

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ
СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ:
АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

© 2015 г. С. О. Папков

Севастопольский национальный технический университет

Севастополь, ул. Университетская 33

E-mail: stanislav.papkov@gmail.com

Поступила в редакцию 02.06.2014 г.

Получено новое асимптотически точное решение задачи о поперечных колебаниях прямоугольной ортотропной пластины со свободными краями. Общее решение уравнения колебаний строится в форме суммы рядов Фурье с неопределенными коэффициентами, которые связаны посредством однородной квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Анализ бесконечной системы позволяет найти степенную асимптотику нетривиального решения системы, что дает возможность вычислить собственные частоты колебаний и построить соответствующие им собственные формы. Приводятся примеры численной реализации для реальных материалов.

Ключевые слова: прямоугольная ортотропная пластина, фигуры Хладни, бесконечная система линейных уравнений, асимптотика.

DOI: 10.7868/S0320791915010086

ВВЕДЕНИЕ

Задача о свободных поперечных колебаниях прямоугольной пластины относится к числу старейших классических проблем. Еще в начале XIX века опыты с демонстрацией фигур Хладни [1] благодаря эстетическому аспекту привлекли внимание широкой общественности к проблеме колебания пластин. Попытки математического описания проблемы, в свою очередь, дали мощный толчок к развитию аппарата математической физики.

Точные аналитические решения всегда вызывают повышенный интерес [2, 3]. Тем не менее, несмотря на долгую историю и посвященные указанной проблеме сотни работ на основе различных подходов, задача о поперечных колебаниях прямоугольных пластин имеет точное решение в форме рядов Фурье (решения типа Levy) лишь в случае, когда две противоположные стороны пластины являются шарнирно-опертыми [4, 5]. В других случаях закрепления сторон пластины переменные в краевой задаче не разделяются. Попытки преодолеть данное препятствие не прекращаются и сегодня. В частности, отметим спорную работу [6], где используется новый метод *dual separation of variables* применительно к полностью защемленной ортотропной пластине.

Использование техники классического разделения переменных позволяет построить общее решение уравнения колебаний в виде суммы

частных решений, что приводит для произвольных граничных условий к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов этих рядов. При исследовании колебаний прямоугольных пластин со свободными краями данный подход был использован впервые [7]. Более известной модификацией данного подхода к определению собственных частот прямоугольных пластин является *method of superposition*, который был развит в [8]. Здесь решение строится в виде конечной суммы частных решений, что позволяет получить, благодаря искусственному усечению бесконечных рядов, конечную систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов. В работе [9] используются решения типа Levy в форме неурезанных бесконечных рядов для исследования гибких колебаний и устойчивости прямоугольных пластин в случае произвольных граничных условий.

Чрезвычайная важность прямоугольной пластины как элемента в структурной механике и инженерных приложениях привела к появлению большого числа работ, где проблема колебаний изучалась на основе различных подходов. Одним из них является метод Ритца, который первоначально был предложен [10] для решения задачи колебаний изотропной пластины с полностью свободными краями. Различные модификации вариационного подхода позволяют найти приближенные решения для ряда задач колебаний и устойчивости прямоугольных пластин [4]. В част-

ности, в статье [11] метод Рэлея–Ритца используется для исследования влияния сложной нагрузки в плоскости пластины на ее колебания и устойчивость. Колебания и устойчивость симметрично-ламинированных композитных прямоугольных плит под действием сил в ее плоскости исследовались [12] на основе метода Рэлея–Ритца и finite strip method. Приложение метода конечных элементов для исследования колебаний ортотропных пластин дается в работах [13, 14], метода Канторовича – в [15], метода функции Грина – в [16].

В представленной работе задача о колебаниях ортотропной прямоугольной пластины со свободными краями сводится к однородной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. На основе авторского обобщения закона асимптотических выражений Б.М. Кояловича [17, 18] найден степенной закон убывания нетривиального решения данной системы, что позволяет построить эффективный алгоритм вычисления собственных частот и форм пластины.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластину $\{(x, y) \in [-a; a] \times [-b; b]\}$ толщины h . Согласно [19], упругие свойства материала можно описать при помощи четырех упругих констант, например, с помощью модуля Юнга E_1 вдоль направления оси x , модуля сдвига G и двух коэффициентов Пуассона ν_{12} и ν_{21} . Тогда уравнение свободных поперечных колебаний пластины в приближении классической теории Кирхгофа–Лява может быть записано относительно прогиба пластины $w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t}$:

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - D_1 \Omega^4 W = 0, \quad (1)$$

где $\Omega = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho h}{D_1}}$ – безразмерный частотный параметр, ρ – плотность материала, ω – круговая частота;

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_2 = \frac{\nu_{21} E_1 h^3}{12\nu_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})};$$

$$D_3 = D_{12} + 2D_{66}; \quad D_{66} = \frac{Gh^3}{12}; \quad D_{12} = \nu_{12} D_2.$$

Граничные условия свободного края на сторонах $x = \pm a$ имеют вид

$$M_x = -\left(D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0,$$

$$V_x = -\left(D_1 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (D_3 + 2D_{66}) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) = 0 \quad (2)$$

на сторонах $y = \pm b$:

$$M_y = -\left(D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (3)$$

$$V_y = -\left(D_2 \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (D_3 + 2D_{66}) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right) = 0.$$

Общее решение задачи может быть представлено в виде суммы четных и нечетных составляющих по каждой из координат:

$$W = \sum_{k,j=0}^1 W_{kj}, \quad (4)$$

где W_{00} является четной по обоим координатам, W_{01} – четная по x и нечетная по y , и т.п.

Используя стандартную технику разделения переменных, общее решение уравнения колебаний (1) для каждого случая симметрии может быть записано в виде суммы двух рядов Фурье с неопределенными коэффициентами

$$W_{kj} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n H_j(p_{nk}y) + B_n H_j(\bar{p}_{nk}y)) T_k(\alpha_{nk}x) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n H_k(q_{nj}x) + D_n H_k(\bar{q}_{nj}x)) T_j(\beta_{nj}y), \quad (5)$$

где тригонометрические и гиперболические функции обозначены как

$$T_j(z) = \begin{cases} \cos z, & j = 0, \\ \sin z, & j = 1, \end{cases} \quad H_j(z) = \begin{cases} \text{ch } z, & j = 0, \\ \text{sh } z, & j = 1. \end{cases}$$

Константы разделения выбираются в форме, обеспечивающей полноту решения (5) на границе пластины:

$$\alpha_{nj} = \frac{\pi}{a} \left(n - 1 + \frac{j}{2} \right), \quad \beta_{nj} = \frac{\pi}{b} \left(n - 1 + \frac{j}{2} \right). \quad (6)$$

Величины p_{nk}, \bar{p}_{nk} и q_{nj}, \bar{q}_{nj} являются корнями следующих характеристических уравнений:

$$D_2 p^4 - 2D_3 \alpha^2 p^2 + D_1 (\alpha^4 - \Omega^4) = 0, \quad (7)$$

$$D_1 q^4 - 2D_3 \beta^2 q^2 + D_2 \beta^4 - D_1 \Omega^4 = 0, \quad (8)$$

которые легко выражаются аналитически:

$$p = \sqrt{\frac{D_3 \alpha^2 + \sqrt{(D_3^2 - D_1 D_2) \alpha^4 + D_1 D_2 \Omega^4}}{D_2}}, \quad (9)$$

$$\bar{p} = \sqrt{\frac{D_3 \alpha^2 - \sqrt{(D_3^2 - D_1 D_2) \alpha^4 + D_1 D_2 \Omega^4}}{D_2}},$$

$$q = \sqrt{\frac{D_3 \beta^2 + \sqrt{(D_3^2 - D_1 D_2) \beta^4 + D_1^2 \Omega^4}}{D_2}}, \quad (10)$$

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{D_3 \beta^2 - \sqrt{(D_3^2 - D_1 D_2) \beta^4 + D_1^2 \Omega^4}}{D_2}}.$$

В зависимости от знаков подкоренных выражений величины (9), (10) могут быть, вообще го-

воря, комплексными. Однако в силу соотношений теоремы Виета для уравнений (7), (8) выражения

$$D_1(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2) = D_2(\beta_{mj}^2 + p_{nk}^2)(\beta_{mj}^2 + \bar{p}_{nk}^2) = D_1\alpha_{nk}^4 + 2D_3\alpha_{nk}^2\beta_{mj}^2 + D_2\beta_{mj}^4 - D_1\Omega^4 \quad (11)$$

обязательно являются действительными.

Общее решение (4), (5) точно удовлетворяет уравнению колебаний (1) и имеет достаточный произвол для выполнения любых заданных граничных условий. В случае свободных краев пластины условия (2) и (3) на нормальные реакции V_x и V_y могут быть выполнены точно. Действительно, из (6) следует, что для любого типа симметрии $T_k'(\alpha_{nk}a) = T_j'(\beta_{nj}b) = 0$. Тогда при выборе неопределенных коэффициентов в форме

$$A_n = \frac{(-1)^n b \sqrt{D_1} (D_2 \bar{p}_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2)}{2D_2 p_{nk} H_j'(p_{nk}b) (\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} X_n,$$

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1} b \sqrt{D_1} (D_2 p_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2)}{2D_2 \bar{p}_{nk} H_j'(\bar{p}_{nk}b) (p_{nk}^2 - \bar{p}_{nk}^2)} X$$

$$C_n = \frac{(-1)^n a \sqrt{D_2} (D_1 \bar{q}_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2)}{2D_1 q_{nj} H_k'(q_{nj}a) (\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} Y_n,$$

$$D_n = \frac{(-1)^{n+1} a \sqrt{D_2} (D_1 q_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2)}{2D_1 \bar{q}_{nj} H_k'(\bar{q}_{nj}a) (q_{nj}^2 - \bar{q}_{nj}^2)} Y_n$$

указанные условия выполняются тождественно.

Условия на моменты M_x и M_y дают два функциональных уравнения вида

$$\frac{b \sqrt{D_1}}{D_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2} \times \left(\frac{(D_2 \bar{p}_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2)(D_{12} p_{nk}^2 - D_1 \alpha_{nk}^2) H_j(p_{nk}y)}{p_{nk} H_j'(p_{nk}b)} - \frac{(D_2 p_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2)(D_{12} \bar{p}_{nk}^2 - D_1 \alpha_{nk}^2) H_j(\bar{p}_{nk}y)}{\bar{p}_{nk} H_j'(\bar{p}_{nk}b)} \right) = \frac{a \sqrt{D_2}}{D_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m Y_m}{\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2} \times \left(\frac{(D_1 \bar{q}_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{mj}^2)(D_1 q_{mj}^2 - D_{12} \beta_{mj}^2) H_k(q_{mj}a)}{q_{mj} H_k'(q_{mj}a)} - \frac{(D_1 q_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{mj}^2)(D_1 \bar{q}_{mj}^2 - D_{12} \beta_{mj}^2) H_k(\bar{q}_{mj}a)}{\bar{q}_{mj} H_k'(\bar{q}_{mj}a)} \right) \times T_j(\beta_{mj}y), \quad y \in [-b; b],$$

$$\frac{a \sqrt{D_2}}{D_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2} \times \left(\frac{(D_1 \bar{q}_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2)(D_{12} q_{nj}^2 - D_2 \beta_{nj}^2)}{q_{nj}} \times \frac{H_k(q_{nj}x)}{H_k'(q_{nj}a)} - \frac{(D_1 q_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2)(D_{12} \bar{q}_{nj}^2 - D_2 \beta_{nj}^2)}{\bar{q}_{nj}} \times \frac{H_k(\bar{q}_{nj}x)}{H_k'(\bar{q}_{nj}a)} \right) = \frac{b \sqrt{D_1}}{D_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m X_m}{\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2} \times \left(\frac{(D_2 \bar{p}_{mk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{mk}^2)(D_2 p_{mk}^2 - D_{12} \alpha_{mk}^2)}{p_{mk}} \times \frac{H_j(p_{mk}b)}{H_j'(p_{mk}b)} - \frac{(D_2 p_{mk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{mk}^2)(D_2 \bar{p}_{mk}^2 - D_{12} \alpha_{mk}^2)}{\bar{p}_{mk}} \times \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{H_j'(\bar{p}_{mk}b)} \right) T_k(\alpha_{mk}x), \quad x \in [-a; a].$$

Данные равенства после разложения входящих в них гиперболических функций по тригонометрическим

$$\frac{H_k(qx)}{H_k'(qa)} = \frac{q}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (2 - \delta_{k0} \delta_{1m})}{\alpha_{mk}^2 + q^2} T_k(\alpha_{mk}x),$$

$$\frac{H_j(py)}{H_j'(pb)} = \frac{p}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (2 - \delta_{j0} \delta_{1m})}{\beta_{mj}^2 + p^2} T_j(\beta_{mj}y)$$

и перестановки порядка суммирования в левой части равенств приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно последовательностей $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$Y_m = \frac{2 - \delta_{j0} \delta_{1m}}{2a \Delta_m^1 \sqrt{D_1 D_2}} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4D_{66}^2 + D_1 D_2 - D_3^2) \beta_{mj}^2 \alpha_{nk}^2 + D_{12} D_1 \Omega^4}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} X_n,$$

$$X_m = \frac{2 - \delta_{k0} \delta_{1m}}{2b \Delta_m^2 \sqrt{D_1 D_2}} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4D_{66}^2 + D_1 D_2 - D_3^2) \beta_{nj}^2 \alpha_{mk}^2 + D_{12} D_1 \Omega^4}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} Y_n, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Здесь δ_{mn} – символ Кронекера,

$$\begin{aligned} \Delta_m^1 &= \frac{H_k(q_{mj}a)}{H'_k(q_{mj}a)} \times \\ &\times \frac{(D_1\bar{q}_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{mj}^2)(D_1q_{mj}^2 - D_{12}\beta_{mj}^2)}{2D_1q_{mj}(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} - \\ &\quad - \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{H'_k(\bar{q}_{mj}a)} \times \\ &\times \frac{(D_1\bar{q}_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{mj}^2)(D_1\bar{q}_{mj}^2 - D_{12}\beta_{mj}^2)}{2D_1\bar{q}_{mj}(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)}, \\ \Delta_m^2 &= \frac{H_j(p_{mk}b)}{H'_j(p_{mk}b)} \times \\ &\times \frac{(D_2\bar{p}_{mk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{mk}^2)(D_2p_{mk}^2 - D_{12}\alpha_{mk}^2)}{2D_2p_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)} - \\ &\quad - \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{H'_j(\bar{p}_{mk}b)} \times \\ &\times \frac{(D_2p_{mk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{mk}^2)(D_2\bar{p}_{mk}^2 - D_{12}\alpha_{mk}^2)}{2D_2\bar{p}_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)}. \end{aligned}$$

Заметим, что выражения Δ_m^1 , Δ_m^2 обязательно являются действительными для любой комбинации параметров задачи. Таким образом, коэффициенты системы (12) в силу тождества (11) также действительны. Нетривиальное решение данной системы на собственной частоте колебаний позволяет получить явное аналитическое выражение для собственных форм колебаний:

$$\begin{aligned} W_{kj} &= \frac{b\sqrt{D_1}}{2D_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n X_n}{\bar{p}_{nk} - p_{nk}^2} \times \\ &\times \left(\frac{D_2\bar{p}_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{nk}^2}{p_{nk}} \frac{H_j(p_{nk}y)}{H'_j(p_{nk}b)} - \right. \\ &\left. - \frac{D_2p_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{nk}^2}{\bar{p}_{nk}} \frac{H_j(\bar{p}_{nk}y)}{H'_j(\bar{p}_{nk}b)} \right) T_k(\alpha_{nk}x) + \\ &+ \frac{\alpha\sqrt{D_2}}{2D_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n Y_n}{\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2} \times \\ &\times \left(\frac{D_1\bar{q}_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2}{q_{nj}} \frac{H_k(q_{nj}x)}{H'_k(q_{nj}a)} - \right. \\ &\left. - \frac{D_1q_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66})\beta_{nj}^2}{\bar{q}_{nj}} \frac{H_k(\bar{q}_{nj}x)}{H'_k(\bar{q}_{nj}a)} \right) T_j(\beta_{nj}y). \end{aligned}$$

АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Следуя теории бесконечных систем [20], запишем систему (12) в канонической форме при помощи замены переменных $Z_{2m-1} = Y_m, Z_{2m} = X_m$

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} Z_n \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (13)$$

Бесконечная система линейных алгебраических уравнений называется регулярной, если сумма модулей коэффициентов для любой строки системы меньше единицы; если же можно указать число θ , такое что

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}| \leq \theta < 1, \quad (14)$$

то систему называют вполне регулярной [20]. При выполнении условий регулярности (вполне регулярности) бесконечную систему можно рассматривать как функциональное уравнение в пространстве ограниченных последовательностей l_{∞} . Для таких систем при некоторых ограничениях на свободные члены [20] можно гарантировать существование ограниченного решения. Для вполне регулярных систем гарантируется также единственность ограниченного решения. Если указанное условие (14) выполняется с некоторого номера $m > N_R$, то бесконечная система называется квазирегулярной, и ее исследование можно свести к анализу конечной системы порядка N_R . Очевидно, что полученная система (12) не может быть вполне регулярной на всем диапазоне частот, так как в силу ее однородности это привело бы к наличию только нулевого (тривиального) решения.

Для исследования регулярности системы (12) используем известные значения рядов [21]

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n0}^2 + q^2} &= \frac{1}{q^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n/a)^2 + q^2} = \frac{a}{2q} \operatorname{cth} qa + \frac{1}{2q^2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n1}^2 + q^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi(n-1/2)/a)^2 + q^2} = \frac{a}{2q} \operatorname{th} qa. \end{aligned}$$

Объединяя эти формулы с учетом введенных обозначений, можно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{nk}^2 + q^2} = \frac{a}{2q} \frac{H_k(qa)}{H'_k(qa)} + \frac{1-k}{2q^2}. \quad (15)$$

Аналогично получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_{nj}^2 + p^2} = \frac{b}{2p} \frac{H_j(pb)}{H'_j(pb)} + \frac{1-j}{2p^2}. \quad (16)$$

В силу того, что коэффициенты системы (12) являются знакопеременными лишь для первых строк и столбцов бесконечной матрицы, ряды в

условиях регулярности (14) можно вычислить точно на основе формул (15), (16):

$$\begin{aligned}
 S_{2m-1} &= \sum_{n=1}^N (|M_{2m-1,n}| - M_{2m-1,n}) + \frac{2 - \delta_{j0}\delta_{1m}}{4a\sqrt{D_1D_2}|\Delta_m^1|} \times \\
 &\times \left\{ (D_1D_2 + 4D_{66}^2 - D_3^2)\beta_{mj}^2 \left(\frac{a}{\bar{q}_{mj}} \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{H'_k(\bar{q}_{mj}a)} + \frac{1-k}{\bar{q}_{mj}^2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(D_1D_2 + 4D_{66}^2 - D_3^2)\beta_{mj}^2 q_{mj}^2 - D_{12}D_1\Omega^4}{\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{a}{q_{mj}} \frac{H_k(q_{mj}a)}{H'_k(q_{mj}a)} - \frac{a}{\bar{q}_{mj}} \frac{H_k(\bar{q}_{mj}a)}{H'_k(\bar{q}_{mj}a)} + \frac{1-k}{q_{mj}\bar{q}_{mj}} (\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2) \right) \right\}, \\
 S_{2m} &= \sum_{n=1}^N (|M_{2m,n}| - M_{2m,n}) + \frac{2 - \delta_{k0}\delta_{1m}}{4b\sqrt{D_1D_2}|\Delta_m^1|} \times \\
 &\times \left\{ (D_1D_2 + 4D_{66}^2 - D_3^2)\alpha_{mk}^2 \left(\frac{b}{\bar{p}_{mk}} \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{H'_j(\bar{p}_{mk}b)} + \frac{1-j}{2\bar{p}_{mk}^2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(D_1D_2 + 4D_{66}^2 - D_3^2)\alpha_{mk}^2 \bar{p}_{mk}^2 - D_{12}D_1\Omega^4}{\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2} \times \right. \\
 &\quad \times \left(\frac{b}{p_{mk}} \frac{H_j(p_{mk}b)}{H'_j(p_{mk}b)} - \frac{b}{\bar{p}_{mk}} \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{H'_j(\bar{p}_{mk}b)} + \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1-j}{2p_{mk}\bar{p}_{mk}} (\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2) \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь номер $N = N(\Omega)$ выбирается таким образом, чтобы обеспечить положительность M_{mn} ($n > N$). Переходя к асимптотике при $m \rightarrow \infty$ и учитывая, что

$$\begin{aligned}
 \Delta_m^1 &= \frac{D_1D_2 + 4D_{66}\sqrt{D_1D_2} - D_{12}^2}{2\sqrt{2}\sqrt{D_2(D_3 + \sqrt{D_1D_2})}} \beta_{mj} + O\left(\frac{1}{\beta_{mj}}\right), \\
 \Delta_m^2 &= \frac{D_1D_2 + 4D_{66}\sqrt{D_1D_2} - D_{12}^2}{2\sqrt{2}\sqrt{D_1(D_3 + \sqrt{D_1D_2})}} \alpha_{mk} + O\left(\frac{1}{\alpha_{mk}}\right),
 \end{aligned}$$

получаем, что четные и нечетные суммы стремятся к одному и тому же постоянному пределу

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1} &= \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = \\
 &= \frac{D_1D_2 - D_{12}^2 - 4D_{66}D_{12}}{D_1D_2 - D_{12}^2 + 4D_{66}\sqrt{D_1D_2}} = \theta < 1. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Формула (17) указывает, что всегда найдется номер N_R , начиная с которого ряды в условиях регулярности становятся меньше единицы, то есть система (12) является квазирегулярной.

Заменой вида

$$Z_m = \sum_{l=1}^{N_R} \xi_m^l Z_l \quad (m > N_R) \tag{18}$$

бесконечная система сводится к совокупности вполне регулярных бесконечных систем относи-

тельно $\{\xi_m^l\}_{m=N_R+1}^\infty$ ($l = 1, 2, \dots, N_R$) с одинаковой матрицей:

$$\begin{aligned}
 \xi_m^l &= \sum_{n=N_R+1}^\infty M_{mn} \xi_n^l + M_{ml}, \tag{19} \\
 (m &= N_R + 1, N_R + 2, \dots).
 \end{aligned}$$

При этом из ограниченности свободных членов данных систем следует, что каждая из них имеет единственное ограниченное решение. Таким образом, вопрос о существовании ограниченного решения для исходной квазирегулярной системы (12) оказывается эквивалентен вопросу существования решения конечной системы относительно первых неизвестных $\{Z_m\}_{m=1}^{N_R}$, которую можно получить, подставив (18) в (13) при $m = 1, 2, \dots, N_R$:

$$Z_m = \sum_{n=1}^{N_R} Q_{mn} Z_n, \tag{20}$$

где $Q_{mn} = M_{mn} + \sum_{l=N_R+1}^\infty M_{ml} \xi_l^n$. Таким образом, равенство нулю определителя конечной системы (20) дает дисперсионное уравнение для определения собственных частот пластины:

$$\det \|\delta_{mn} - Q_{mn}\| = 0.$$

Для построения эффективного алгоритма решения систем (19) найдем аналитически асимптотику их решений. С этой целью проведем замену переменных вида

$$\xi_{2m-1}^l = D_1^{\frac{\lambda-1}{2}} \beta_{mj}^{-(2+\lambda)} y_m^l, \quad \xi_{2m}^l = D_2^{\frac{\lambda+1}{2}} \alpha_{mk}^{-(2+\lambda)} x_m^l,$$

где λ найдем из условия, что преобразованные системы

$$\begin{aligned}
 y_m^l &= \frac{\beta_{mj}^{2+\lambda}}{aD_1\Delta_m^1} \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{\lambda/4} \times \\
 &\times \sum_{n=N_R+1}^\infty \frac{(4D_{66}^2 + D_1D_2 - D_3^2)\beta_{mj}^2 \alpha_{nk}^{-\lambda} + D_{12}D_1\Omega^4 \alpha_{nk}^{-2-\lambda}}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} x_n^l + \\
 &+ \frac{M_{2m-1,l} \beta_{mj}^{2+\lambda}}{D_1^{1/2+\lambda/4}}, \quad x_m^l = \frac{\alpha_{mk}^{2+\lambda}}{b\Delta_m^2} \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\lambda/4} \times \tag{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\times \sum_{n=N_R+1}^\infty \frac{(4D_{66}^2 + D_1D_2 - D_3^2)\alpha_{mk}^2 \beta_{nj}^{-\lambda} + D_{12}D_1\Omega^4 \beta_{nj}^{-2-\lambda}}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} y_n^l + \\
 &+ \frac{M_{2m,l} \alpha_{mk}^{2+\lambda}}{D_2^{1/2+\lambda/4}}, \quad (2N_R = N_R; \quad m = N_R + 1, N_R + 2, \dots)
 \end{aligned}$$

удовлетворяют обобщению закона асимптотических выражений Б.М. Кояловича [9].

Таблица 1. Упругие характеристики некоторых материалов

Материал	$E_1 \times 10^{-5}$, кгс/см ²	$G \times 10^{-5}$, кгс/см ²	ν_{12}	ν_{21}
M_1 – стекло	0.7	0.28	0.25	0.25
M_2 – стеклотекстолит КАСТ-В	2.0	0.40	0.20	0.11
M_3 – эпоксидное стекло	0.61	0.12	0.23	0.09

При этом из условия ограниченности свободных членов систем (21) получаем, что $\lambda \in [0; 1)$. Для краткости опуская математическое доказательство, лишь отметим, что коэффициенты системы (21) удовлетворяют оценкам в условиях указанной теоремы для любого показателя $\lambda \in [0; 1)$. Однако обязательным условием существования общего ненулевого предела у решения каждой из систем (21)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_m^j = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m^j = K_j > 0$$

является тот факт, что данные системы должны оставаться регулярными, но уже не удовлетворять условию вполне регулярности, то есть ряды в условиях регулярности должны стремиться к единице снизу. Это и дает уравнение для вычисления λ .

Действительно, вычисляя на основе формулы Эйлера–Маклорена значение ряда

$$\begin{aligned} S_N^j(z) &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(n-1+j/2)^{-\lambda}}{(n-1+j/2)^2+z^2} = \\ &= \frac{(N+j/2)^{-1-\lambda}}{1+\lambda} {}_2F_1\left(1; \frac{1+\lambda}{2}, \frac{3+\lambda}{2}; -\left(\frac{z}{N+j/2}\right)^2\right) + \\ &+ \frac{(N+j/2)^{-\lambda}}{2((N+j/2)^2+z^2)} + \frac{\lambda(N+j/2)^{-\lambda-1}}{12((N+j/2)^2+z^2)} + \\ &+ \frac{(N+j/2)^{1-\lambda}}{6((N+j/2)^2+z^2)^2} - \frac{(N+j/2)^{1-\lambda}}{720((N+j/2)^2+z^2)^2} \times \\ &\times \left(\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{(N+j/2)^4} + \frac{6\lambda^2}{((N+j/2)^2+z^2)(N+j/2)^2} - \right. \\ &\left. - \frac{24(1-\lambda)}{((N+j/2)^2+z^2)^2} \right) \end{aligned}$$

и переходя к его асимптотике при $z \rightarrow \infty$:

$$S_N^j(z) = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi\lambda}{2}} \frac{1}{z^{1+\lambda}} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

получаем, что ряды в условиях регулярности (14) систем (21) стремятся снизу к значению

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{\sqrt{2^4 D_1 D_2}}{\sqrt{\sqrt{D_1 D_2} - D_3}} \frac{D_1 D_2 - D_{12}^2 - 4D_{66} D_{12}}{D_1 D_2 - D_{12}^2 + 4D_{66} \sqrt{D_1 D_2}} \times \\ &\times \frac{\sin\left(\frac{\lambda+1}{2} \arctg \sqrt{\frac{D_1 D_2}{D_3} - 1}\right)}{\cos \frac{\pi\lambda}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство

$$f(\lambda) = 1 \quad (22)$$

дает искомое уравнение для определения показателя λ .

В табл. 1 представлены упругие константы для стекла и стеклопластика. Для данных материалов в табл. 2 проиллюстрировано решение уравнения (22).

Известный степенной закон убывания решений систем (21) позволяет для нетривиального решения исходной бесконечной системы, согласно формуле (18), получить главный член асимптотики в форме

$$Y_m = \frac{KD_1^{\frac{\lambda+1}{2}}}{\beta_{mj}^{2+\lambda}}, \quad X_m = \frac{KD_2^{\frac{\lambda+1}{2}}}{\alpha_{mk}^{2+\lambda}} \quad (m \rightarrow \infty)$$

и свести решение исходной бесконечной системы (12) к нахождению нетривиального решения конечной системы относительно первых неизвестных $Y_1, X_1, Y_2, X_2, \dots, Y_N, X_N$ и предельной константы K . Таким образом, удается найти всю последовательность неизвестных коэффициентов в общем решении W_{kj} , что позволяет получить аналитическое решение поставленной задачи (1)–(3).

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предложенный подход был программно реализован для вычисления собственных частот и построения собственных форм прямоугольных

Таблица 2. Показатель λ в асимптотике решения

Материал	λ
M_1 – стекло	0.809211
M_2 – стеклотекстолит КАСТ-В	0.581107
M_3 – эпоксидное стекло	0.614004

Таблица 3. Первые собственные частоты $\mu = 4\Omega^2$ для квадратной изотропной пластины при $\nu = 0.3$

N	$N = 10$	[4]
1	13.4682	13.4728
2	19.5960	19.5961
3	24.2702	24.2702
4	34.8008	34.8011
5	61.0949	61.0932
6	63.6868	63.6870
7	69.2653	69.5020
8	77.1724	77.5897
9	105.461	105.463
10	117.108	117.109

ортотропных пластин. Как частный случай был рассмотрен случай изотропной пластины, для которого, как известно

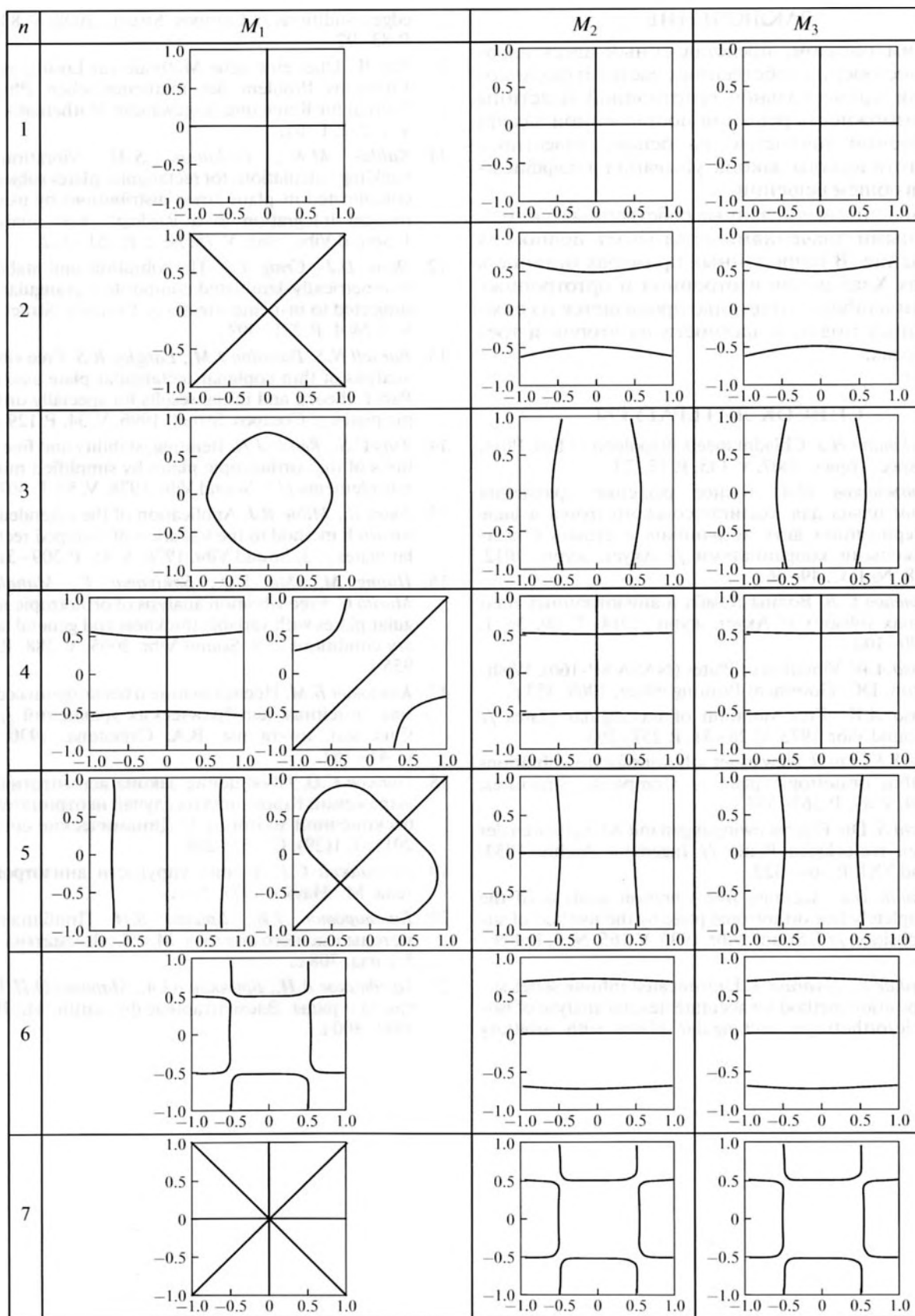
$$\nu = \nu_{12} = \nu_{21}; \quad E = E_1; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Прежде всего, было проведено сравнение с известными в литературе результатами, полученными на основе метода Рэлея–Ритца [4]. Для удобства сравнения в табл. 3 представлен частотный параметр $\mu = 4\Omega^2$. Практически все значения совпадают, за исключением 7 и 8 мод, которые являются кососимметричными по обеим координатам. Здесь отличие составляет около 0.5%. Данный факт, по-видимому, связан с более слабой сходимостью метода Рэлея–Ритца по выбранным нечетным функциям.

В табл. 4 представлены первые десять собственных частот для квадратных пластин из стекла и стеклопластика (см. табл. 1). На рисунке представлены соответствующие им фигуры Хладни – узловые линии собственных форм. При этом для квадратной пластины из изотропного материала M_1 собственным значениям, отвечающим модам, симметричным по одной из координат и кососимметричным по другой, соответствуют две собственные формы $W_{01}(x, y)$ и $W_{10}(x, y)$. Поэтому для данных собственных частот на рисунке приводятся две фигуры Хладни: первая соответствует форме $W_{01}(x, y)$, вторая соответствует $W_{10}(x, y)$ – $W_{10}(x, y)$. Заметим, что именно вторая фигура наиболее часто встречается в эксперименте. Из табл. 4 и рисунка следует, что во всех примерах фундаментальная частота соответствует кососимметричным по обеим координатам формам. При этом результаты для двух ортотропных материалов M_2 и M_3 оказываются более схожими между собой, чем результаты для изотропного материала M_1 . Это проявляется и в близости собственных частот, и в одинаковом характере фигур Хладни. Наибольшее отличие между изотропным и ортотропным материалами проявляется для симметричных мод, в частности, для второй и третьей мод. Хотя для всех трех материалов они имеют одинаковый характер симметрии, фигуры Хладни значительно различаются для изотропного материала M_1 и для двух ортотропных материалов M_2 и M_3 .

Таблица 4. Первые собственные частоты Ω для квадратной пластины

n	M_1	Симметрия	M_2	Симметрия	M_3	Симметрия
1	1.8645	(1, 1)	1.5916	(1, 1)	1.5832	(1, 1)
2	2.2434	(0, 0)	2.0213	(0, 0)	1.8792	(0, 0)
3	2.4503	(0, 0)	2.3683	(0, 0)	2.3653	(0, 0)
4	2.9834	(1, 0)/(0, 1)	2.5628	(1, 0)	2.4872	(1, 0)
5	3.9144	(1, 0)/(0, 1)	2.7436	(0, 1)	2.7349	(0, 1)
6	4.0316	(0, 0)	3.3787	(0, 1)	3.1388	(0, 1)
7	4.2093	(1, 1)	3.5314	(0, 0)	3.4892	(0, 0)
8	4.3988	(1, 1)	3.6937	(1, 1)	3.5140	(1, 1)
9	5.1780	(1, 0)/(0, 1)	3.9211	(1, 0)	3.9210	(1, 0)
10	5.4316	(0, 0)	4.1467	(1, 1)	4.1395	(1, 1)



Первые фигуры Хладни для квадратных пластин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, представленный здесь алгоритм построения собственных частот и форм колебаний прямоугольной ортотропной пластины дает возможность решения поставленной задачи с требуемой точностью на основе известного асимптотического закона убывания коэффициентов в общем решении.

Сравнение вычисленных собственных частот с известными значениями показывает полное их совпадение. В приведенных примерах отличие в фигурах Хладни для изотропной и ортотропных пластин наиболее отчетливо проявляется на симметричных модах, в частности на второй и третьей модах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stöckmann H.J.* Chladni meets Napoleon // *Eur. Phys. J.: Spec. Topics.* 2007. V. 145. P. 15–23.
2. *Сапожников О.А.* Точное решение уравнения Гельмгольца для квазигауссовского пучка в виде суперпозиции двух источников и стоков с комплексными координатами // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 1. С. 49–56.
3. *Кузнецов С.В.* Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор) // *Акуст. журн.* 2014. Т. 60. № 1. С. 90–100.
4. *Leissa A.W.* *Vibration of Plates (NASA SP-160).* Washington, DC: Government Printing office, 1969. 353 p.
5. *Leissa A.W.* Free vibration of rectangular plates // *J. Sound Vibr.* 1973. V. 26–31. P. 257–293.
6. *Xing Y.F., Liu B.* New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic plate // *Composite Structures.* 2009. V. 89. P. 567–574.
7. *Iguchi S.* Die Eigenschwingungen mit Klangfiguren der freien rechteckigen Platte // *Ingenieur Archiv.* 1953. Band XXI. P. 304–322.
8. *Gorman D.J.* Accurate free vibration analysis of the completely free orthotropic plate by the method of superposition // *J. Sound Vibr.* 1993. V. 165. № 3. P. 409–420.
9. *Bhaskar K., Sivaram A.* Untruncated infinite series superposition method for accurate flexural analysis of isotropic/orthotropic rectangular plates with arbitrary edge conditions // *Compos. Struct.* 2008. V. 83. № 1. P. 83–92.
10. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations Problem der mathematischen Physik // *Journal für Reine und Angewandte Mathematik.* 1909. V. 135. P. 1–61.
11. *Kaldas M.M., Dickinson S.M.* Vibration and buckling calculations for rectangular plates subjected to complicated in-plane stress distributions by using numerical integration in a Rayleigh–Ritz analysis // *J. Sound Vibr.* 1981. V. 75. № 2. P. 151–162.
12. *Dawe D.J., Craig T.J.* The vibration and stability of symmetrically-laminated composite rectangular plates subjected to in-plane stresses // *Compos. Struct.* 1986. V. 5. № 4. P. 281–307.
13. *Bardell N.S., Dunsdon J.M., Langley R.S.* Free vibration analysis of thin coplanar rectangular plate assemblies. Part I: theory, and initial results for specially orthotropic plates // *Compos. Struct.* 1996. V. 34. P. 129–143.
14. *Tsay C.S., Reddy J.N.* Bending, stability and free vibrations of thin orthotropic plates by simplified mixed finite elements // *J. Sound Vibr.* 1978. V. 59. P. 307–311.
15. *Jones R., Milne B.J.* Application of the extended Kantorovich method to the vibration of clamped rectangular plates // *J. Sound Vibr.* 1976. V. 45. P. 309–316.
16. *Huang M., Ma X.Q., Sakiyama T., Matuda H., Morita C.* Free vibration analysis of orthotropic rectangular plates with variable thickness and general boundary conditions // *J. Sound Vibr.* 2005. V. 288. P. 931–955.
17. *Коялович Б.М.* Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // *Изв. Физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова.* 1930. Т. 3. С. 41–167.
18. *Папков С.О.* Обобщение закона асимптотических выражений Кояловича на случай неотрицательной бесконечной матрицы // *Динамические системы.* 2011. Т. 1(29). С. 255–268.
19. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
20. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.–Л.: Физматгиз, 1962. 5-е изд. 708 с.
21. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.