхностная волна существует лишь в узком частотном диапазоне (рис. 6а, 6б).

Рисунки 7а–7д иллюстрируют влияние толщины внутреннего слоя ($\Delta h_2 = h = a\Delta h_1$, $\Delta h_1 = 0.4$) при $a = 0.06, 0.1, 0.3, 0.4, 0.5$ соответственно. На рис. 7е изменение толщины внутреннего слоя отмечено цифрами 1, 2, ..., 5.

На рис. 8а и 8б показаны частоты выхода дисперсионных кривых, номер которых обозначен цифрами, для случая изменяющейся толщины внутреннего слоя $\Delta h_2 = h = a\Delta h_1$ при фиксированной толщине внешнего слоя $\Delta h_1 = 0.4$. Как и ранее, цифрами I^0 (сплошная линия) и I^* (пунктирная линия) отмечены частоты отсечки (соответственно возникновения и исчезновения) первой моды.

Из графиков следует, что наличие тонкого высокоскоростного слоя приводит к деформации кривой фазовой скорости первой волны на низких частотах и сдвигу κ_2^0 в высокочастотную область (рис. 7а–7в, кривые 1, 2 на рис. 7е). Однако в случае $\gamma_1 = 0.84$ при увеличении Δh_2 значение частоты κ_2^0 (κ_4^0 и κ_5^0 для $\gamma_1 = 1$ на рис. 7е) стабилизируется в высокочастотной области, скорость первой волны возрастает, достигая значения V_S на частоте отсечки, появляется диапазон исчезновения поверхностной волны $[\kappa_1^*, \kappa_1^0]$ (рис. 7г–7д, кривые 3, 4, 5 на рис. 7е). Следует отметить, что при фиксированном Δh_1 дальнейшее увеличение Δh_2 не приводит к расширению интервала.

Обратную трансформацию структуры поверхностного волнового поля наглядно иллюстрируют рис. 9а–9е и 10а, 10б. Толщина внутреннего высокоскоростного слоя $\Delta h_2 = h = 0.4$ фиксирована, толщина внешнего слоя растет относительно внутреннего: $\Delta h_1 = a\Delta h_2$. На рис. 9а–9д представлены графики кривых для значений $a = 0.4, 1, 2, 2.4, 3$ соответственно. На рис. 9е цифрами 1, 2, ..., 5 отмечены кривые, соответствующие значениям $a = 0.4, 1, 2, 3, 4.4$.

На рис. 10а, 10б показаны частоты выхода мод дисперсионных кривых, порядок которых обозначен цифрами; кривые I^* и I^0 отвечают частотам исчезновения и выхода первой моды. Анализ показал, что при заглублении высокоскоростного слоя существует “критическое” соотношение толщин $\Delta h_2^* = a^*\Delta h_1$ такое, что при $\Delta h_2 > \Delta h_2^*$ диапазон частот $[\kappa_1^*, \kappa_1^0]$ перестает существовать — исчезает частота отсечки κ_1^* первой волны (рис. 10а, 9е). В области $\Delta h_2 > \Delta h_2^*$ первая мода дисперсионных кривых не претерпевает разрыва, частота выхода $\kappa_1^0 = 0$, значения κ_1^* и a^* полностью определяются соотношением скоростных характеристик слоев и полупространства γ_1, γ_2 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование свойств функции Грина является одним из наиболее эффективных средств исследования динамических свойств неоднородной среды. При этом наиболее точное и полное представление о динамических свойствах слоисто-неоднородного полупространства дает исследование взаимного распределения нулей и полюсов функции Грина. Изучение только дисперсионных свойств, равно как и модальный анализ, может привести к некорректным результатам.

На примере задачи о колебаниях трехслойного полупространства показана трансформация дис-

персионных характеристик структурно-неоднородной среды в зависимости от соотношения механических и геометрических параметров ее составляющих. В частности, показано, что в среде с низкоскоростным слоистым включением для каждой моды поверхностной волны имеет место ограниченность диапазона частот, в котором она распространяется. Наряду с критической частотой возникновения моды существует частота ее исчезновения — ухода с поверхности. Данная мода на поверхности подавляется за счет наложения нуля функции Грина на ее полюс.

В среде с высокоскоростным слоистым включением наряду с частотой отсечки (частота, на которой распространяющаяся в низкочастотном диапазоне поверхностная волна исчезает) существует частота повторного ее зарождения — верхняя граница “диапазона запираения” первой моды. Выше этого диапазона первая мода продолжает распространяться, могут появляться другие неисчезающие моды. Установлено критическое соотношение геометрических параметров среды, определяющее существование “диапазона запираения” волны.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 12-01-00811, 12-08-01040), Программы фундаментальных исследований № 25 Президиума РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л.М. О дисперсионном уравнении для нормальных волн в слоистых средах // Акуст. журн. 1956. Т. 2. № 4. С. 341–353.
2. Кряжев Ф.И., Петров Н.А. Нормальные волны в трехслойной среде // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 2. С. 229–236.
3. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
4. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
5. Жэн Б.-К., Лу Л.-Ю. Нормальные волны в упругом слоистом полупространстве // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 4. С. 501–513.
6. Жэн Б.-К., Лу Л.-Ю. Волны Рэлея и обнаружение низкоскоростных слоев в слоистом полупространстве // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 5. С. 613–625.
7. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
8. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
9. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
10. Калинин В.В., Лысенко И.В., Полякова И.Б. Об особенностях взаимодействия колеблющегося штампа с неоднородным тяжелым основанием // ПММ. 1989. Т. 53. № 2. С. 301–308.
11. Бабешко В.А., Белянкова Т.И., Калинин В.В. О решении одного класса смешанных задач для слоистого полупространства // Доклады РАН. 2001. Т. 380. № 5. С. 619–622.
12. Бабешко В.А., Белянкова Т.И., Калинин В.В. Метод фиктивного поглощения в задачах теории упругости для неоднородного полупространства // ПММ. 2002. Т. 66. № 2. С. 276–284.
13. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
14. Гольдштейн Р.В., Кузнецов С.В. Поверхностные акустические волны в диагностике слоистых сред. Чувствительность волн к вариации свойств отдельных слоев // ПММ. 2013. Т. 77. № 1. С. 74–82.
15. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И., Жанг Ч. Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 3. С. 370–385.