АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2015, том 61, № 1, с. 3–9

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФАЗОВЫХ СКОРОСТЕЙ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЯХ И ОБОЛОЧКАХ С ПОМОЩЬЮ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЕБАЯ И “ТИПА ДЕБАЯ”

© 2015 г. С. Л. Ильменков, А. А. Клещёв, К. А. Клюбина

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
190008 Санкт-Петербург, ул. Лоцманская 3
E-mail: alexalex-2@yandex.ru

Поступила в редакцию 09.02.2014 г.

С помощью потенциалов Дебая и “типа Дебая” рассмотрены два представления векторного потенциала вектора смещения изотропных цилиндрических стержня и оболочки. На основе такого подхода получены характеристические уравнения для волновых чисел трехмерных изгибных волн в этих телах и вычислены их фазовые скорости.

Ключевые слова: потенциал Дебая, распространение, изгибная волна, стержень, оболочка.

DOI: 10.7868/S0320791914060070

Математические модели распространения упругих волн в упругих стержне и оболочке весьма схожи. Гранично-контактная задача для оболочки отличается от аналогичной для стержня появлением дополнительной граничной поверхности, что приводит к дополнительным неизвестным коэффициентам, которые определяются из дополнительных граничных условий. С другой стороны, волновые процессы в оболочке на высоких частотах мало чем отличается от таких же в слое. Поэтому вполне обоснованно рассматривать эти структуры одновременно. Начнем с наиболее простой из них – со стержня.

В работе [1] рассмотрено волновое движение в изотропном упругом слое. В данной работе, как в [2–6], анализируются фазовые скорости упругих волн в изотропном цилиндрическом стержне произвольного радиуса a. В отличие от [2–6] обратимся к строгому решению задачи о фазовой скорости трехмерной изгибной волны в таком стержне [7–10]. Новизна данного исследования заключается в вычислении фазовых скоростей трехмерных изгибных волн изотропных стержней и оболочек с помощью строгого метода, основанного на использовании уравнений динамической теории упругости и потенциалах Дебая и “типа Дебая”.

Плотность материала стержня обозначим через ρ, коэффициенты Ламе – λ и μ, изотропный стержень помещен в вакуум. Вектор смещения стержня $\mathbf{u}$ подчиняется уравнению Ламе

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = -\rho\omega^2\mathbf{u}, \qquad (1)$$

где ω – круговая частота гармонических колебаний. По теореме Гельмгольца вектор смещения $\mathbf{u}$ упругого стержня представляется в виде комбинации скалярной функции Φ и векторной функции $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{u} = -\mathrm{grad}\,\Phi + \mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \qquad (2)$$

Векторная функция $\mathbf{A}$ выражается через потенциалы “типа Дебая” χ и Ψ [11, 12], которые близки к потенциалам Дебая U и V [7], но в отличие от них, более удобны для применения в цилиндрической системе координат:

$$\mathbf{A} = \chi\boldsymbol{e} + a\,\mathrm{rot}(\Psi\mathbf{e}), \qquad (3)$$

где $\mathbf{e}$ – единичный вектор. Потенциалы Дебая или “типа Дебая” позволяют разделить переменные в векторном уравнении Гельмгольца, которому подчиняется векторная функция $\mathbf{A}$. В трехмерном случае без них это сделать невозможно, так как при проектировании векторного уравнения на координатные оси компоненты векторной функции присутствуют вперемешку во всех трех скалярных уравнениях.

Введем в рассмотрение круговые цилиндрические координаты r, φ, z. Цилиндрические компоненты вектора смещения $\mathbf{u}(u_r, u_\varphi, u_z)$ представляются через потенциал Φ и цилиндрические компоненты функции $\mathbf{A}(A_r, A_\varphi, A_z)$ [7, 8]:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= -\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z},\\ u_\varphi &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r},\\ u_r &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{1}{r}A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

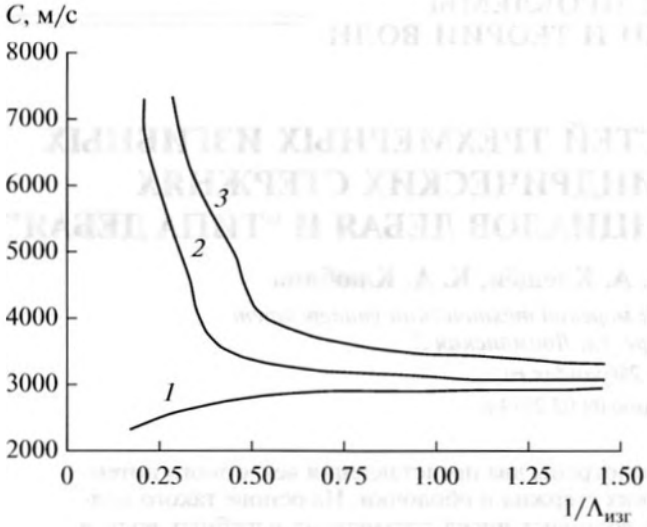

Рис. 1. Фазовые скорости первых трех мод изгибной волны.

Цилиндрические компоненты A_r, A_φ, A_z функции **A**, выраженные через потенциалы χ и Ψ, могут быть записаны в следующей форме:

$$A_r = \frac{a}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \tag{5}$$

$$A_\varphi = -a\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \tag{6}$$

$$A_z = \chi. \tag{7}$$

Потенциалы Φ, χ, Ψ могут быть разложены по собственным функциям скалярного уравнения Гельмгольца:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= e^{ikz}\sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(h'r)\cos(m\varphi), \\ \Psi &= e^{ikz}\sum_{m=0}^{\infty} B_m J_m(\kappa' r)\cos(m\varphi), \\ \chi &= e^{ikz}\sum_{m=1}^{\infty} C_m J_m(\kappa' r)\sin(m\varphi), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $h' = \left(h^2 - k^2\right)^{1/2}$; $\kappa' = \left(\kappa^2 - k^2\right)^{1/2}$; h – волновое число продольной волны в материале стержня; κ – волновое число поперечной волны; k – искомое волновое число трехмерной изгибной волны; $J_m(h'r)$ – цилиндрическая функция Бесселя; A_m, B_m, C_m – неизвестные коэффициенты, которые определяются из граничных условий на поверхности стержня – нормальное и касательные напряжения отсутствуют:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\Bigg|_{r=a} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}u_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\Bigg|_{r=a} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\Bigg|_{r=a} = 0. \tag{11}$$

Подставляя разложения (8) в граничные условия (9)–(11), приходим к определителю 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{12}$$

где

$$a_{11} = -(\lambda + 2\mu)J_m''(h'a) + \lambda\left[\left(a^{-2}m^2 + k^2\right)J_m(h'a) - a^{-1}J_m'(h'a)\right],$$

$$a_{12} = 2\mu aikJ_m''(\kappa' a),$$

$$a_{13} = 2\mu a^{-1}m\left(J_m'(\kappa' a) - a^{-1}J_m(\kappa' a)\right),$$

$$a_{21} = 2\mu a^{-1}\left[J_m'(h'a) - a^{-1}J_m(h'a)\right],$$

$$a_{22} = 2ikma^{-1}J_m(\kappa' a) - 2ikmJ_m'(\kappa' a),$$

$$a_{23} = -J_m''(\kappa' a) - m^2a^{-2}J_m(\kappa' a) + a^{-1}J_m'(\kappa' a),$$

$$a_{31} = -2ikJ_m'(h'a),$$

$$a_{32} = a^{-1}J_m'(\kappa' a)\left[m^2 - a^{-2}k^2 + 1\right] - 2m^2a^{-2}J_m(\kappa' a) - J_m''(\kappa' a) - aJ_m'''(\kappa' a),$$

$$a_{33} = ikma^{-1}J_m(\kappa' a).$$

Определитель (12) получился одним и тем же как при использовании потенциалов Дебая, так и при использовании потенциалов "типа Дебая", что является косвенным подтверждением правильности выбранного способа решения задачи. Приравнивая определитель (12) нулю, что обеспечивает его нетривиальное решение, а радиус стержня $a = 1.0$, получаем характеристическое уравнение для нахождения волновых чисел трехмерных изгибных волн. Также были выполнены расчеты для фазовых скоростей продольной и изгибной волн.

Для оценки реакции жидкости на фазовые скорости в стержне, он был помещен в воду, тогда к граничным условиям (9)–(11) добавляется условие непрерывности нормальных компонент вектора смещения в стержне и жидкости:

$$u_r = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\Bigg|_{r=a}, \tag{13}$$

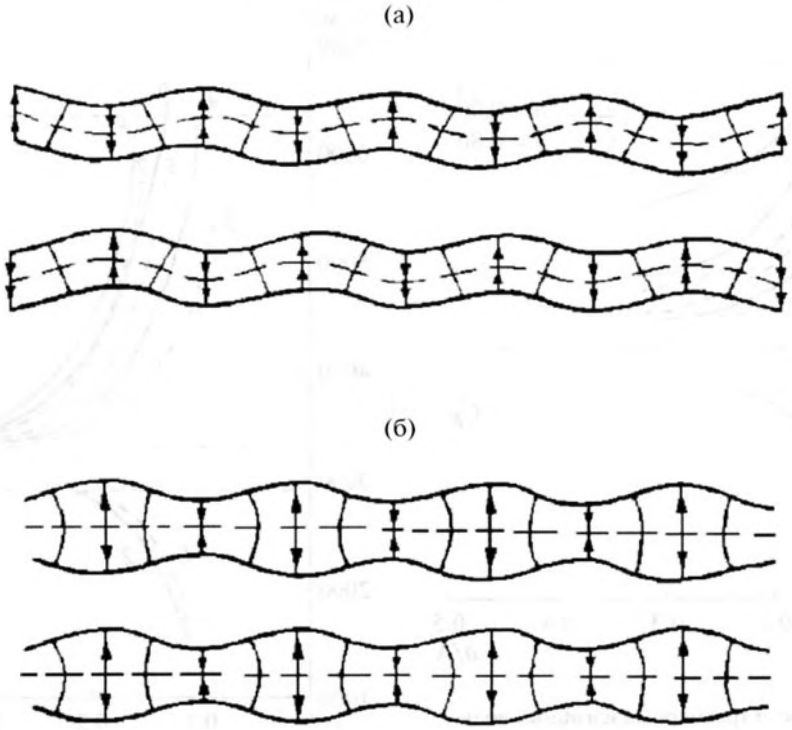

Рис. 2. Деформации цилиндрической оболочки при распространении изгибной (а) и продольной (б) осесимметричных волн.

где

$$\Phi_1 = e^{ikz}\sum_{m=0}^{\infty} D_m H_m^{(1)}(\gamma' r)\cos(m\varphi). \qquad (14)$$

Здесь $\gamma' = \left(\gamma^2 - k^2\right)^{1/2}$; γ – волновое число трехмерной волны в жидкости; $H_m^{(1)}(\gamma' r)$ – функция Ханкеля; D_m – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий.

Условие (9) становится неоднородным:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\Bigg|_{r=a} = \rho_0\omega^2\Phi_1, \qquad (15)$$

где ρ_0 – плотность жидкой среды. Подставляя разложения (8) и (14) в граничные условия (10), (11), (13) и (15), приходим к определителю 4-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad (16)$$

где элементы a_{11}–a_{33} совпадают с (12), $a_{14} = \rho_0\omega^2 H_m(\gamma' a)$, $a_{24} = 0$, $a_{34} = 0$, $a_{41} = -J_m'(h' a)$, $a_{42} = aikJ_m'(\kappa' a)$, $a_{43} = a^{-1}mJ_m'(\kappa' a)$, $a_{44} = -H_m'(\gamma' a)$.

При наличии жидкости волновые числа k, обращающие определитель (16) в ноль, становятся комплексными из-за излучения стержня, вызывающего необратимые потери. В отличие от стержня изгибная волна в цилиндрической оболочке может быть и трехмерной, и двумерной (осесимметричной). На рис. 2 схематично показана деформация цилиндрической оболочки при распространении в ней осесимметричных изгибной (а) и продольной (б) волн. Результат [13] был использован в работах [14] и [15] при изучении фазовых скоростей упругих волн в изотропной цилиндрической оболочке.

При изучении изгибной волны в изотропной цилиндрической оболочке используется тот же самый математический аппарат, что и при изучении изгибных волн в стержне, но с учетом второй (внутренней) граничной поверхности увеличивается число неизвестных и число граничных условий. Теперь разложения потенциалов Φ, V и U принимают вид [16–18]

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= e^{ikz}\sum_{m=0}^{\infty}\cos m\varphi\left[A_m J_m(h' r) + B_m N_m(h' r)\right], \\ V &= e^{ikz}\sum_{m=0}^{\infty}\cos m\varphi\left[C_m J_m(\kappa' r) + D_m N_m(\kappa' r)\right], \\ U &= e^{ikz}\sum_{m=1}^{\infty}\sin m\varphi\left[E_m J_m(\kappa' r) + F_m N_m(\kappa' r)\right], \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

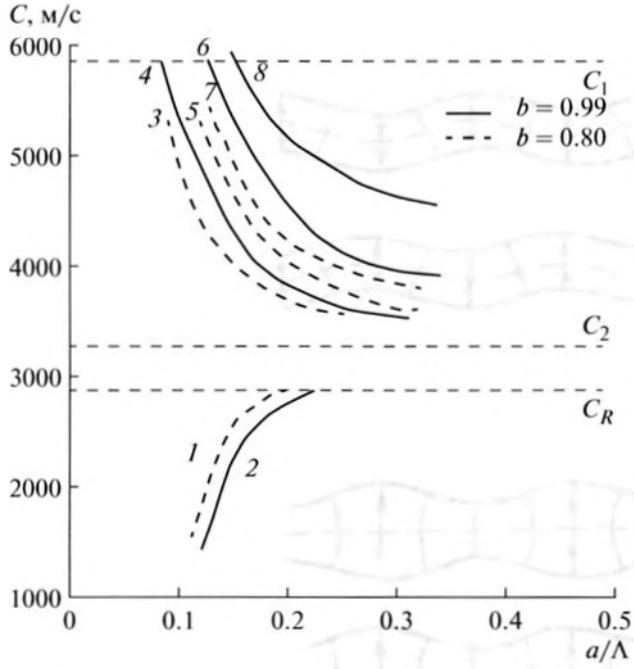

Рис. 3. Фазовые скорости трехмерных изгибных волн в стальных оболочках.

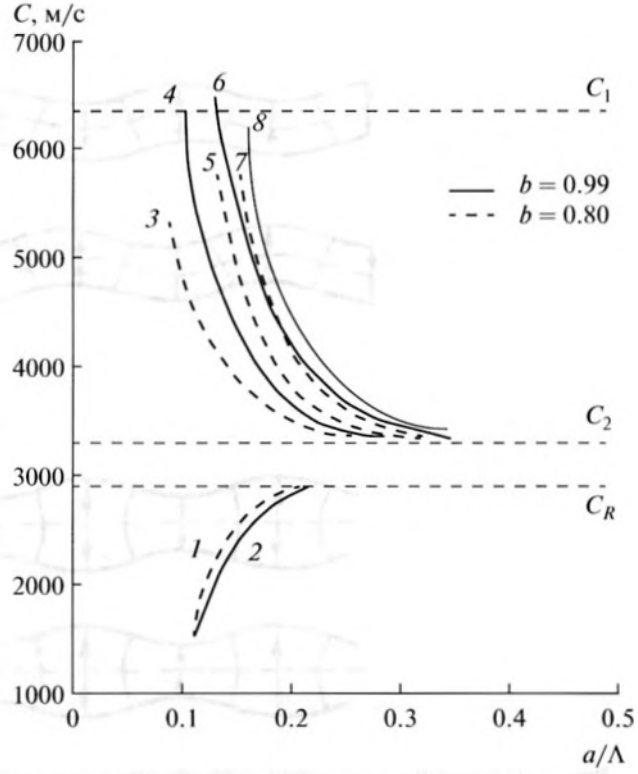

Рис. 4. Фазовые скорости трехмерных изгибных волн в алюминиевых оболочках.

где $h' = \left(k_1^2 - k^2\right)^{1/2}$; $\kappa' = \left(k_2^2 - k^2\right)^{1/2}$; $N_m(h'r)$ — цилиндрическая функция Неймана; $A_m, B_m, C_m, D_m, E_m, F_m$ — неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий на внешней $(r = a)$ и внутренней $(r = b)$ поверхностях оболочки.

Граничные условия, заключающиеся в отсутствии напряжений на обеих поверхностях оболочки ($r = a$ и $r = b$), принимают вид

$$(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \lambda\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r}u_r + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right]_{r=a;r=b} = 0, \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}u_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right)\Bigg|_{r=a,r=b} = 0, \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\Bigg|_{r=a,r=b} = 0. \quad (20)$$

После подстановки разложений (17) в граничные условия (18)–(20) (с использованием ортогональности тригонометрических функций $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$) приходим к определителю шестого порядка для моды m трехмерных изгибных волн следующего вида [16–18]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Выражения для членов определителя (21) даны в [17]. Приравнивая определитель (21) нулю, получим характеристическое уравнение для волновых чисел моды m трехмерных изгибных волн в изотропной цилиндрической оболочке произвольной (но постоянной) толщины.

Решение характеристического уравнения для стальных и алюминиевых оболочек различной толщины представлено на рис. 3 и 4, при этом наружный радиус a был принят равным 1.0, а внутренний радиус b принимал два значения: $b = 0.99$ (сплошная кривая) и $b = 0.8$ (пунктирная кривая). На графиках показаны значения скоростей продольной (c_1), поперечной (c_2) и волны Рэлея (c_R). Значение $m = 1$ соответствует нулевой моде изгибной волны, скорость которой асимптотически стремится к скорости волны Рэлея c_R; $\Lambda = c_1/f$ – длина продольной волны в материале оболочки, f – частота волны в герцах. На рис. 3 показаны фазовые

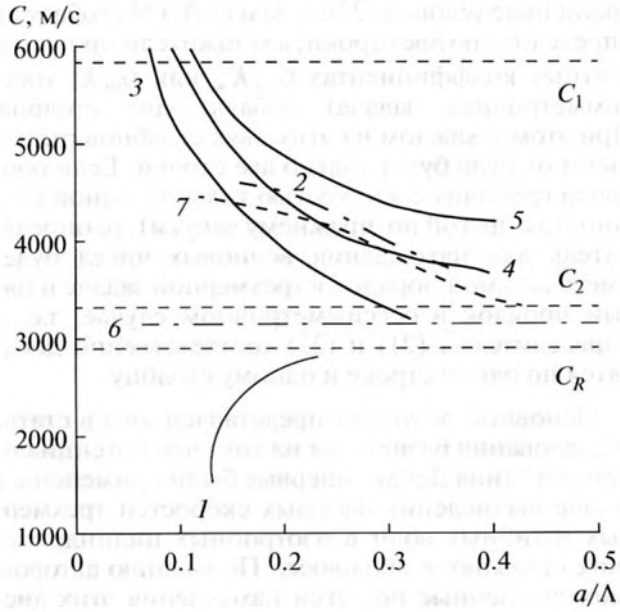

Рис. 5. Фазовые скорости изгибной, продольной и крутильной осесимметричных волн в оболочке.

скорости трехмерных изгибных волн в стальных оболочках, на рис. 4 – в алюминиевых.

Обратимся к осесимметричным изгибным и продольным волнам. В соответствии с [16, 17] в осесимметричном случае граничные условия (18)–(20) упрощаются: условие (19) исчезает, а условие (18) принимает вид:

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)+\lambda\left[\frac{1}{r}u_r+\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right]_{r=a,r=b}=0. \qquad (22)$$

Определитель 4-го порядка, получаемый из граничных условий, имеет вид [16–18]

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad (23)$$

где

$$a_{11}=-(\lambda+2\mu)J_0''(h'a)+\lambda\left[k^2J_0(h'a)-a^{-1}J_0'(h'a)\right],$$

$$a_{12}=-(\lambda+2\mu)N_0''(h'a)+$$
$$+\lambda\left[k^2N_0(h'a)-a^{-1}N_0'(h'a)\right],$$

$$a_{13}=-2i\mu kJ_1'(\kappa'a),$$

$$a_{14}=-2i\mu kN_1'(\kappa'a),$$

$$a_{21}=-(\lambda+2\mu)J_0''(h'b)+\lambda\left[k^2J_0(h'b)-b^{-1}J_0'(h'b)\right],$$

$$a_{22}=-(\lambda+2\mu)N_0''(h'b)+\lambda\left[k^2N_0(h'b)-b^{-1}N_0'(h'b)\right],$$

$$a_{23}=-2i\mu kJ_1'(\kappa'b),$$

$$a_{24}=-2i\mu kN_1'(\kappa'b), \quad a_{31}=-2ikJ_0'(h'a),$$

$$a_{32}=-2ikN_0'(h'a),$$

$$a_{33}=k^2J_1(\kappa'a)-J_1(\kappa'a)+J_1'(\kappa'a)+J_1''(\kappa'a),$$

$$a_{34}=k^2N_1(\kappa'a)-N_1(\kappa'a)+N_1'(\kappa'a)+N_1''(\kappa'a),$$

$$a_{41}=-2ikJ_0'(h'b), \quad a_{42}=-2ikN_0'(h'b),$$

$$a_{43}=k^2J_1(\kappa'b)-J_1(\kappa'b)+J_1'(\kappa'b)+J_1''(\kappa'b),$$

$$a_{44}=k^2N_1(\kappa'b)-N_1(\kappa'b)+N_1'(\kappa'b)+N_1''(\kappa'b).$$

Раскрывая определитель (23) и приравнивая его нулю, получаем характеристическое уравнение для волновых чисел изгибных и продольных осесимметричных волн.

Определитель для осесимметричных крутильных волн дается в [17]:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a^{-1}J_1'(\kappa_1a)-J_1(\kappa_1a)a^{-2} & a^{-1}N_1'(\kappa_1a)-N_1(\kappa_1a)a^{-2} \\ b^{-1}J_1'(\kappa_1b)-b^{-2}J_1(\kappa_1b) & b^{-1}N_1'(\kappa_1b)-b^{-2}N_1(\kappa_1b) \end{vmatrix}, \qquad (24)$$

где $\kappa_1=\left(k_2^2-k^2\right)^{1/2}$, k – искомое волновое число осесимметричной крутильной волны в оболочке. Приравнивая определитель (24) нулю, получим характеристическое уравнение для волновых чисел осесимметричных крутильных волн.

На рис. 5 представлены фазовые скорости осесимметричных изгибных, продольных и крутильных волн: кривая *1* характеризует фазовую скорость нулевой моды изгибной волны; *2* – нулевой моды продольной волны; кривые *3*, *4*, *5* – ненулевых мод продольной и изгибной волн; прямая *6* – нулевой моды крутильной волны; *7* – первой моды крутильной волны; $\Lambda=c_1/f$.

Для определения влияния внешней и внутренней жидких сред на дисперсионные кривые фазовых скоростей оболочки к определителю шестого порядка (21) добавляется два столбца и две строки, и он превращается в определитель 8-го поряд-

ка, а определитель 4-го порядка – в определитель 6-го порядка. Потенциалы звуковых волн Φ_1 (во внешней среде) и Φ_2 (в заполнении оболочки) раскладываются следующим образом по цилиндрическим функциям:

$$\Phi_1 = \sum_{m=0}^{\infty} G_m H_m^{(1)}(\gamma_1 r)\cos m\varphi e^{ikz}, \quad (25)$$

$$\Phi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} K_m J_m(\gamma_2 r)\cos m\varphi e^{ikz}, \quad (26)$$

где $\gamma_1 = \sqrt{(\omega/c_3)^2 - k^2}$; $\gamma_2 = \sqrt{(\omega/c_4)^2 - k^2}$; c_3 и c_4 – скорости звука во внешней и внутренней средах соответственно.

Составляющая волнового вектора вдоль оси $z \Rightarrow k$ такая же, как и в оболочке, в силу закона Снеллиуса. При этом граничное условие (18) для нормальных напряжений на обеих поверхностях оболочки трансформируется:

$$(\lambda + 2\mu)(\partial u_r/\partial r) + \\ + \lambda\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r}u_r + (\partial u_z/\partial z)\right] + i\omega\rho_1\Phi_1 = 0\Big|_{r=a}, \quad (27)$$

где ρ_1 – плотность наружной среды;

$$(\lambda + 2\mu)(\partial u_r/\partial r) + \\ + \lambda\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r}u_r + (\partial u_z/\partial z)\right] + i\omega\rho_2\Phi_2 = 0\Big|_{r=b}, \quad (28)$$

где ρ_2 – плотность внутренней среды. Добавятся еще два граничных условия на обеих границах оболочки: непрерывны нормальные компоненты вектора смещения.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\Big|_{r=b} = 0. \quad (30)$$

В осесимметричном случае условие (22) трансформируется как:

$$(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \lambda\left[\frac{1}{r}u_r + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] + i\omega\rho_1\Phi_1\Big|_{r=a} = 0, \quad (31)$$

$$(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \lambda\left[\frac{1}{r}u_r + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] + i\omega\rho_2\Phi_2\Big|_{r=b} = 0. \quad (32)$$

Добавленные граничные условия в осесимметричном случае:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 0\Big|_{r=a}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = 0\Big|_{r=b}. \quad (34)$$

Здесь

$$\Phi_1 = G_0 H_0^{(1)}(\gamma_1 r)e^{ikz}, \quad (35)$$

$$\Phi_2 = K_0 J_0(\gamma_2 r)e^{ikz}. \quad (36)$$

Граничные условия (27), (28) и (33), (34) добавят к определителю две строки, а множители при неизвестных коэффициентах G_m, K_m или G_0, K_0 (осесимметричная задача) добавят два столбца. При этом в каждом из этих двух столбцов отличными от нуля будут только две строки. Если оболочка граничит с жидкостью только с одной стороны (а с другой по-прежнему вакуум), то определитель для нахождения волновых чисел будет иметь седьмой порядок в трехмерной задаче и пятый порядок в осесимметричном случае, т.е. к определителям (21) и (23) соответственно добавятся по одной строке и одному столбцу.

Основной результат представленного в статье исследования базируется на том, что потенциалы Дебая и "типа Дебая" впервые были применены к задаче вычисления фазовых скоростей трехмерных изгибных волн в изотропных цилиндрических стержнях и оболочках. По мнению авторов, многочисленные попытки нахождения этих дисперсионных кривых фазовых скоростей без использования потенциалов Дебая или "типа Дебая" заканчивались неудачей, поскольку разделить переменные в векторном уравнении Гельмгольца в трехмерном случае по-другому нельзя. Авторы работ [1–6], опираясь на теорию упругости Лява, сумели подобрать радиальные зависимости компонент вектора смещения изотропного стержня (с использованием функций Бесселя), что позволило им вычислить дисперсионную кривую первой моды изгибной волны, но при этом остается неясным:

(1) насколько точно это решение;

(2) как найти фазовые скорости других мод изгибной волны.

Уточненная теория изгибных колебаний стержня Тимошенко (с поправкой Рэлея на инерцию вращения и поправкой Тимошенко на сдвиг элемента) позволяет вычислить фазовую скорость первой моды изгибной волны [5]. Таким образом, для оценочных расчетов фазовой скорости первой моды изгибной волны в стержне можно применить перечисленные выше приближенные методы. Теория тонких оболочек позволяет находить фазовые скорости упругих волн даже в анизотропных оболочках [17, 19, 20], но в силу своей приближенности она не гарантирует высокой точности.

В рамках проводимых авторами статьи экспериментальных исследований [21] предполагается выполнить сравнение теоретических и экспериментальных значений фазовых скоростей изгибных волн в упругих цилиндрических оболочках. Кроме того, в настоящее время проводятся теоретические исследования по эффективности применения потенциалов "типа Дебая" (вместо потенциалов Дебая) в задачах, изложенных в [22]. Методом, подобным приведенному в данной ста-

тье, рассматривается распространение волн различного типа в геофизике [23–25].

Представленные в статье результаты получены при проведении поисковой научно-исследовательской работы в рамках Государственного контракта П242 от 21 апреля 2010 года ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Achenbach J.D., Xu Y.* Wave motion anisotropic elastic layer generated by a time-harmonic point load of arbitrary direction // J. Acoust. Soc. Am. 1999. V. 106. № 1. P. 84–90.
2. *Bancroft D.* The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars // Phys. Rev. 1941. V. 59. № 4. P. 588–593.
3. *Hudson G.E.* Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders // Phys. Rev. V. 63. № 1. P. 46–51.
4. *Davies R.M.* Critical study of the Hopkinson pressure // Phil. Roy. Soc. London. Ser. A. 1948. V. 240. P. 375–357.
5. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. М.: ИЛ, 1955. 272 с.
6. *Reiter R.C.* Dispersion of flexural waves in circular bimaterial cylinders – theoretical treatment // J. Acoust. Soc. Am. 1969. V. 46. № 3. Pt. 2. P. 643–648.
7. *Клещёв А.А., Клюкин И.И.* Об изгибных волнах в упругом круглом цилиндрическом стержне / Сб. научн. тр. Л.: ЛКИ, 1976. Вып. 109. С. 3–5.
8. *Клюкин И.И., Клещёв А.А.* Судовая акустика. Л.: Судостроение, 1982. 144 с.
9. *Клещёв А.А., Сургайло К.А.* Фазовые скорости упругих волн в изотропном цилиндрическом стержне произвольной толщины / Сб. тр. XI сессии РАО. М.: ГЕОС, 2001. Т. 1. С. 236–238.
10. *Ilmenkov S.L., Kleshchev A.A.* The Debye's potentials utilisation in the three-dimensional problems of the radiation and propagation of the elastic waves // I. J. T. M. P. 2012. V. 2. № 6. P. 163–169.
11. *Fan Y., Sinclair A.N., Honarvar F.* Scattering of a plane acoustic wave from a transversely isotropic cylinder encased in a solid elastic medium // J. Acoust. Soc. Am. 1999. V. 106. № 3. Pt. 1. P. 1229–1236.
12. *Клещёв А.А.* Потенциалы Дебая и "типа Дебая" в задачах дифракции, излучения и распространения упругих волн // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 3. С. 338–341.
13. *Cazis D.C.* Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinder // J. Acoust. Soc. Am. 1959. V. 31. № 5. P. 568–578.
14. *Kumar R.* Dispersion of axially symmetric waves in empty and fluid-filled cylindrical shells // Acustica. 1972. V. 27. № 6. P. 317–329.
15. *Kumar R., Stephens R.W.B.* Dispersion of flexural waves in circular cylindrical shells // Proc. Roy. Soc. London. A. 1972. V. 329. P. 283–297.
16. *Ильменков С.Л., Клещёв А.А.* Фазовые скорости трехмерных изгибных волн в изотропной цилиндрической оболочке произвольной толщины (строгое решение) / Сб. тр. XI сессии РАО. Т. 1. М.: ГЕОС, 2001. С. 239–241.
17. *Клещёв А.А.* Дифракция, излучение и распространение упругих волн. СПб.: Профпринт, 2006. 156 с.
18. *Ilmenkov S.L., Kleshchev A.A.* Phase velocities of three-dimensional and axis-symmetrical elastic waves in isotropic cylindrical shell // I. J. T. M. P. 2012. V. 2. № 6. P. 196–202.
19. *Kleshchev A.A.* Against phase velocities of elastic waves in thin transversely isotropic cylindrical shell // O. J. A. 2013. V. 3. № 3. P. 67–71.
20. *Kleshchev A.A.* Against phase velocities of elastic waves in thin orthotropic cylindrical shell // A. S. P. 2013. V. 1. № 3. P. 44–47.
21. *Клещёв А.А.* Низкочастотное рассеяние импульсного звукового сигнала упругими цилиндрическими оболочками // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 3. С. 381–386.
22. *Клещёв А.А.* Резонансное рассеяние звука на упругих сфероидальных телах и оболочках // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 3. С. 253–261.
23. *Уайт Дж. Э.* Возбуждение и распространение сейсмических волн. М.: Недра, 1986. 262 с.
24. *Winbow G.A.* A theoretical study of acoustic *S*-wave and *P*-wave velocity logging with conventional and dipole sources in soft formations // Geophysics. 1988. V. 53. № 10. P. 1334–1342.
25. *Chen S.T.* Shear-wave logging with quadrupole sources // Geophysics. 1989. V. 54. № 5. P. 590–597.