АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2015, том 61, № 2, с. 161–164

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.16

О ВОЛНАХ ЛЭМБА В УПРУГИХ СЛОЯХ РОМБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

© 2015 г. С. К. Тлеукенов, А. Б. Айтбаев

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева

Казахстан, Астана, ул. Мунайтпасова 3

E-mail: tleukenov_sk@enu.kz

Поступила в редакцию 14.04.2014 г.

Аналитически получены уравнения дисперсии упругих волн вертикальной поляризации в слое ромбической анизотропии. Показано, что из этого уравнения следуют уравнения дисперсии симметричных и антисимметричных мод. В предельных случаях коротких и длинных волн получены условия существования волн Рэлея и предельные скорости для тонких слоев. Установлено, что для изотропных слоев эти скорости совпадают с известными их значениями.

Ключевые слова: волны Лэмба, дисперсия, ромбическая анизотропия, симметричные и антисимметричные моды.

DOI: 10.7868/S0320791915010141

ВВЕДЕНИЕ

Теория распространения волн Лэмба в изотропных слоях разработана в работе [1]. Волны Лэмба (Лэмба–Рэлея), наряду с волнами Рэлея и Лява, изучались в качестве основного механизма переноса сейсмической энергии при землетрясениях [2–4]. В настоящее время волны Лэмба широко используются в неразрушающей диагностике [5–7]. Характеристики волн Лэмба в анизотропных слоях имеют важное прикладное значение. Различные аспекты теории волн Лэмба исследовались в работах [8–10]. Современное состояние и обширную библиографию можно найти в содержательном обзоре [11]. В обзоре отмечено, что теоретические исследования основаны на численных расчетах и связаны с развитием различных вариантов шестимерного формализма Стро и Коши. Численные расчеты дисперсии волн Лэмба и поверхностных волн Рэлея проведены в работах [12, 13]. Низкочастотные приближения для определения нулевых мод нормальных волн в анизотропных пластинах рассмотрены в [14, 15]. Исследованиям дисперсионных уравнений волн Лэмба и Рэлея посвящены работы [16–20].

В данной работе получено аналитическое выражение для уравнений дисперсии волн сагиттальной поляризации в анизотропном слое ромбической симметрии на основе подхода, изложенного в работах [21–25].

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЯ

Уравнения движения упругой анизотропной среды ромбической симметрии при распространении волн вдоль плоскости (x, z) имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{k\ell}; \quad \varepsilon_{k\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial U_\ell}{\partial x_k}\right). \tag{2}$$

Тензор упругих модулей имеет элементы

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Элементы тензора записаны с использованием двухзнаковых обозначений:

$$(11) \to 1; \quad (22) \to 2; \quad (33) \to 3; \quad (23) \to 4; \quad (31) \to 5; \quad (12) \to 6.$$

Для системы уравнений (1), (2) используется представление решений искомых функций:

$$f(x,z,t) = f(z)\exp(i\omega t - imx). \tag{4}$$

Подстановка (4) в (1), (2) приводит ее к системе уравнений первого порядка [21, 22, 25]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU_z}{dz} &= \frac{1}{c_{33}}\sigma_{zz} + im\frac{c_{13}}{c_{33}}U_x, \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dz} &= -\rho\omega^2 U_z + im\sigma_{xz}, \\ \frac{dU_x}{dz} &= imU_z + \frac{1}{c_{55}}\sigma_{xz}, \\ \frac{d\sigma_{xz}}{dz} &= im\frac{c_{13}}{c_{33}}\sigma_{zz} + \left(m^2\left(c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right) - \rho\omega^2\right)U_x. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В матричной форме уравнения (5) имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{W}}{dz} = B\mathbf{W}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} \\ b_{31} & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & 0 \end{pmatrix}, \\
&\mathbf{W} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz})^t, \\
&b_{12} = \frac{1}{c_{33}}, \quad b_{13} = im\frac{c_{13}}{c_{33}}, \quad b_{21} = -\rho\omega^2, \\
&b_{24} = im, \quad b_{34} = \frac{1}{c_{55}}, \quad b_{43} = -\rho\omega^2 + m^2\left(c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

При постоянных значениях упругих модулей и плотности для системы уравнений (6) справедливо представление точного аналитического решения в форме матрицанта [21, 25]:

$$\begin{gathered}
T = \frac{1}{\aleph^2 - k^2} \times \\
\times\Big[\left(B^2 + \aleph^2 E\right)\cos kz - \left(B^2 + k^2 E\right)\cos\aleph z - \\
-\left(k^2 B + k^2\aleph^2 B^{-1}\right)\frac{\sin kz}{k} + \\
+\left(\aleph^2 B + k^2\aleph^2 B^{-1}\right)\frac{\sin\aleph z}{\aleph}\Big], \\
\mathbf{W}(z) = T\mathbf{W}(z_0).
\end{gathered} \quad (7)$$

Матрицант – нормированная матрица фундаментальных решений системы уравнений первого порядка [26]. Матрицант T удовлетворяет уравнению (6):

$$\frac{dT}{dz} = BT, \quad \frac{d\mathbf{W}}{dz} = \frac{dT}{dz}\mathbf{W}_0 = BT\mathbf{W}_0 = B\mathbf{W}. \quad (8)$$

Представление матрицанта (7) получено на основе усреднения аналитического представления матрицанта периодически-неоднородного слоя с использованием полиномов Чебышева–Гегенбауэра [23, 24]. Усреднение означает предельный переход при $\lambda \gg l$ (λ – длина волны, l – период неоднородности) к однородной среде. Результат (7) непосредственно следует из свойств полиномов Чебышева–Гегенбауэра [21, 25]. В (7) k и $\aleph$ определяются из условия

$$\left.\begin{aligned}
&\det\left[B^2 + \lambda^2 E\right] = 0, \ \lambda_1^2 = k^2, \lambda_2^2 = \aleph^2, \\
&\lambda^4 + \left(k^2 + \aleph^2\right)\lambda^2 + k^2\aleph^2 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

и являются компонентами волновых векторов P и SV волн вдоль оси z.

УРАВНЕНИЯ ДИСПЕРСИИ

Рассматриваются классические граничные условия – обе границы плоскопараллельного слоя свободны:

$$\sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0 \text{ при } z = 0, \quad z = H. \quad (10)$$

Ось z перпендикулярна граничным плоскостям слоя. Подстановка (10) в (7) приводит к однородному матричному уравнению:

$$\begin{gathered}
\mathbf{W}(H) = T\mathbf{W}(0), \quad \mathbf{W}(0) = (U_z, 0, U_x, 0)_0^t, \\
\mathbf{W}(H) = (U_z, 0, U_x, 0)_H^t.
\end{gathered} \quad (11)$$

Из (11) следует общий вид уравнения дисперсии волн в анизотропном слое:

$$\begin{pmatrix} t_{21} & t_{23} \\ t_{23} & t_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_z \\ U_x \end{pmatrix} = 0 \to t_{21}t_{43} - t_{23}^2 = 0, \quad t_{41} = t_{23}. \quad (12)$$

Элементы t_{ij} имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&t_{21} = -\frac{1}{\aleph^2 - k^2}\left(k^2 b_{21} + \Delta_2^2 b_{43}\right)\frac{\sin kH}{k} + \\
&+ \frac{1}{\aleph^2 - k^2}\left(\aleph^2 b_{21} + \Delta_2^2 b_{43}\right)\frac{\sin\aleph H}{\aleph}, \\
&t_{43} = -\frac{1}{\aleph^2 - k^2}\left(k^2 b_{43} + \Delta_1^2 b_{21}\right)\frac{\sin kH}{k} + \\
&+ \frac{1}{\aleph^2 - k^2}\left(\aleph^2 b_{43} + \Delta_1^2 b_{21}\right)\frac{\sin\aleph H}{\aleph}, \\
&t_{23} = t_{41} = \frac{1}{\aleph^2 - k^2}\beta_{23}\left(\cos kH - \cos\aleph H\right).
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\begin{gathered}
\beta_{23} = b_{21}b_{31} + b_{24}b_{43}; \quad \Delta_1^2 = b_{12}b_{43} - b_{31}^2; \\
\Delta_2^2 = b_{21}b_{34} - b_{42}^2.
\end{gathered}$$

Явный вид уравнения дисперсии упругих волн следует из (12) при подстановке (13):

$$\begin{gathered}
[4k^2\aleph^2 b_{21}b_{43} + (k^2 + \aleph^2)(\Delta_2^2 b_{43}^2 + \Delta_1^2 b_{21}^2) \times \\
\times \sin kH \sin\aleph H + \\
+ 2k\aleph\beta_{23}^2(1 - \cos kH\cos\aleph H)] = 0.
\end{gathered} \quad (14)$$

Если в (14) положить $H = 2h$, то оно приводится к виду

$$\begin{gathered}
\mathrm{tg}^2 kh + \mathrm{tg}^2\aleph h - \\
-\frac{\left(k^2 + \aleph^2\right)\left(\Delta_1 b_{21} + \Delta_2 b_{43}\right)^2 - 2\Delta_1\Delta_2 b_{21}b_{43}(k - \aleph)^2}{k\aleph\left[\left(b_{21}\Delta_1 + b_{43}\Delta_2\right)^2 + b_{21}b_{43}(k - \aleph)^2\right]} \times \\
\times \mathrm{tg}kh\,\mathrm{tg}\aleph h = 0.
\end{gathered} \quad (15)$$

Из (15) следует квадратное уравнение

$$\frac{\mathrm{tg}^2\aleph h}{\mathrm{tg}^2 kh} - a\frac{\mathrm{tg}\aleph h}{\mathrm{tg}kh} + 1 = 0, \quad (16)$$

a – коэффициент при $\mathrm{tg}kh\,\mathrm{tg}\aleph h$ в (15).

Решение квадратного уравнения в (16) приводит к двум уравнениям:

$$\frac{\mathrm{tg}\aleph h}{\mathrm{tg}kh} = \frac{\aleph\Delta_1 b_{21} + k\Delta_2 b_{43}}{k\Delta_1 b_{21} + \aleph\Delta_2 b_{43}} \quad (17)$$

и

$$\frac{\mathrm{tg}\aleph h}{\mathrm{tg}kh} = \frac{k\Delta_1 b_{21} + \aleph\Delta_2 b_{43}}{\aleph\Delta_1 b_{21} + k\Delta_2 b_{43}}. \quad (18)$$

Уравнение (17) определяет дисперсию симметричных мод, а (18) – антисимметричных мод Лэмба в анизотропном слое.

ПРЯМОЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЙ (17), (18)

Уравнения дисперсии симметричных и антисимметричных мод Лэмба могут быть получены непосредственно, если использовать условия относительно компонент напряжения и смещений на срединной плоскости. В случае симметричных мод Лэмба на срединной плоскости должны выполняться условия

$$\mathbf{W}_{\text{ср.пл}} = (0, \sigma_{zz}, U_x, 0)^t;\ \ z = h, \tag{19}$$

т.е. на срединной плоскости обращают в ноль U_z и σ_{xz}.

Учет (19) приводит к матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} U_z \\ 0 \\ U_x \\ 0 \end{pmatrix}_h = T \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ 0 \end{pmatrix}_0 \to \begin{vmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{42} & t_{43} \end{vmatrix} = 0, \tag{20}$$

откуда следует искомое уравнение:

$$t_{22}t_{43} - t_{23}t_{42} = 0. \tag{21}$$

Подстановка в (21) элементов t_{ij} из (7) дает явный вид:

$$\begin{gathered} k\left(\aleph^2 b_{43} + \Delta_1^2 b_{21}\right)\sin\aleph h\cos kh = \\ = \aleph\left(k^2 b_{43} + \Delta_1^2 b_{21}\right)\sin kh\cos\aleph h, \end{gathered} \tag{22}$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}\aleph h}{\operatorname{tg}kh} = \frac{\aleph\Delta_1 b_{21} + k\Delta_2 b_{43}}{k\Delta_1 b_{21} + \aleph\Delta_2 b_{43}}, \tag{23}$$

что совпадает с (17). При выводе (23) из (22) учтено, что $k\aleph = \Delta_1\Delta_2$.

При определении уравнения дисперсии антисимметричных мод (18) на срединной плоскости вектор $\mathbf{W}$ принимается в виде

$$\begin{gathered} \mathbf{W} = (U_z, 0, 0, \sigma_{xz}),\ \ \text{т.е.}\ \ U_x = 0 \\ \text{и}\ \sigma_{zz} = 0,\ \ z = h. \end{gathered} \tag{24}$$

Вычисления, аналогичные симметричному случаю, приводят к уравнению (18).

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СКОРОСТИ

Из уравнений (17), (18) при $kh, \aleph h \to \infty$ следуют условия существования волн Рэлея. Для этого необходимо учесть, что для поверхностных волн

$$\aleph \to -i|\aleph|,\ \ k \to -i|k|. \tag{25}$$

Соотношения (25) отражают то, что скорость волн Рэлея меньше скорости объемных волн.

При $|k|h, |\aleph|h \to \infty\ \lim_{x\to\infty} \operatorname{th} x = 1$. Из (17), (18) получим

$$|\aleph|\Delta_1 b_{21} + |k|\Delta_2 b_{43} = |k|\Delta_1 b_{21} + |\aleph|\Delta_2 b_{43},$$

откуда

$$(|\aleph| - |k|)(\Delta_1 b_{21} - \Delta_2 b_{43}) = 0. \tag{26}$$

Из (26) следует искомое условие существования волн Рэлея [25]:

$$b_{21} - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} b_{43} = 0. \tag{27}$$

При $kh, \aleph h \to 0$ в случае уравнения (17) для симметричных мод имеет место

$$\Delta_2 b_{43} = 0,\ \ \Delta_2 = 0,\ \ b_{43} = 0, \tag{28}$$

откуда следуют предельные скорости:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 = 0 \to c_{\text{пр}}^2 = \frac{c_{55}}{\rho}, \\ b_{43} = 0 \to c_{\text{пр}2}^2 = \frac{c_{11}}{\rho}\left(1 - \frac{c_{13}^2}{c_{11}c_{33}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Для изотропной среды из (28) следуют известные значения предельных скоростей:

$$c_{\text{пр}1}^2 = \frac{\mu}{\rho},\ \ c_{\text{пр}2}^2 = \frac{4\mu}{\rho}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right) = 4c_t^2\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right). \tag{30}$$

В случае антисимметричных мод, при $kh \to 0$, $\aleph h \to 0$, с учетом разложения тангенса

$$\operatorname{tg}x \cong x + \frac{x^3}{3};\ \ x \ll 1, \tag{31}$$

уравнение (18) приводится к виду

$$1 + \frac{h^2}{3}\left(\aleph^2 + k^2 + \Delta_2^2\frac{b_{43}}{b_{21}}\right) = 0,\ \ \Delta_1^2 = 0. \tag{32}$$

Из второго условия получим

$$\vartheta_{1\text{пр}}^2 = \frac{c_{11}}{\rho}. \tag{33}$$

Это предельная скорость для антисимметричных мод, не зависящая от частоты и толщины пластины.

Из первого условия имеем $\left(\frac{h}{\lambda} \to 0\right)$:

$$\vartheta_{2\text{пр}}^2 = \sqrt{\frac{4}{3}}\frac{\omega h c_{\text{пр}2}}{2},\ \ c_{\text{пр}2}^2 = \frac{c_{11}}{\rho}\left(1 - \frac{c_{13}^2}{c_{11}c_{33}}\right). \tag{34}$$

Для изотропных сред из (32) и (34) следуют классические формулы [27, 28]:

$$\vartheta_{2\text{пр}}^2 = \sqrt[2]{\frac{4}{3}}\omega h\frac{c_{\text{пр}2}}{2},\ \ c_{\text{пр}2}^2 = \frac{4\mu}{\rho}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right). \tag{35}$$

или

$$\vartheta_{2\text{пр}}^2 = \sqrt{\frac{4}{3}}\omega h c_t\sqrt{1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}};\ \ c_t^2 = \frac{\mu}{\rho};\ \ c_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}. \tag{36}$$

ВЫВОДЫ

Из полученных уравнений дисперсии следуют уравнения дисперсии волн Лэмба в анизотропных слоях более высокой симметрии, т.е. для различных классов кубической, гексагональной, тетрагональной сингонии при соответствующей замене упругих параметров.

Получено уравнение дисперсии волн вертикальной поляризации в анизотропном слое ромбической симметрии. Показано, что из уравнения дисперсии волн для слоя следуют уравнения дисперсии симметричных и антисимметричных мод Лэмба. В предельных случаях из этих уравнений получены условия существования волн Рэлея и предельные скорости волн в тонких пластинах для симметричных и антисимметричных мод Лэмба. Установлено, что в случае изотропной среды они дают известные значения этих скоростей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lamb H.* On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc. A. 1917. V. 93. P. 114–128.
2. *Aki K., Richards P.G.* Quantitative Seismology. Theory and Methods. N.Y.: W.H. Freeman and Company, 2002. 700 p.
3. *Ben-Menahem A., Singh S.J.* Seismic Waves and Sources. Dover Publications, 2012. 2nd ed. 1102 p.
4. *Chapman C.* Fundamentals of Seismic Wave Propagation. N.Y.: Cambridge University Press, 2010. 608 p.
5. *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 168 с.
6. *Викторов И.А.* Ультразвуковые волны Лэмба. Обзор // Акуст. журн. 1965. Т. 11. № 1. С. 1–18.
7. *Royer D., Dieulesaint E.* Elastic Waves in Solids. 1. Free and Guided Propagation. N.Y.: Springer, 2009. 2nd ed. 374 p.
8. *Голубев Е.В., Гуревич С.Ю., Петров Ю.В.* К теории возбуждения волн Лэмба в металлах импульсным лазерным излучением // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 5. С. 600–606.
9. *Лапин А.Д.* Отражение волн Лэмба в твердом слое решеткой механических резонаторов // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 307–311.
10. *Чуприн В.А.* Экспериментальные исследования характеристик акустического поля нулевых нормальных мод колебаний тонких пластин // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 1. С. 122–133.
11. *Кузнецов С.В.* Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор) // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 1. С. 90–100.
12. *Подлипенец А.Н.* Распространение гармонических волн в ортотропных материалах с периодической структурой // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 7. С. 20–24.
13. *Подлипенец А.Н., Шульга Н.А.* Численное исследование распространения волн Рэлея и Лэмба в ортотропных периодических структурах // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 11. С. 3–8.
14. *Маркус С. А.* Низкочастотные приближения для нулевых мод нормальных волн в анизотропных пластинах // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 6. С. 1091–1095.
15. *Newman E.G., Mindlin R.D.* Vibrations of a monoclinic crystal plate // J. Acoust. Soc. Am. 1957. V. 29. № 11. P. 1206–1218.
16. *Никифоренко Ж.Г., Бобров В.Т., Авербух И.И.* Распространение волн Лэмба в анизотропных листах // Дефектоскопия. 1972. № 5. С. 56–63.
17. *Маркус С.А., Каплан М.Д., Веремеенко С.В.* Распространение нормальных волн в ортотропных пластинах // Дефектоскопия. 1985. № 11. С. 3.
18. *Свекло В.А.* Плоские волны и волны Релея в анизотропной среде // Докл. АН СССР. 1948. Т. 59. № 5. С. 871–874.
19. *Stoneley R.* The propagation of surface waves in an elastic medium with orthorhombic symmetry // Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 1963. V. 8. № 2. P. 176–186.
20. *Chadwick P.* The existence of pure surface modes in elastic materials with orthorhombic symmetry // J. Sound Vibr. 1976. V. 47. № 1. P. 39–52.
21. *Тлеукенов С.К.* Метод матриканта. Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. № 4. 148 с.
22. *Тлеукенов С.К.* Волновые процессы и метод матриканта // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. 2011. Т. 83. № 4. С. 68–74.
23. *Tleukenov S.K.* Characteristic matrix of a periodically inhomogeneous layer // J. Sov. Math. 1990. V. 50. № 6. P. 2058–2062.
24. *Тлеукенов С.К.* О характеристической матрице периодически неоднородного слоя // Математические вопросы теории распространения волн. Зап. научн. сем. ЛОМИ АН СССР. 1987. Т. 165. С. 177–181.
25. *Тлеукенов С.К.* Метод матриканта. Распространение волн в анизотропных средах. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. 157 с.
26. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
27. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 337 с.
28. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.