

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ВНУТРЕННЯЯ ЗАДАЧА ЛЭМБА:
ВОЛНЫ В ЭПИЦЕНТРАЛЬНОЙ ЗОНЕ
ОТ ВЕРТИКАЛЬНОГО СИЛОВОГО ИСТОЧНИКА

© 2015 г. С. В. Кузнецов*, Е. О. Терентьева**

*Институт проблем механики РАН

119526 Москва, просп. Вернадского 101, корп. 1

E-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

**Московский государственный строительный университет

129337 Москва, Ярославское ш. 26

E-mail: xelena-elena@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.03.2014 г.

Анализируются волновые поля в эпицентральной зоне для внутренней задачи Лэмба о действии сосредоточенной силы внутри упругой полуплоскости. Проводится сравнение решений, полученных с помощью интегральных представлений, методов геометрической оптики и конечноэлементных аппроксимаций.

Ключевые слова: Задача Лэмба, поверхностные волны, исчезающие волны, эпицентр.

DOI: 10.7868/S0320791915030119

1. ВВЕДЕНИЕ

Ниже анализируются методы, применяемые при решении внутренней задачи Лэмба о динамическом действии сосредоточенных силовых особенностей, расположенных внутри упругой полуплоскости или полупространства. Рассматриваются, в основном, решения для изотропного и однородного полупространства или полуплоскости.

1.1. Постановка задач и метод Лэмба

В [1] Лэмб рассмотрел две внешние задачи о распространении волн в изотропном упругом полупространстве и изотропной упругой полуплоскости от сосредоточенного силового воздействия, приложенного нормально к свободной границе. В этой работе были рассмотрены также две внутренние задачи о волнах в упругом полупространстве и полуплоскости, вызванные центром расширения, находящимся на некоторой глубине под поверхностью. Решение этих задач в [1] было сведено к интегральным уравнениям относительно скалярного и векторного потенциалов. В [2] внутренняя и внешняя задачи были обобщены на случай сосредоточенных нагрузок, движущихся с постоянной скоростью.

Надо отметить, что в [1, 2] в случае произвольных по времени нагрузок замкнутое решение удалось построить лишь в пространстве изображений (по Фурье для пространственных перемен-

ных и по Лапласу для временной переменной). С помощью асимптотических оценок в [1] было показано, что в случае внешних плоской и пространственной задач основной вклад в поле смещений на свободной поверхности вносят рэлеевские волны. Помимо этого, в [1] было получено аналитическое решение для плоской внешней задачи в случае нормальной к границе сосредоточенной нагрузки, изменение во времени которой описывается ядром Пуассона.

Кроме того, в [1] было показано, что в случае гармонического источника при решении внешней задачи магнитуды рэлеевских волн на свободной поверхности на достаточном удалении от эпицентра в случае плоской задачи не зависят от $|rx|$, а в случае трехмерной задачи убывают пропорционально $|rx|^{-1/2}$, где $|x|$ — расстояние от эпицентра, а r — волновое число. Далее, в той же работе с помощью асимптотических оценок было найдено, что наряду с волнами Рэлея точечный источник вызывает появление объемных продольных (P) и поперечных (S) волн.

Заметим, что при распространении объемных волн, порожденных точечным гармоническим источником в безграничной среде, убывание их магнитуд происходит быстрее. Например, в случае плоской задачи магнитуда убывает как $|rx|^{-1/2}$, а в случае трехмерной задачи, как $|rx|^{-1}$ [3]. Таким образом, в [1] впервые было дано теоретическое

обоснование утверждения Рэлея [4] о том, что поверхностные (рэлеевские) волны убывают медленнее объемных волн с увеличением расстояния от источника.

Для построения решений как внутренней, так и внешней задач Лэмба уравнения движения Навье в [1, 2] записывались в форме Ламе–Клапейрона [5, Sect. 59]:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} + \mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \quad (1)$$

где λ и μ – константы Ламе, \mathbf{u} – поле перемещений, \mathbf{b} – поле массовых сил, ρ – плотность среды. Для массовых сил использовалось представление Гельмгольца [5, Sect. 67]

$$\mathbf{b} = -\nabla\alpha - \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}, \quad (2)$$

где α и $\boldsymbol{\beta}$ – скалярный и векторный потенциалы, и аналогичное представление [5, Sect. 67] для поля перемещений

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}, \quad (3)$$

где φ – скалярный, а $\boldsymbol{\psi}$ – векторный потенциалы. Представление (3) аналогично представлению Папковича–Нейбера для поля перемещений при решении уравнений статики. В качестве начальных условий в [1, 2] рассматривались однородные условия вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = 0, \quad \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Подстановка представлений (2), (3) в уравнения движения и применение преобразования Фурье по временной переменной (или предположение о гармоническом изменении во времени нагрузки) позволили свести уравнения движения к неоднородным уравнениям Гельмгольца для скалярного и векторного потенциалов:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_1^2}\right)\varphi' = \frac{1}{\lambda + 2\mu}\alpha', \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)\boldsymbol{\psi}' = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{\beta}'. \quad (5)$$

Штрихи у потенциалов в (5) означают освобождение от гармонического множителя $e^{i\omega t}$. При получении уравнений (5) использовались три легко проверяемых тождества [5, Sect. 5]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi} &= -\operatorname{rot}\Delta\boldsymbol{\psi}, \\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi} &= 0, \quad \operatorname{rot}\nabla\varphi = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

На внешней поверхности Π_v полупространства или полуплоскости задавались условия второй краевой задачи (в напряжениях)

$$\mathbf{t}_v \equiv (\lambda\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{v} = p(\mathbf{x}', t)\mathbf{v}, \quad \mathbf{x}' \in \Pi_v, \quad (7)$$

где \mathbf{v} – вектор единичной внешней нормали к плоской границе; \mathbf{I} – единичная диагональная матрица, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор (малых) деформаций; p – нагрузка на свободной поверхности.

Далее, для внешней задачи Лэмба массовая сила \mathbf{b} в (1) и соответствующие потенциалы в (2) принимались равными нулю. В этом случае граничные условия (4), записанные в терминах потенциалов (5), имели вид

$$\begin{aligned} &\left(\lambda\Delta\varphi'_0\mathbf{I} + 2\mu\left(\nabla\nabla\varphi'_0 + \frac{1}{2}\left(\nabla\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}'_0 + \left(\nabla\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}'_0\right)'\right)\right)\right) \times \\ &\quad \times \mathbf{v} = p(\mathbf{x}', t)\mathbf{v}, \quad \mathbf{x}' \in \Pi_v. \end{aligned} \quad (8)$$

В уравнениях (8) потенциалы φ'_0 и $\boldsymbol{\psi}'_0$ отвечают однородным решениям уравнений (5).

В случае внутренней задачи Лэмба массовые силы в (1), (2) задавались градиентом только скалярного потенциала $\nabla\alpha$, поскольку в [1, 2] рассматривалось только решение осесимметричной задачи о центре дилатации. Если обозначить через φ'_α скалярный потенциал в (5), отвечающий потенциалу α' , а через φ'_0 и $\boldsymbol{\psi}'_0$ – соответствующие потенциалы, отвечающие однородным уравнениям (5), условия (7) принимают вид

$$\begin{aligned} &\left(\lambda\Delta\varphi'_\alpha\mathbf{I} + 2\mu\nabla\nabla\varphi'_\alpha + \lambda\Delta\varphi'_0\mathbf{I} + 2\mu\left(\nabla\nabla\varphi'_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\left(\nabla\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}'_0 + \left(\nabla\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}'_0\right)'\right)\right)\right) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x}' \in \Pi_v. \end{aligned} \quad (9)$$

Для построения решения пространственного уравнения Гельмгольца в [1, 2] использовалось фундаментальное решение уравнения Гельмгольца:

$$\varphi' = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}'|} e^{i r_1 |\mathbf{x}'|}, \quad r_1 = \frac{\omega}{c_1}. \quad (10)$$

Аналогичный вид имеет фундаментальное решение $\boldsymbol{\psi}'$ векторного уравнения Гельмгольца с заменой r_1 на r_2 и c_1 на c_2 , где c_1 и c_2 – скорости продольной и поперечной объемных волн соответственно:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_R = \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu} c_2. \quad (11)$$

В (11) ν – коэффициент Пуассона, а c_R – скорость волны Рэлея, вычисляемая по приближенной формуле Бергманна–Викторова, впервые полученной в [64].

В плоском случае фундаментальное решение скалярного уравнения Гельмгольца представимо в виде

$$\varphi' = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(r_1 |\mathbf{x}'|), \quad r_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad (12)$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ганкеля первого рода нулевого порядка. Аналогичный вид имеет фундаментальное решение $\boldsymbol{\psi}'$ для векторного уравнения. При решении задачи с нагрузкой, произвольно зависящей от времени, круговая частота ω в выражениях (10), (12) заменялась на параметр преобразования Фурье (или комплексный параметр преобразования Лапласа).

Далее, в работах Лэмба [1, 2] осуществлялось решение граничных задач (8), (9) с помощью интегральных преобразований по пространственным и временной переменной. Надо отметить, что обратить полученные интегральные пред-

ставления оказалось весьма непросто: в замкнутом виде решение удалось получить лишь для гармонической нагрузки. В случае произвольной зависимости от времени замкнутое решение было получено в пространстве изображений, точнее, решение на поверхности было представлено в виде несобственного интеграла от некоторой алгебраической функции.

1.2. Метод Лэмба, асимптотические оценки

В дальнейшем представления Гельмгольца (2), (3) и потенциалы Ламе–Грина (3) использовались в большинстве подходов, связанных с решением внутренней и внешней задач Лэмба, однако техника вычисления сингулярных интегралов, появляющихся при сужении потенциалов на граничную поверхность, менялась. В [6, 7] с помощью комбинации методов наискорейшего спуска и стационарной фазы при обращении интегральных уравнений были получены асимптотические оценки (при больших x/h , где x – расстояние от эпицентра, h – глубина источника) для компонент перемещений на границе полуплоскости для некоторых внутренних и внешних задач, обобщающих задачу Лэмба, например в [6] рассматривалась нагрузка под произвольным углом к поверхности.

Особый интерес представляет работа [7], где исследовалась плоская внутренняя задача о действии сосредоточенной силовой особенности в виде центра расширения. В этой работе рассматривалось два вида нагрузок: гармоническая и меняющаяся во времени по закону, задаваемому функцией Хэвисайда. С помощью асимптотических оценок было найдено, что в случае гармонической нагрузки рэлеевские волны не возникают вблизи от эпицентра. Точнее, на расстояниях d_1 , удовлетворяющих условию

$$d_1 < \frac{c_R H}{\sqrt{c_1^2 - c_R^2}}, \quad (13)$$

где c_R – скорость волны Рэлея, а H – глубина источника, – рэлеевских волн нет. На более удаленных от эпицентра расстояниях рэлеевские волны появляются, однако вплоть до расстояния

$$d_2 < \frac{c_R H}{\sqrt{c_2^2 - c_R^2}} \quad (14)$$

объемные волны доминируют. При выводе оценки (13) сделано упрощающее предположение о том, что обе объемные волны, а также рэлеевская волна распространяются независимо друг от друга. Отсутствие рэлеевских волн в эпицентральной зоне, удовлетворяющей оценке (13), объяснялось интерференцией с объемными волнами, полностью поглощающими рэлеевскую волну. Приближенные оценки, аналогичные [7], получены в [8] для внутренней плоской задачи Лэмба и центра

расширения, меняющегося во времени по закону, задаваемому функцией Хэвисайда. Несмотря на асимптотическую природу оценок (13), (14), они весьма часто применяются при исследовании волновых процессов вблизи эпицентров.

Еще одна особенность, связанная с эпицентральной зоной, состоит в обнаружении в [7] исчезающей (evanescent) волны, называемой также *SP*-волной. Для определения момента возникновения этой волны запишем закон Снелла на свободной поверхности для падающей *S*-волны и отраженной *P*-волны:

$$\frac{\sin \theta_2}{c_2} = \frac{\sin \theta_1}{c_1}, \quad (15)$$

где θ_2 – угол между вертикалью и лучом падающей *S*-волны, а θ_1 – угол между вертикалью и лучом отраженной *P*-волны. При $\theta_1 = 90^\circ$ и соответствующем критическом угле $\theta_2 = \theta_{SP}$, определяемом из (15)

$$\theta_{SP} = \arcsin \frac{c_2}{c_1}, \quad (16)$$

вдоль свободной поверхности со скоростью c_1 начинает распространяться продольная *SP*-волна. Расстояние от эпицентра, при котором должна обнаруживаться *SP*-волна, дается формулой

$$d_3 > H \operatorname{tg} \theta_{SP} = \frac{c_2 H}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}}. \quad (17)$$

Несложный вывод для определения критического угла θ_{SP} и соответствующего расстояния d_3 с помощью лучевого метода ($\omega \rightarrow \infty$), по-видимому, впервые, дан в [17].

В случае гармонической нагрузки в [7] была обнаружена еще одна исчезающая “негеометрическая” волна, названная *PS*-волной. В отличие от *SP*-волны, *PS*-волна распространяется вдоль свободной поверхности со скоростью c_2 . Кроме того, в [7] было обнаружено, что при переходе от гармонической нагрузки к временной, заданной в виде функции Хэвисайда, “негеометрическая” *PS*-волна исчезает. Заметим, что применение лучевых методов в сочетании с законом Снелла не позволяет определить *PS*-волну, см. также [17].

1.3. Метод Каньяра

В [9–11] для вычисления сингулярных интегралов, связанных с обращением преобразования Лапласа в задачах Лэмба, предложен особый путь интегрирования, связанный с деформацией контура интегрирования. В [12] с помощью метода Каньяра для центра расширения, изменяющегося во времени как функция Хэвисайда, удалось в замкнутом виде получить перемещения на поверхности упругой полуплоскости:

$$u_x(\xi, 0, \tau) = -\frac{2\pi}{1+\xi^2} \frac{c_1}{h} \operatorname{Im} \left(F_1[\alpha, w] \left(-i\xi^2 + \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}} \right) \right),$$

$$u_z(\xi, 0, \tau) = \frac{c_1}{h} \left[-\frac{\tau}{(1+\xi^2)\sqrt{\tau^2-1}} + \right. \quad (18)$$

$$\left. + \frac{2\alpha^2}{1+\xi^2} \operatorname{Re} \left(F_2[\alpha, w] \left(-i\xi^2 + \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}} \right) \right) \right],$$

где u_x и u_z – горизонтальная и вертикальная компоненты перемещений соответственно, $\xi = x/H$, $\tau = tc_1/\sqrt{h^2+x^2}$ – безразмерное время; $\alpha = c_2/c_1$ и

$$w = (-i\xi\tau + (\tau^2-1)^{1/2})(1+\xi^2)^{-1/2},$$

$$F_1[\alpha, w] = \frac{w(\alpha^2 w^2 + 1)^{1/2}}{\Delta(\alpha, w)}, \quad (19)$$

$$F_2[\alpha, w] = \frac{w^2(1+2\alpha^2 w^2) - 2\alpha(w^2+1)^{1/2}(\alpha^2 w^2+1)^{1/2}}{\Delta(\alpha, w)},$$

$$\Delta(\alpha, w) = (1+2\alpha^2 w^2)^2 - 4\alpha^3 w^2(\alpha^2 w^2+1)^{1/2}(w^2+1)^{1/2}.$$

При выводе (18), (19) предполагалось, что $\tau > 1$. В приведенных выше выражениях (18), (19) использовались обозначения, введенные в [13, 14].

Вычисления по формулам (18), (19) при значениях коэффициента Пуассона $\nu = 0; 0.25; 0.4$ показали [12–14], что в исследованных случаях SP -волны не обнаруживаются. В [15] дано обобщение метода [12] на случай источника в виде центра расширения, расположенного в упругой полуплоскости и со слоем жидкости над ней.

1.4. Метод Пекериса

В [16–20] Пекерис упростил вычисление интегралов, связанных с обращением интегральных преобразований в методе Лэмба, за счет изменения порядка интегрирования, – это позволило получить решения на поверхности для внутренней и внешней задач Лэмба для нагрузок, заданных в виде временной функции Хэвисайда, и, в отличие от [12–15], где решение внутренней задачи Лэмба дано для случая центра расширения, найти решение для внутренней задачи Лэмба для источника в виде вертикальной сосредоточенной силы.

Для сосредоточенной силы, действующей на поверхности [16] и внутри [17, 18] упругого полупространства, получено (весьма громоздкое) замкнутое решение для вертикальной компоненты перемещений и выражение, содержащее эллиптические интегралы, для горизонтальной компоненты. В [19, 20] результаты работ [17, 18] обобщены на другие виды нагрузок и, в частности, на центр сдвига, расположенный на некоторой глубине в упругом полупространстве.

Надо отметить принципиальное отличие внутренней задачи Лэмба для сосредоточенной силы от рассмотренной в предыдущем разделе задачи о центре расширения [12–15]: в случае сосредоточенной силы возникает необходимость учета потенциала Ψ'_β в граничных уравнениях в потенциалах:

$$\left[\lambda \Delta \varphi'_\alpha \mathbf{I} + 2\mu \left(\nabla \nabla \varphi'_\alpha + \frac{1}{2} \left(\nabla \operatorname{rot} \Psi'_\beta + \left(\nabla \operatorname{rot} \Psi'_\beta \right)' \right) \right) \right] +$$

$$+ \lambda \Delta \varphi'_0 \mathbf{I} + 2\mu \left(\nabla \nabla \varphi'_0 + \right. \quad (20)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\nabla \operatorname{rot} \Psi'_0 + \left(\nabla \operatorname{rot} \Psi'_0 \right)' \right) \right) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x}' \in \Pi_\nu.$$

Вычисления, проведенные в [17, 18], показали, что в случае внутренней задачи Лэмба и сосредоточенной вертикальной силы в виде временной функции Хэвисайда на поверхности полуплоскости, начиная с расстояний, определяемых формулой (17), обнаруживается SP -волна. В то же время рэлеевская волна обнаруживается на значительно больших расстояниях, чем дается асимптотической оценкой (14). Расчеты в [18] для вертикальной сосредоточенной силы и пуассонова соотношения $\lambda = \mu$, показали, что возникновение рэлеевской волны происходит на расстояниях

$$d_4 > 5H. \quad (21)$$

В то же время, оценка (14) для центра расширения в пуассоновой среде дает для рэлеевской $d_2 \approx 2.4H$, см. [8], где оценка (14) получена для центра расширения, изменяющегося во времени как функция Хэвисайда. В [21] рассмотрены пространственные внутренние задачи Лэмба для центра расширения и центра сдвига в виде временной δ -функции, расчеты выполнялись для пуассоновой среды. Сравнение результатов, полученных в [20] для δ -импульса, с результатами, полученными в [21], выявило расхождение, связанное с SP -волной: в [21] приход SP -волны от центра сдвига не обнаруживался.

1.5. Метод функций Грина

Решение внутренней задачи Лэмба с помощью динамической функции Грина для упругого полупространства или полуплоскости от сосредоточенной силовой особенности записывается в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t - \tau) \cdot \mathbf{p}_0(\mathbf{x}_0, \tau) d\tau, \quad (22)$$

где \mathbf{G} – функция Грина, \mathbf{x}_0 – координата точки приложения силы \mathbf{p}_0 . Построение динамической функции Грина может осуществляться разными методами.

В [22–24] рассмотрена плоская внутренняя задача Лэмба о действии произвольно ориентиро-

ванной сосредоточенной силы, меняющейся во времени как δ -функция. Построение функции Грина в этих работах осуществлялось в пространстве изображений, далее осуществлялось сужение потенциалов на границу полуплоскости, после этого разыскивались значения потенциалов на линии, соединяющей гипо- и эпицентр. Аналитические выражения для компонент перемещений удалось найти лишь для точек, находящихся на этой линии. В частности, вертикальное смещение

в эпицентре, вызванное вертикальной силой, полученное в [23], имеет вид

$$u_z(0, 0, t) = \frac{P_z}{2\pi c_2 h} (G_1(\tau)H(\tau - \alpha) + G_2(\tau)H(\tau - 1)), \quad (23)$$

где p_z – интенсивность вертикальной силы: $\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, t) = p_z \mathbf{e}_3 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t)$; $\tau = tc_2/h$ – безразмерное время; $\alpha = c_2/c_1$; H – функция Хэвисайда, G_k , $k = 1, 2$ – дробно-рациональные функции от безразмерного параметра τ :

$$G_1(\tau) = \frac{2\tau^2(2\tau^2 + 1 - 2\alpha^2)}{\sqrt{\tau^2 - \alpha^2} \left((2\tau^2 + 1 - 2\alpha^2)^2 - 4\tau(\tau^2 - \alpha^2)\sqrt{\tau^2 + 1 - \alpha^2} \right)}, \quad G_2(\tau) = \frac{4\tau\sqrt{\tau^2 - 1}\sqrt{\tau^2 - 1 + \alpha^2}}{(2\tau^2 - 1)^2 - 4\tau(\tau^2 - 1)\sqrt{\tau^2 - 1 + \alpha^2}}. \quad (24)$$

Заметим, что горизонтальная составляющая в эпицентре от вертикальной нагрузки тождественно равна нулю.

Вычисления, проведенные по формулам (23), (24) для пуассоновой среды [23], показали, что непосредственно в эпицентре наряду с бесконечным пиком, характеризующим приход P -волны, обнаруживается конечный локальный максимум, отвечающий (по времени прихода) S -волне. В [24, 25] метод построения функции Грина, использовавшийся в [22, 23], был обобщен на анизотропные среды, причем для исследованной в [24] трансверсально изотропной среды приход в эпицентр сигнала от S -волны (на вертикальной компоненте) уже не обнаруживался.

В [25] пространственная динамическая функция Грина построена с помощью метода Каньяра [10–12]. Результаты вычисления смещений на свободной поверхности от временного δ -импульса, выраженные через компоненты функции Грина (22), показали [25], что для пуассоновой среды в точках поверхности, удовлетворяющих оценке (17), обнаруживается приход SP -волны. Далее, при увеличении расстояния от эпицентра отмечен приход рэлеевской волны. В то же время, исследовать поле смещений непосредственно в эпицентре в [25] не удалось.

В [25–28] помимо функции Грина (22) рассматривались также пространственные производные функции Грина для определения перемещений на поверхности от компонент тензора сейсмического момента:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t - \tau) \cdot \mathbf{p}_0(\mathbf{x}_0, \tau) d\tau, \quad (25)$$

где в случае коллинеарности \mathbf{n} и \mathbf{p}_0 правая часть (25) описывает двойную силу без момента, а в случае ортогональных \mathbf{n} и \mathbf{p}_0 – двойную силу с моментом. Расчеты полей перемещений на поверхности полупространства, вызванных вертикальной двойной силой без момента, показали [25–28], что приход SP - и рэлеевской волн по-прежнему обнаружива-

ется, причем приходу рэлеевской волны на графиках для вертикальной и горизонтальной компонент смещений предшествует знакопеременный всплеск, связанный с приходом S -волны, см. также монографию [29]. В заключение надо отметить, что в [25–28] не были получены оценки расстояний от эпицентра, соответствующие приходу рэлеевской и SP -волны, аналогичные (13)–(17).

Решение внутренней задачи Лэмба с помощью динамической функции Грина для полупространства осуществлялось также в [65], где применялась техника, аналогичная [25] и основанная на пути Каньяра. Заметим, что в [65] для расстояния, на котором появляется волна Рэля, получена асимптотическая оценка $\sim 10H$, что существенно больше расстояний, получаемых по оценкам (14) и (21).

1.6. Метод функционально-инвариантных решений

В [30–33] для решения внутренней и внешней задач Лэмба применялись преобразования Фурье–Бесселя по пространственным переменным и Лапласа–Меллина по времени, а при обращении интегральных преобразований вместо деформации контура интегрирования, как это делается в методе Каньяра, использовалось многократное изменение порядка интегрирования совместно с функционально-инвариантными решениями Смирнова–Соболева [34, 35]. Вычисления получающихся при таком подходе перемещений на границе осуществлялись с помощью метода стационарной фазы – это обеспечивало получение точных соотношений на фронтах и приближенных в некоторой окрестности фронта. Приведенные в [33] расчетные данные для центра расширения в упругом полупространстве показали, что приход объемных и рэлеевских волн обнаруживается на соответствующих графиках в точках наблюдения, находящихся на поверхности и на удалении от эпицентра, однако оценки расстояний, аналогичные (13)–(17), в [30–33] получены не были.

1.7. Разностные и вариационно-разностные методы

Численное решение внешней и внутренней задач Лэмба разностными или вариационно-разностными методами наталкивается на определенные сложности, связанные с устойчивостью и схемной вязкостью разностных схем, а также появлением осцилляций в зонах за ударным фронтом, характерным для явных схем второго [36, 37] или более высокого порядка точности, или размытием ударных волновых фронтов, характерным для явных схем первого порядка и неявных схем любого порядка точности [38]. Кроме того, для обеспечения численной устойчивости явных схем требуется выполнение условия Куранта, в рассматриваемом контексте представимого в виде [36]

$$\Delta t = \frac{\min(\Delta x)}{\max(c_1)}, \quad (26)$$

где Δx — шаг разностной сетки по пространственным координатам или характерный линейный размер конечного элемента, c_1 — скорость продольной волны; $\max(c_1)$ означает максимальную скорость продольной волны для всех сред, участвующих в расчете. Численные эксперименты [38] показали, что при анализе периодических процессов частота внешнего воздействия не должна превосходить эмпирических оценок

$$\omega < 8 \frac{2\pi}{\Delta t}, \quad (27)$$

где Δt вычисляется по (26), так как при нарушении условия (27) высокочастотный шум оказывается сопоставимым по амплитуде с изучаемым сигналом [39]. В случае апериодических процессов оценка (27) заменяется на эквивалентную

$$T > 8\Delta t, \quad (28)$$

где T — характерное время изменения апериодической нагрузки.

Помимо метода конечных элементов и конечных разностей применяют и другие разностные методы. В [40] для решения динамических задач, включая внешнюю задачу Лэмба, предложен гибридный подход, объединяющей конечноэлементный и конечноразностный методы. В [40] использованы разностные схемы, разработанные в [41] и позволившие получить конечноразностные уравнения второго порядка точности по временной переменной и четвертого порядка по пространственным переменным. В [42] гибридный метод применен к решению пространственной внешней задачи Лэмба. Численные эксперименты [43] показали, что гибридный метод оказался практически свободным от осцилляций за фронтом рэлеевской волны.

В [44–46] для исследования распространения волн в задачах Лэмба предложен спектральный метод (конечных) элементов (SEM). Этот метод фактически представляет собой метод конечных

элементов высокого порядка точности, в котором пространственными элементами (базисными функциями) являются полиномы Лежандра. Надо отметить, что эффекты, связанные с образованием SP -волн, а также процессы происходящие в эпицентре или в ближней эпицентральной зоне, в работах [44–46] не исследовались.

1.8. Некоторые родственные задачи

В ряде работ исследуется распределение энергии между волнами различных типов, возникающих при решении внешней [47, 48] и внутренней [49, 50] задач Лэмба. В приложении к задачам геофизики вопросы распределения энергии рассматриваются в работах [51, 52].

Обобщение задач Лэмба на случай распространения волн в пористых средах содержится в [53], в средах с усложненными свойствами — в [54], в двухкомпонентных средах — в [55]. В [56, 57] даются обзоры по распространению гармонических волн в многослойных средах с произвольной упругой анизотропией.

Задачи Лэмба о движущихся нагрузках, приложенных внутри упругого полупространства, исследуются в [23, 58, 59].

1.9. Постановка задачи и метод исследования, применяемый в настоящей работе

Для внутренней плоской задачи Лэмба анализируются волновые процессы, происходящие в ближней эпицентральной зоне. Особое внимание уделяется следующим мало исследованным и отчасти противоречивым результатам:

- (i) приход непосредственно в эпицентр сигнала, отвечающего S -волне [23];
- (ii) расстояние от эпицентра, отвечающее появлению рэлеевских волн; сравнение формул Накано (14) и Пекериса (21);
- (iii) обнаружение сигналов, отвечающих исчезающим SP - и PS -волнам.

Решение задач (i)–(iii) осуществляется с помощью метода конечных элементов по пространственным переменным и численным интегрированием с помощью явной разностной схемы второго порядка точности по времени. В работе рассматриваются сосредоточенные силовые нагрузки, заданные в виде временной функции Хэвисайда и временного δ -импульса.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ВНЕШНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ, ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

2.1. Основные уравнения

Рассматривается изотропная упругая полуплоскость, уравнения движения которой могут быть записаны в виде

$$c_1^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + p(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{v} = \ddot{\mathbf{u}}, \quad (29)$$

где $p(t)$ – функция, характеризующая изменение во времени силового воздействия; \mathbf{x}_0 – точка приложения силы, расположенная внутри полуплоскости; \mathbf{v} – вектор единичной нормали к границе полуплоскости Π_v . На границе Π_v формулировались однородные условия второй краевой задачи:

$$\mathbf{t}_v \equiv (\lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x}' \in \Pi_v. \quad (30)$$

Уравнения (29), (30) дополнялись однородными начальными условиями (4).

Расчеты выполнялись при следующих значениях физико-механических параметров модельной среды:

$$E = 0.83333 \text{ Па}; \nu = 0.25; \rho = 1 \text{ кг/м}^3. \quad (31)$$

При этих значениях упругих параметров для среды выполняется условие Пуассона $\lambda = \mu$, а скорости соответствующих волн, вычисляемые по (11), принимают следующие значения (в м/с):

$$c_1 = 1; \quad c_2 = 0.577; \quad c_R = 0.531. \quad (32)$$

Критический угол, соответствующий зарождению SP -волны и определяемый по (16), для исследуемой среды равен $\theta_{SP} \approx 35^\circ$, а соответствующее критическое расстояние от эпицентра до места образования SP -волны, определяемое по (17), равно $d_3 = 0.5H$.

2.2. Внешние воздействия

В качестве внешнего воздействия рассматривается вертикальная сосредоточенная сила, приложенная во внутренней точке упругой полуплоскости и изменяющаяся во времени либо по треугольному закону

$$p(t) = p_0 \begin{cases} t/T, & 0 < t < T, \\ (2T-t)/T, & T < t < 2T, \end{cases} \quad (33)$$

где p_0 – магнитуа нагрузки; $(0, T)$ – интервал роста, а $(T, 2T)$ – интервал убывания нагрузки; либо как функция, близкая к функции Хэвисайда

$$p(t) = p_0 \begin{cases} t/T, & 0 < t < T, \\ 1, & t > T. \end{cases} \quad (34)$$

Заметим, что при решении динамических задач разностными методами временные δ -импульсы обычно моделируют воздействиями вида (33).

Для исключения осцилляций за волновым фронтом применяется более консервативная оценка, чем рекомендуемая в (28):

$$T \geq 50\Delta t. \quad (35)$$

Вычисления, проведенные для силовой нагрузки, заданной треугольными импульсами (33) различной продолжительности, показали, что при выполнении эмпирической оценки (35) осцилляции в точках наблюдения за волновым фронтом входящей S -волны весьма незначительны.

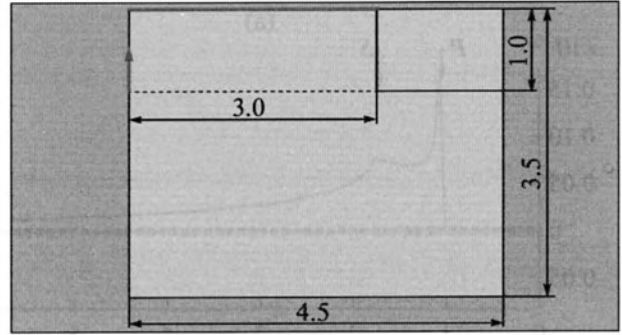


Рис. 1. Эскиз модели с указанием на свободной поверхности точек наблюдения (301 точка).

2.3. Конечноэлементная модель

На рис. 1 показана плоская конечноэлементная модель. На левой вертикальной границе модели задавались условия симметрии: $u_x = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xy} = 0$, где u_x – горизонтальная компонента перемещений, а ε_{xz} , ε_{xy} – соответствующие компоненты угловых деформаций. На нижней и правой вертикальных границах задавались условия отсутствия перемещений, а на свободной верхней границе – условия (30). Сосредоточенная сила приложена на левой боковой поверхности на глубине $H = 1$ м от свободной поверхности.

Замечание. На нижней и правой границах модели возможна постановка неотражающих условий для продольных волн при условии их “почти” нормального падения на границу [60, 61]:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}} + \left((\lambda + 2\mu)^{-1/2} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mu^{-1/2} (\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right) \cdot \dot{\mathbf{u}} \right)_{\mathbf{x} \in S} = 0. \quad (36)$$

В условии (36) предполагается, что (единичный) вектор волновой нормали \mathbf{n} , определяющий направление распространения волны, удовлетворяет условию

$$\arccos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})_{\mathbf{x} \in S} < 15^\circ \quad (37)$$

всюду на границе S , где поставлены условия (36). Из-за ограничения (37) условие (36) именуют условием 15° . Другие виды неотражающих условий обсуждаются в [62].

Ниже для исключения интерференции с отраженными продольными волнами при невыполнении условия (37), а также интерференции с отраженными S и R волнами, размеры модели выбирались такими, чтобы волны, отраженные от боковой и нижней поверхностей, не успевали прийти в точки наблюдения на свободной поверхности.

Модель, показанная на рис. 1, разбивалась регулярной сеткой на конечные элементы. Линейный размер элементов Δx варьировался в диапазоне 0.01–0.001 м при размерах модели 3.5×4.5 м. На тестовых задачах для центра расширения в

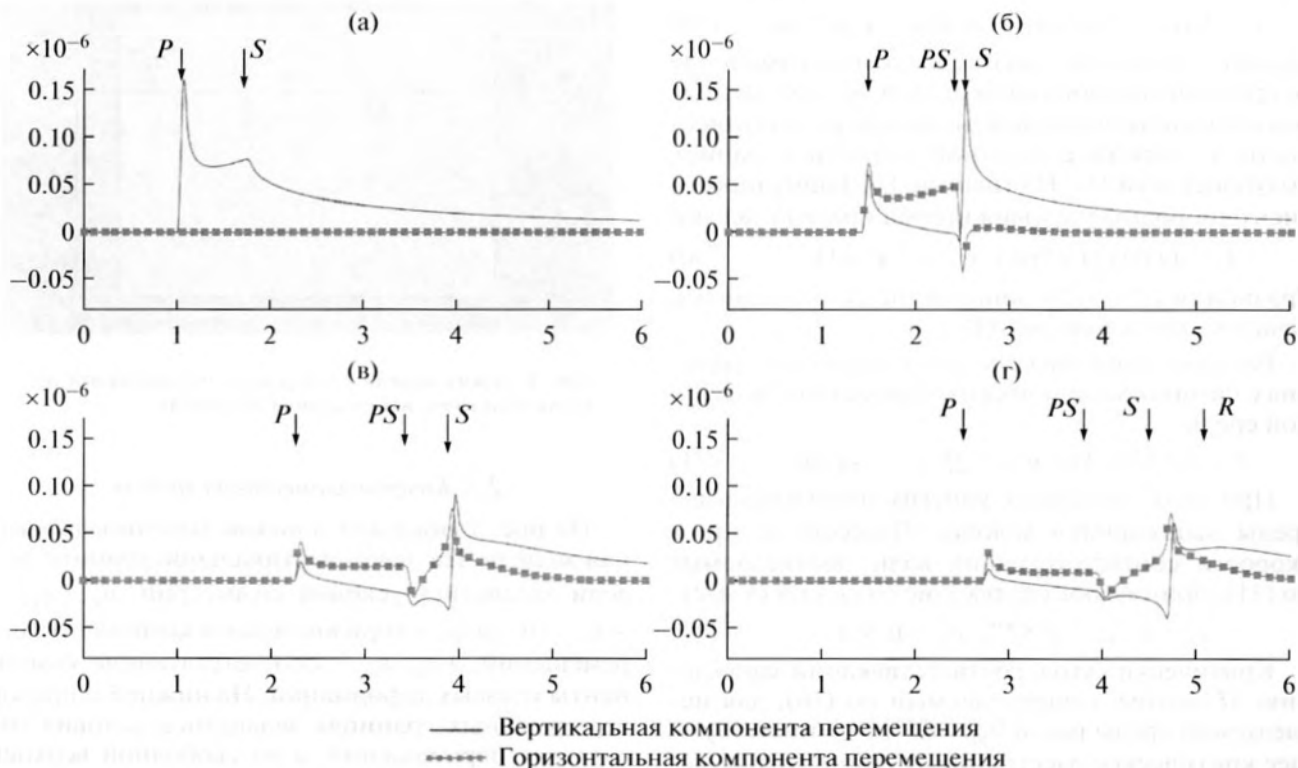


Рис. 2. Вертикальная и горизонтальная компоненты сигналов в точках наблюдения: (а) в эпицентре; (б) на расстоянии H от эпицентра; (в) на расстоянии $2H$ от эпицентра; (г) на расстоянии $2.5H$ от эпицентра ($H = 1$ — глубина источника).

упругой полуплоскости проводилось сравнение с аналитическим решением [12]. Наилучшие результаты достигались при $\Delta x = 0.001$ и линейных четырехузловых элементах; общее число элементов в модели составляло 15.75×10^6 . Шаг по времени определялся формулой (26), что при оценках (33) дало $\Delta t = 0.001$. Интегрирование по времени проводилось с использованием явной разностной схемы и алгоритма предиктор—корректор Лакса—Вендроффа [36, 37]. Оценка ошибок явной разностной схемы Лакса—Вендроффа при выборе временного инкремента в соответствии с условием Куранта дается асимптотической формулой $\alpha(\Delta x^2 + \Delta t^2)$ [36], где Δx — шаг пространственной разностной схемы, а Δt — шаг интегрирования по времени. Для рассматриваемых параметров (31) и при выполнении условия Куранта асимптотическая формула ошибки приобретает вид $\alpha(2\Delta x^2)$.

Параметр T (характерное время вариации нагрузки) в (33), (34) выбирался в соответствии с оценкой (35). Точки наблюдения на свободной поверхности располагались начиная от эпицентра с шагом 0.01; всего была выбрана 301 точка наблюдения. Общее время наблюдения ограничивалось шестью секундами. Магнитуда нагрузки p_0 в (33), (34) принималась равной 1×10^{-6} Н.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

3.1. Временной треугольный импульс (33)

Детальные графики изменения компонент перемещений во времени для нескольких точек наблюдения на свободной поверхности даны на рис. 2.

Анализ графиков на рис. 2 показывает, что непосредственно в эпицентре (рис. 2а) вертикальная компонента имеет второй локальный максимум, отвечающий приходу S -волны, тогда как горизонтальная компонента на этом рисунке тождественно нулевая. На расстоянии от эпицентра $0.1H$ (рис. 2б) в сигнале появляется горизонтальная составляющая, причем сразу же за приходом S -волны горизонтальные смещения становятся нулевыми, в то время как вертикальные медленно убывают. На расстоянии $2.5H$ от эпицентра (рис. 2г) на графике горизонтальной компоненты обнаруживаются три локальных экстремума, отвечающих (по времени прихода) объемной P -волне, исчезающей SP -волне и объемной S -волне, а на графике для вертикальной компоненты вслед за всплеском, отвечающим S -волне, появляется еще один локальный максимум, соответствующий (по скорости его распространения) рэлеевской волне. Заметим, что на графиках, отвечающих расстоянию $2H$ (рис. 2в), локальный максимум, отвечающий рэлеевской волне, еще не

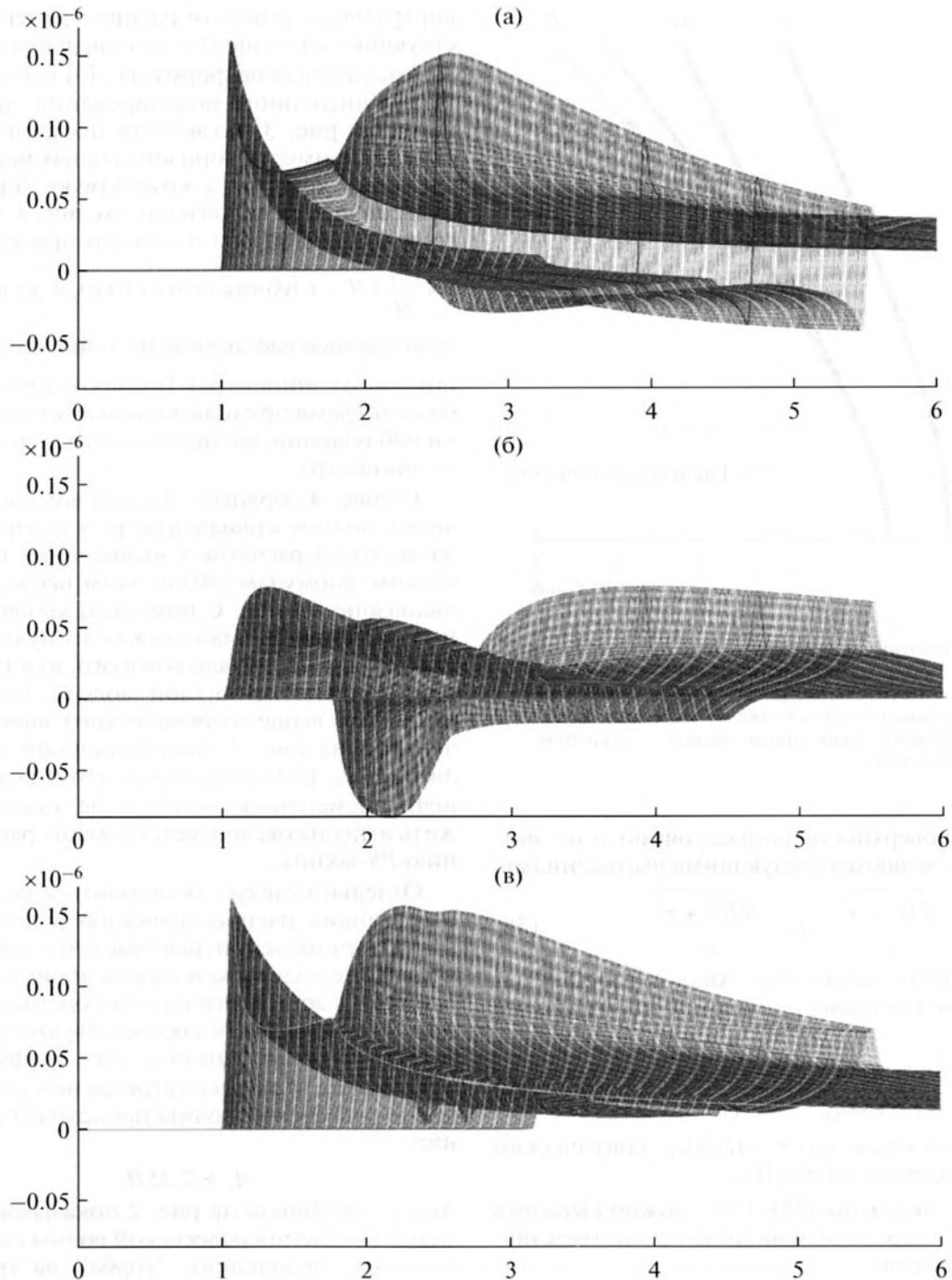


Рис. 3. Временные зависимости сигналов, пришедших во все точки наблюдения: (а) вертикальные компоненты; (б) горизонтальные компоненты; (в) магнитуды.

заметен. В заключение отметим, что в исследованном интервале $[0, 2.5H]$ пиков, отвечающих “негеометрической” PS -волне, не обнаружено.

Для более точной идентификации волн на свободной поверхности рассматривались картины сигналов во всех точках наблюдения, рис. 3.

Данные, представленные на рис. 3, применялись для определения горизонтальных (виртуаль-

ных) скоростей и соответствующих расстояний, воспринимаемых наблюдателем, находящимся на поверхности. Оценки этих скоростей и расстояний производилась по методике, впервые предложенной в [6] и применявшейся затем в аналогичном контексте в [8, 16–18, 63]. В соответствии с [6], времена прихода импульсов, отвечающих P и S -волнам, в точку наблюдения, находящуюся на

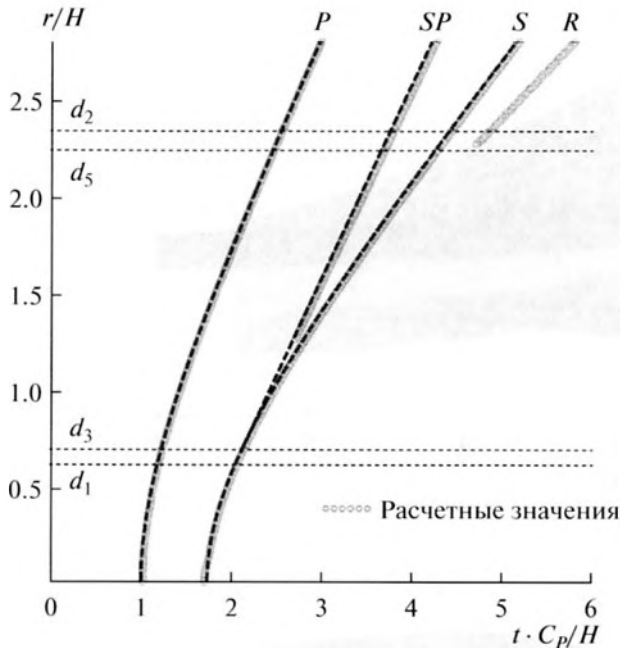


Рис. 4. Временные зависимости прихода импульсов на поверхность полуплоскости: на вертикальной оси отложены относительные расстояния от эпицентра, на горизонтальной оси отложены значения безразмерного времени; пунктирные линии – аналитические формулы (40).

свободной поверхности на расстоянии r от эпицентра, определяются следующими выражениями:

$$t_1 = \frac{\sqrt{H^2 + r^2}}{c_1}, \quad t_2 = \frac{\sqrt{H^2 + r^2}}{c_2}, \quad (38)$$

где H – глубина источника. Аналогичным образом вычисляется время прихода SP -волны в ту же точку:

$$t_3 = \frac{H}{c_2 \cos \theta_{SP}} + \frac{r - H \operatorname{tg} \theta_{SP}}{c_1}, \quad (39)$$

где предполагается, что $r > H \operatorname{tg} \theta_{SP}$; критический угол θ_{SP} определяется по (16).

Обращая формулы (38), (39), можно выразить расстояние r через времена прихода соответствующих импульсов:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(t_1 c_1)^2 - H^2}, \quad t_1 > \frac{H}{c_1}, \\ r &= \sqrt{(t_2 c_2)^2 - H^2}, \quad t_2 > \frac{H}{c_2}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$r = t_3 c_1 - \left(\frac{c_1}{c_2 \cos \theta_{SP}} - \tan \theta_{SP} \right) H, \quad t_3 > \frac{H}{c_2 \cos \theta_{SP}}.$$

Формулы (40) представляют собой искомые аналитические соотношения, определяющие расстояние r как функцию времени прихода соответствующего сигнала. Дифференцированием по времени выражений (40) могут быть получены

виртуальные скорости распространения соответствующих возмущений по поверхности.

Аналитические формулы (40) наряду с результатами численного моделирования, представленными на рис. 3, позволили построить графические зависимости горизонтальных расстояний от времени, которые соответствуют приходу импульсов от всех видов волн, см. рис. 4. На рис. 4 по горизонтальной оси отложено приведенное время $\frac{t c_P}{H}$ (H – глубина источника), а по вертикали –

приведенное расстояние от эпицентра $\frac{r}{H}$ (r – расстояние от эпицентра). Графики на рис. 4 характеризуют время прихода волновых импульсов в точки наблюдения, расположенные на расстояниях r от эпицентра.

На рис. 4 обращает на себя внимание практически полное совпадение результатов конечно-элементных расчетов и вычислений по аналитическим формулам (40) во всем исследованном диапазоне времен. С помощью конечно-элементных расчетов был обнаружен импульс, отвечающий SP -волне, начало которого, в силу особенностей конечно-элементной модели, располагается несколько выше теоретического значения, отмеченного на рис. 4 горизонтальной пунктирной линией d_3 . Отметим также, что в результате конечно-элементных расчетов не удалось обнаружить импульсов, соответствующих распространению PS -волны.

Отдельно следует остановиться на импульсах, отвечающих распространению рэлеевской волны: конечно-элементные расчеты показали, что появление рэлеевской волны происходит в соответствии с асимптотическими оценками [6, 7]; на рис. 4 этим оценкам соответствуют горизонтальные пунктирные линии d_5 и d_2 . График на рис. 4 показывает, что в рассматриваемом случае зарождение рэлеевской волны происходит на расстояниях

$$d_5 \approx 2.25H. \quad (41)$$

Анализ графиков на рис. 2 показывает, что признаки появления рэлеевской волны связаны с появлением небольшого “горба” на графике для вертикальной компоненты, см. рис. 2г.

В заключение отметим, что непосредственно в эпицентре на вертикальной компоненте (рис. 2а) заметно появление второго локального максимума, отвечающего по времени прихода сигналу S -волны, – это подтверждает результат, полученный в [23] с помощью интегральных преобразований.

3.2. Импульс в виде временной функции Хэвисайда

Для сосредоточенной силы, меняющейся во времени как функция Хэвисайда (34), получены

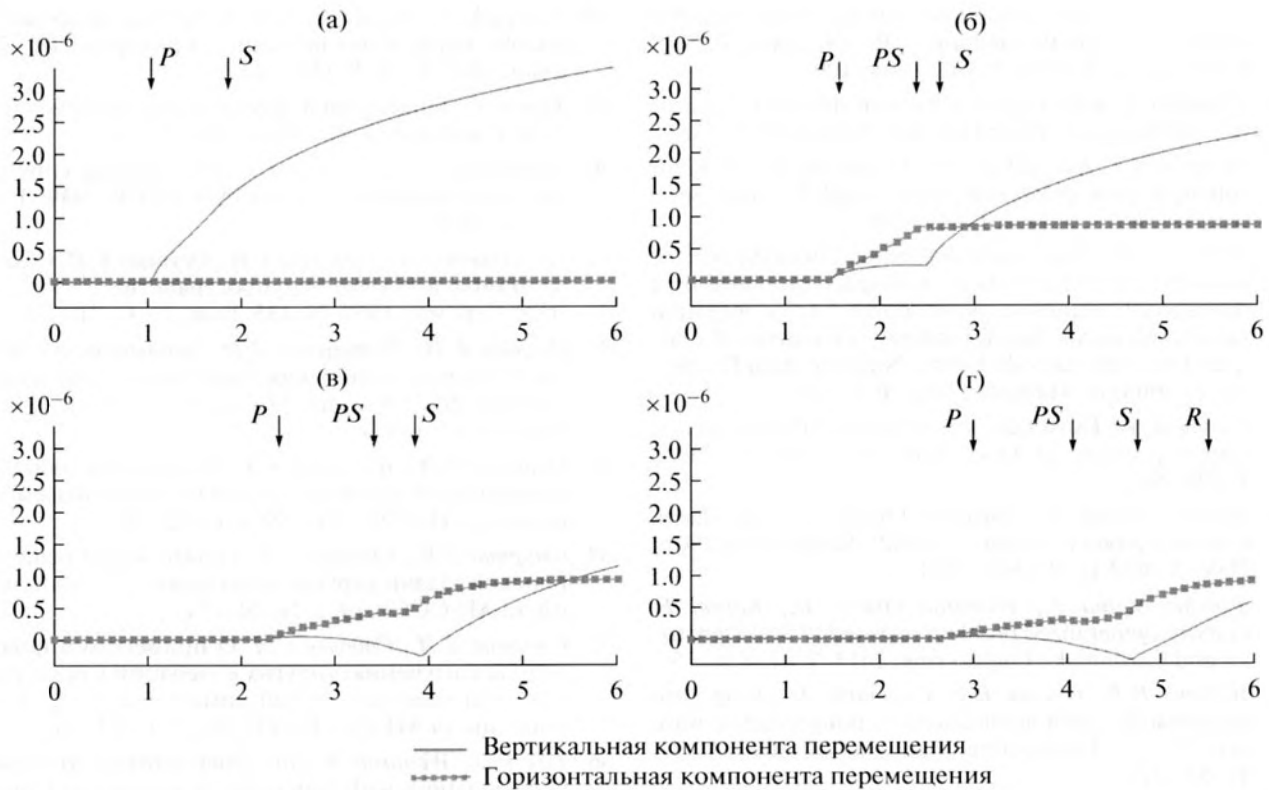


Рис. 5. Вертикальная и горизонтальная компоненты сигналов в точках наблюдения: (а) в эпицентре; (б) на расстоянии H от эпицентра; (в) на расстоянии $2H$ от эпицентра; (г) на расстоянии $2.5H$ от эпицентра ($H = 1$ – глубина источника).

графические зависимости прихода импульсов в те же точки наблюдения на поверхности полуплоскости. По аналогии с рис. 2, на рис. 5 показаны временные зависимости горизонтальной и вертикальной компонент перемещений для четырех точек наблюдения.

Так же, как и в случае треугольного импульса, моделирующего δ -импульс, на графиках, приведенных на рис. 5, можно определить времена прихода объемных P - и S -волн, а также SP -волны, однако приход рэлеевской волны заметить практически невозможно, см. график на рис. 5г. Отсутствием явно выраженного локального экстремума или возможной потери гладкости, отвечающих приходу рэлеевской волны, объясняется оценка (21) [18], существенно превышающая оценку (41) для δ -импульса. В заключение отметим, что так же, как и для треугольного импульса, приход “негеометрической” PS -волны обнаружить не удалось.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено сравнение результатов аналитических и численных исследований по анализу волновых полей в ближней эпицентральной зоне для внутренней задачи Лэмба от сосредоточенной силы в упругой полуплоскости. Получены уточненные оценки времен и расстояний от эпицентра,

отвечающих приходу объемных P и S волн, исчезающей SP -волны, а также волны Рэлея.

В заключение отметим, что в ходе исследования обнаружить “негеометрическую” PS -волну не удалось.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A. 1904. V. 203. P. 1–42.
2. Lamb H. On waves due to a travelling disturbance, with an application to waves in superposed fluids // Philosophical Magazine. 1916. V. 13. P. 386–399, 539–548.
3. Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F. Elastic waves in layered media. N.Y.: McGraw-Hill, 1957.
4. Strutt J.W. (Lord Rayleigh) On wave propagating along the plane surface of an elastic solid // Proc. London Math. Soc. 1885. V. 17. P. 4–11.
5. Gurtin M.E. The linear theory of elasticity / Handbuch der Physik Bd. VIa/II. Springer, 1972.
6. Nakano H. Some problems concerning the propagations of the disturbances in and on semi-infinite elastic solid // Geophys. Magazine. 1930. V. 2. P. 189–348.
7. Nakano H. On Rayleigh waves // Japan J. Astr. Geophys. 1925. V. 2. P. 233–326.

8. *Lapwood E.R.* The disturbance due to a line source in a semi-infinite elastic medium // *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A.* 1949. V. 242. P. 63–100.
9. *Cagniard L.* Reflexion et refraction des ondes seismiques progressives. Paris: Gauthier-Villard, 1939. 255 p.
10. *De Hoop A.T.* A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems // *Appl. Sci. Res. Sect. Ser. B.* 1960. V. 8. № 4. P. 349–356.
11. *De Hoop A.T.* Theoretical determination of the surface motion of a uniform elastic half-space produced by a dilatational, impulsive, point source / La propagation des ebranlements dans les milieux heterogenes. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique. Marseille, 1961. P. 21–32.
12. *Garvin W.W.* Exact transient solution of the buried line source problem // *Proc. Roy. Soc.* 1956. V. 234A. P. 528–541.
13. *Sanchez-Sesma F., Iturraran-Viveros U.* The classic Garvin's problem revisited // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 2006. V. 96(4A). P. 1344–1351.
14. *Sanchez-Sesma F., Iturraran-Viveros U., Kausel E.* Garvin's generalized problem revisited // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering.* 2013. V. 47. P. 4–15.
15. *Williams D.P., Craster R.V.* Cagniard–de Hoop path perturbations with applications to nongeometric wave arrivals // *J. Engineering Mathematics.* 2000. V. 37. P. 253–272.
16. *Pekeris C.L.* The seismic surface pulse // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1955. V. 41. P. 469–480.
17. *Pekeris C.L.* The seismic buried pulse // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1955. V. 41. P. 629–639.
18. *Pekeris C.L., Lifson H.* Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried pulse // *J. Acoust. Soc. Am.* 1957. V. 29. P. 1233–1238.
19. *Pekeris C.L., Longman I.M.* The motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried torque-pulse // *Geophys. J.* 1958. V. 1. P. 146–153.
20. *Pekeris C.L., Abramovici F., Alterman Z.* Propagation of an SH-torque pulse in a layered solid // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 1963. V. 53. P. 39–57.
21. *Pinney E.* Surface motion due to a point source in a semi-infinite elastic medium // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1954. V. 44. P. 571–596.
22. *Payton R.G.* Transient motion of an elastic half-space due to a moving surface line load // *Int. J. Engineering Sci.* 1967. V. 5. P. 49–79.
23. *Payton R.G.* Epicenter motion of an elastic half-space due to buried stationary and moving line sources // *Int. J. Solids Struct.* 1968. V. 4. P. 287–300.
24. *Payton R.G.* Epicenter motion of a transversely isotropic elastic half-space due to a suddenly applied buried point source // *Int. J. Engineering Sci.* 1979. V. 17. P. 879–887.
25. *Johnson L.R.* Green's function for Lamb's problem // *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 1974. V. 37. P. 99–131.
26. *Sato R.* Seismic waves in the near field // *J. Phys. Earth.* 1972. V. 20. P. 357–375.
27. *Kawasaki I., Suzuki Y., Sato R.* Seismic waves due to double couple source in a semi-infinite space. Part 1 // *Zisin.* 1972. V. 25. P. 207–217.
28. *Kawasaki I., Suzuki Y., Sato R.* Seismic waves due to double couple source in a semi-infinite space. Part 2 // *Zisin.* 1972. V. 25. P. 333–342.
29. *Kausel E.* *Fundamental Solutions of Elastodynamics.* N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2006. 251 p.
30. *Петрашень Г.И.* О задаче Лэмба в случае упругого полупространства // *Докл. АН СССР.* 1949. Т. 64. С. 649–652.
31. *Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И.* О задаче Лэмба в случае полупространства // *Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат.* 1950. № 135. Вып. 21. С. 71–118.
32. *Огурцов К.И., Петрашень Г.И.* Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии // *Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат.* 1951. № 149. Вып. 24. С. 3–117.
33. *Онисько Н.И., Шемякин Е.И.* Движение свободной поверхности однородного грунта при подземном взрыве // *ПМТФ.* 1961. № 4. С. 82–93.
34. *Смирнов В.И., Соболев С.Л.* Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний // *Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР.* 1932. № 20. 37 с.
35. *Смирнов В.И., Соболев С.Л.* О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии // *Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР.* 1933. № 29. С. 43–51.
36. *Lax P.D., Wendroff B.* Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy // *Comm. Pure Appl. Math.* 1964. V. 17. P. 381–398.
37. *Wendroff B.* *Theoretical numerical analysis.* N.Y.: Academic Press, 1967.
38. *Finlayson B.A.* *Numerical methods for problems with moving fronts.* Ravenna Park Pub. 1992. 605 p.
39. *Holmes N., Belytschko T.* Postprocessing of finite element transient response calculations by digital filters // *Computers and Structures.* 1976. V. 6. P. 211–216.
40. *Moczo P., Bystrický E., Kristek J., Carcione J.M., Bouchon M.* Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1997. V. 87. P. 1305–1323.
41. *Levander A.R.* Fourth-order finite-difference P-SV seismograms // *Geophys.* 1988. V. 53. P. 1425–1436.
42. *Moczo P., Kristek J., Vavrycuk V., Archuleta R.J., Halada L.* 3D heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities // *Bull. Seism. Soc. Am.* 2002. V. 92. № 8. P. 3042–3066.
43. *Shuo M., Archuleta R.J., Liu P.* Hybrid modeling of elastic P-SV wave motion: A combined finite-element and staggered-grid finite-difference approach // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 2004. V. 94. № 4. P. 1557–1563.
44. *Komatitsch D., Tromp J.* Introduction to the spectral-element method for 3-D seismic wave propagation // *Geophys. J. Int.* 1999. V. 139. P. 806–822.
45. *Komatitsch D., Tromp J.* Spectral-element simulations of global seismic wave propagation. I. Validation // *Geophys. J. Int.* 2002. V. 149. № 2. P. 390–412.
46. *Komatitsch D., Tromp J.* Spectral-element simulations of global seismic wave propagation. II. 3-D models, oceans, rotation, and self-gravitation // *Geophys. J. Int.* 2002. V. 150. № 1. P. 303–318.

47. Miller G.F., Pursey H. On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid // Proc. Royal Soc. London. 1955. V. A233. P. 55–69.
48. Rose L. On the energy radiated by Rayleigh waves // Wave Motion. 1984. V. 6. P. 359–361.
49. Harkrider D.G., Andersen D.L. Surface wave energy from point sources in plane layered Earth models // J. Geophys. Res. 1966. V. 71. P. 2967–2980.
50. Haskell N. Total energy and energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults // Bull. Seismol. Soc. Am. 1964. V. 54. P. 811–842.
51. Margerin L., Campillo M., van Tiggelen B.A., Hennino R. Energy partition of seismic coda waves in layered media: theory and application to Pinyon Flats Observatory // Geophys. J. Int. 2009. V. 177. P. 571–585.
52. Максимов Г.А., Меркулов М.Е., Кудрявцев В.Ю. Распределение энергии между различными типами сейсмических волн, излучаемых источником с произвольной диаграммой направленности в упругом полупространстве // Акуст. журн. 2003. Т. 49. С. 389–399.
53. Марков М.Г. Распространение волны Рэлея вдоль границы пористой среды, насыщенной неньютоновской жидкостью // Акуст. журн. 2006. Т. 52. С. 502–508.
54. Кулеш М.А., Грекова Е.Ф., Шардаков И.Н. Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера // Акуст. журн. 2009. Т. 55. С. 216–225.
55. Бобровицкий Ю.И. Волна рэлеевского типа на плоской границе двух однородных жидких полупространств // Акуст. журн. 2011. Т. 57. С. 579–581.
56. Мелешко В.В., Бондаренко А.А., Довгий С.А., Трофимчук А.Н., ван Хейст Г.Я.Ф. Упругие волноводы: история и современность // Мат. методы та фіз.-мех. поля. 2008. Т. 51. № 2. С. 86–104.
57. Кузнецов С.В. Волны Лэмба в анизотропных пластинах // Акуст. журн. 2014. Т. 60. С. 1–11.
58. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
59. Wu J.J., Whittaker A.R., Cartmell M.P. Dynamic responses of structures to moving bodies using combined finite element and analytical methods // Int. J. Mech. Sci. 2001. V. 43. P. 2555–2579.
60. Clayton R., Engquist B. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations // Bull. Seism. Soc. Am. 1977. V. 67. № 6. P. 1529–1540.
61. Givoli D. Numerical methods for problems in infinite domains. Amsterdam: Elsevier, 1992. 800 p.
62. Кравцов А.В., Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я. Конечноэлементные модели в задаче Лэмба // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 160–169.
63. Byerly P. Subcontinental structure in the light of seismological evidence // Advances in Geophysics. 1956. V. 3. P. 106–149.
64. Bergmann L. Der Ultraschall und seine Anwendungen in Wissenschaft und Technik. Hirzel-Verlag, Stuttgart, 1954.
65. Tsai C.H., Ma C.C. Exact transient solutions of buried dynamic point forces and displacement jumps for an elastic half space // Int. J. Solids Struct. 1991. V. 28. P. 955–974.