

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3:534.26

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНОВ НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛОСКОГО УПРУГОГО СЛОЯ С ЗАДАНЫМИ ЗВУКООТРАЖАЮЩИМИ СВОЙСТВАМИ

© 2015 г. Н. В. Ларин, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников

Тулский государственный университет

Тула, пр. Ленина 92

E-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Рассматривается задача об определении линейных законов неоднородности плоского упругого слоя, имеющего наименьшее отражение при заданном угле падения плоской звуковой волны. На основе аналитического решения прямой задачи построен функционал, выражающий интенсивность отражения, и предложен алгоритм его минимизации. Получены аналитические выражения, описывающие механические параметры неоднородного слоя.

Ключевые слова: отражение и прохождение звуковых волн, упругий неоднородный плоский слой, законы неоднородности.

DOI: 10.7868/S0320791915050147

Изменение звукоотражающих характеристик тела в определенных направлениях можно осуществить с помощью покрытия в виде непрерывно-неоднородного упругого слоя. Такое покрытие можно реализовать с помощью системы однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров (плотности и упругих постоянных). Рассеяние звуковых волн плоскими, цилиндрическими и сферическими телами с неоднородными по толщине покрытиями было исследовано в работах [1–4].

Возникает задача подобрать такое неоднородное покрытие, чтобы тело обладало заданными звукоотражающими свойствами.

Отражение и прохождение звуковых волн через плоский неоднородный изотропный упругий слой рассмотрено в работе [5]. Работа [6] посвящена изучению прохождения звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный упругий слой. В [7] решена задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны неоднородным упругим слоем, материал которого обладает анизотропией общего вида. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями, изучено в [8]. В [9] рассмотрено прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой.

Идентификации упругих характеристик непрерывно-неоднородных тел по известным физическим полям внутри исследуемых объектов посвящены работы [10, 11]. Задачи об определении свойств одномерных неоднородных объектов решены в [12–14]. Восстановление характеристик упругого слоя, произвольно меняющихся по

глубине, рассматривалось в [15]. Задачи о восстановлении свойств изотропного и ортотропного неоднородных по толщине слоев по известному полю смещений на границе слоя при анализе установившихся колебаний решены в [16–18].

Настоящая работа посвящена нахождению законов неоднородности плоского изотропного упругого слоя, которые обеспечивали бы требуемое звукоотражение.

Рассмотрим неоднородный изотропный плоский слой толщиной $2h$. Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного слоя описываются дифференцируемыми функциями координаты z , а плотность ρ — непрерывной функцией координаты z : $\rho = \rho(z)$, $\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$. При этом система прямоугольных координат x , y , z выбрана таким образом, что ось x лежит в средней плоскости слоя, а ось z направлена вниз по нормали к поверхности слоя (рис. 1). Поверхности слоя граничат

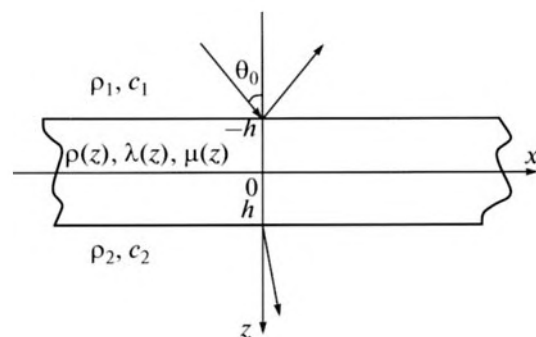


Рис. 1. Геометрия задачи.

с идеальными однородными жидкостями, которые имеют плотности ρ_1, ρ_2 и скорости звука c_1, c_2 соответственно.

Пусть из полупространства $z < -h$ на упругий слой падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_0 = A_0 \exp\{i[k_{1x}x + k_{1z}(z+h) - \omega t]\},$$

где A_0 — амплитуда волны; $k_{1x} = k_1 \sin \theta_0$, $k_{1z} = k_1 \cos \theta_0$ — проекции волнового вектора падающей волны \mathbf{k}_1 на оси координат x и z соответственно; $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число в полупространстве $z < -h$; ω — круговая частота; θ_0 — угол падения плоской волны, составляемый нормалью к фронту волны с осью z . Считаем, что волновой вектор \mathbf{k}_1 лежит в плоскости xz . Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опускаем.

Потенциалы скоростей отраженной от слоя и прошедшей через слой волн и проекции вектора смещения \mathbf{u} в упругом слое записываются в виде [6]

$$\Psi_1 = A_1 \exp\{i[k_{1x}x - k_{1z}(z+h)]\},$$

$$\Psi_2 = A_2 \exp\{i[k_{2x}x + k_{2z}(z-h)]\},$$

$$u_x = U_1(z) \exp(ik_{1x}x),$$

$$u_y = 0, \quad u_z = U_3(z) \exp(ik_{1x}x),$$

где k_{2x}, k_{2z} — проекции волнового вектора \mathbf{k}_2 на оси x и z ; $k_{2x}^2 + k_{2z}^2 = k_2^2$; $k_2 = \omega/c_2$ — волновое число в полупространстве $z > h$. При этом согласно закону Снеллиуса [19] $k_{2x} = k_{1x}$.

Введем безразмерные величины

$$z^* = \frac{z}{h}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda_0},$$

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad U_j^* = \frac{U_j}{h} \quad (j = 1, 3),$$

где ρ_0, λ_0, μ_0 — некоторые характерные величины.

Коэффициенты отражения A_1 и прозрачности A_2 определяются выражениями [6], которые с учетом обезразмеривания имеют вид

$$A_1 = A_0 + \frac{\omega h}{k_{1z}} U_3^*(-1), \quad A_2 = -\frac{\omega h}{k_{2z}} U_3^*(1). \quad (1)$$

Функции $U_1^*(z^*)$ и $U_3^*(z^*)$ являются решением краевой задачи для системы линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [9].

Для изотропного неоднородного упругого слоя эта задача записывается следующим образом:

$$AU'' + BU' + CU = 0, \quad (2)$$

$$(AU' + E_1U)_{z^*=-1} = D, \quad (AU' + E_2U)_{z^*=1} = 0, \quad (3)$$

где

$$U = (U_1^*, U_3^*)^T, \quad A = \begin{pmatrix} \mu^* & 0 \\ 0 & \alpha\lambda^* + 2\mu^* \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \mu^* & \beta(\alpha\lambda^* + \mu^*) \\ \beta(\alpha\lambda^* + \mu^*) & \alpha\lambda^* + 2\mu^* \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \gamma\rho^* + \beta^2(\alpha\lambda^* + 2\mu^*) & \beta\mu^* \\ \alpha\beta\lambda^* & \gamma\rho^* + \beta^2\mu^* \end{pmatrix},$$

$$D = (0, -2iA_0\omega\rho_1/\mu_0)^T,$$

$$E_r = \begin{pmatrix} 0 & \beta\mu^* \\ \alpha\beta\lambda^* & (-1)^{r-1}\sigma_r \end{pmatrix} \quad (r = 1, 2).$$

Здесь $\alpha = \lambda_0/\mu_0$, $\beta = ik_{1x}h$, $\gamma = \rho_0\omega^2 h^2/\mu_0$, $\sigma_r = i\omega^2\rho_r h/(k_{rz}\mu_0)$, штрихи обозначают дифференцирование по z^* . В дальнейшем индекс звездочка у всех безразмерных величин будем опускать.

Найдем приближенное аналитическое решение краевой задачи (2), (3) методом степенных рядов [11]. Решение системы (2) будем искать в виде

$$U_j(z) = \sum_{s=0}^{\infty} U_j^{(s)}(z-a)^s \quad (j = 1, 3), \quad (4)$$

где a — некоторая точка отрезка $[-1, 1]$. В качестве точки $z = a$ выберем середину отрезка $[-1, 1]$.

Если на отрезке $[-1, 1]$ функция $\rho(z)$ является дифференцируемой, а функции $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ имеют непрерывные производные до второго порядка включительно, то все коэффициенты системы (2) будут представлять собой функции, непрерывные вместе со своими первыми производными на $[-1, 1]$. Тогда ряды (4) будут сходящимися на отрезке $[-1, 1]$ [20].

Предположим, что функции $\rho(z)$, $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ аппроксимированы многочленами первой степени относительно переменной z , то есть будем рассматривать линейные законы неоднородности упругого слоя:

$$\rho(z) = \rho^{(0)} + \rho^{(1)}z, \quad (5)$$

$$\lambda(z) = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}z, \quad \mu(z) = \mu^{(0)} + \mu^{(1)}z.$$

Сведем краевую задачу (2), (3) к задачам с начальными условиями в точке $z = 0$. Найдем четыре линейно независимых решения системы дифференциальных уравнений (2). В качестве фундаментальных решений можно выбрать четыре решения задачи Коши $U^m(z)$ ($m = 1, 2, 3, 4$) системы (2) с начальными условиями, являющимися линейно независимыми.

Возьмем следующие начальные условия:

$$U^m|_{z=0} = (\delta_{1m}, \delta_{2m})^T, \quad (6)$$

$$U^m|_{z=0} = (\delta_{3m}, \delta_{4m})^T \quad (m = 1, 2, 3, 4),$$

где $U^m = (U_1^m, U_3^m)^T$; m — порядковый номер задачи Коши; δ_{ij} — символ Кронекера.

Каждую составляющую вектора U^m будем искать в виде

$$U_j^m = \sum_{s=0}^{\infty} U_j^{m(s)} z^s \quad (j = 1, 3). \quad (7)$$

Так как коэффициенты системы (2) при сделанных предположениях есть многочлены от z , то ряды (7) будут сходиться на отрезке $[-1, 1]$ [20].

Элементы матриц A, B, C выражаются через модули упругости и плотности. Поэтому с учетом (5) получаем следующие выражения для элементов матриц:

$$A_{ij} = A_{ij}^{(0)} + A_{ij}^{(1)} z, \quad B_{ij} = B_{ij}^{(0)} + B_{ij}^{(1)} z, \quad C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + C_{ij}^{(1)} z, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}^{(k)} &= \mu^{(k)}, \quad A_{12}^{(k)} = A_{21}^{(k)} = 0, \quad A_{22}^{(k)} = \alpha \lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}, \\ B_{11}^{(0)} &= \mu^{(1)}, \quad B_{22}^{(0)} = \alpha \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}, \quad B_{11}^{(1)} = B_{22}^{(1)} = 0, \\ B_{12}^{(k)} &= B_{21}^{(k)} = \beta(\alpha \lambda^{(k)} + \mu^{(k)}), \\ C_{11}^{(k)} &= \gamma \rho^{(k)} + \beta^2(\alpha \lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}), \\ C_{12}^{(0)} &= \beta \mu^{(1)}, \quad C_{21}^{(0)} = \alpha \beta \lambda^{(1)}, \\ C_{12}^{(1)} &= C_{21}^{(1)} = 0, \quad C_{22}^{(k)} = \gamma \rho^{(k)} + \beta^2 \mu^{(k)} \quad (k = 0, 1). \end{aligned}$$

Подставляя (7) и (8) в уравнения (2) и приравняв нулю коэффициенты при каждой степени z , получаем систему двух уравнений

$$\begin{aligned} (s+1)(s+2)(A_{i1}^{(0)} U_1^{m(s+2)} + A_{i2}^{(0)} U_3^{m(s+2)}) &= - \sum_{k=0}^R (s+1 - \\ &- k)(s-k)(A_{i1}^{(k+1)} U_1^{m(s+1-k)} + A_{i2}^{(k+1)} U_3^{m(s+1-k)}) + \\ &+ (s+1-k)(B_{i1}^{(k)} U_1^{m(s+1-k)} + B_{i2}^{(k)} U_3^{m(s+1-k)}) + \\ &+ C_{i1}^{(k)} U_1^{m(s-k)} + C_{i2}^{(k)} U_3^{m(s-k)} \quad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

где $R = \min\{1, s\}$.

Эту систему разрешим относительно неизвестных $U_1^{m(s+2)}$ и $U_3^{m(s+2)}$. В результате получим рекуррентные соотношения для нахождения коэффициентов $U_j^{m(s+2)}$ ($s = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 3$). Рекуррентные соотношения позволяют вычислить все коэффициенты разложений (7) за исключением $U_j^{m(0)}$ и $U_j^{m(1)}$ ($j = 1, 3$). Учитывая начальные условия (6), находим

$$\begin{aligned} U_1^{m(0)} &= \delta_{1m}; \quad U_3^{m(0)} = \delta_{2m}; \\ U_1^{m(1)} &= \delta_{3m}; \quad U_3^{m(1)} = \delta_{4m} \quad (m = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

Однородность системы (2) позволяет представить решение краевой задачи (2), (3) в виде линейной комбинации фундаментальных решений

$$U = \sum_{m=1}^4 C_m U^m, \quad (9)$$

где C_m — произвольные постоянные.

Подставляя (9) в краевые условия (3), получим систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_m ($m = 1, 2, 3, 4$). Определив коэффициенты C_m , находим прибли-

женное аналитическое решение краевой задачи (2), (3)

$$U_j(z) = \sum_{m=1}^4 C_m \sum_{s=0}^{\infty} U_j^{m(s)} z^s \quad (j = 1, 3).$$

В результате согласно (1) получаем аналитические выражения для коэффициентов отражения и прозрачности.

Построим функционал F , определенный на классе линейных функций $\rho(z)$, $\lambda(z)$, $\mu(z)$ и выражающий коэффициент отражения по энергии

$$F[\rho, \lambda, \mu] = \left| \frac{A_1}{A_0} \right|^2.$$

Для оценки скорости сходимости степенного ряда при вычислении F были проведены расчеты на конкретных частотах для следующих линейных законов неоднородности материала плоского слоя:

$$\rho(z) = 0.85 + 0.25z,$$

$$\lambda(z) = 1.4 + 0.1z, \quad \mu(z) = 1.15 + 0.05z$$

(вид зависимостей $\rho(z)$, $\lambda(z)$, $\mu(z)$ и значения h , ρ_1 , ρ_2 , c_1 , c_2 , ρ_0 , λ_0 , μ_0 соответствуют характеристикам сред, используемым ниже при определении законов неоднородности).

Точность расчетов контролировалась по условию $|F_{2s} - F_s| < 10^{-6}$, где F_n — значение величины F , рассчитанное с использованием аппроксимирующих многочленов степени n ($n = s, 2s$). При выполнении этого условия расчет завершался и в качестве значения F бралось значение F_{2s} .

Расчеты проводились для $\theta_0 = 10^\circ$ и следующих значений волнового размера слоя $2k_1 h$: 1, 3, 5, 6, 24.3, 25. При этом значения 6 и 24.3 соответствуют резонансным частотам, что обнаружено в результате построения частотной характеристики. В результате значения s оказались равными 7, 8, 11, 11, 19, 19 соответственно. Расчеты показали, что с увеличением частоты колебаний увеличивается число учитываемых слагаемых степенного ряда и в окрестности резонансных частот сходимость степенных рядов не ухудшается.

Кроме того, было проведено сравнение значений величины F , найденных методом степенных рядов и методом пристрелки [6]. Полученные результаты показали хорошее совпадение. Различие не превосходит величины порядка 10^{-6} .

Таким образом, сравнительный численный анализ позволяет сделать вывод о применимости полученного аналитического решения в широком частотном диапазоне.

На основе аналитического решения прямой задачи определим такие линейные законы неоднородности материала плоского упругого слоя, для которых будем иметь наименьшее отражение звука при заданном угле падения плоской волны θ_0 .

Найдем такие значения коэффициентов $\rho^{(k)}, \lambda^{(k)}, \mu^{(k)}$ ($k = 0, 1$) функций $\rho(z), \lambda(z), \mu(z)$, при которых функционал F достигает минимального значения.

Для функций $\rho(z), \lambda(z), \mu(z)$, определенных на отрезке $[-1, 1]$, введем ограничения

$$\alpha_0 \leq \rho^{(0)} + \rho^{(1)}z \leq \alpha_1, \quad \beta_0 \leq \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}z \leq \beta_1, \quad (10)$$

$$\gamma_0 \leq \mu^{(0)} + \mu^{(1)}z \leq \gamma_1, \quad z \in [-1, 1],$$

где $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ($j = 0, 1$) – некоторые положительные константы.

Геометрически каждое из неравенств (10) вида $b_0 \leq a^{(0)} + a^{(1)}z \leq b_1$ на плоскости $a^{(0)}, a^{(1)}$ задает квадратную область $D(a^{(0)}, a^{(1)})$ (рис. 2). Здесь под парой $(a^{(0)}, a^{(1)})$ подразумеваем каждую из пар $(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}), (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}), (\mu^{(0)}, \mu^{(1)})$, а под b_0 и b_1 – соответствующие границы. Область $D(a^{(0)}, a^{(1)})$, являющаяся областью определения параметров $a^{(0)}$ и $a^{(1)}$, представляет собой объединение двух областей, которые задаются соответственно неравенствами

$$b_0 \leq a^{(0)} \leq \frac{b_0 + b_1}{2}, \quad b_0 - a^{(0)} \leq a^{(1)} \leq a^{(0)} - b_0$$

и

$$\frac{b_0 + b_1}{2} \leq a^{(0)} \leq b_1, \quad a^{(0)} - b_1 \leq a^{(1)} \leq b_1 - a^{(0)}.$$

В ряде случаев возможно введение дополнительных ограничений. Например, для большинства металлов справедливо соотношение $\mu < \lambda$ для размерных модулей упругости. В силу линейности безразмерных функций $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ достаточно потребовать выполнение неравенства $\mu_0\mu(z) < \lambda_0\lambda(z)$ на концах отрезка $[-1, 1]$. Отсюда получаем дополнительные условия для коэффициентов $\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}$ ($k = 0, 1$):

$$\mu_0(\mu^{(0)} - \mu^{(1)}) < \lambda_0(\lambda^{(0)} - \lambda^{(1)}), \quad (11)$$

$$\mu_0(\mu^{(0)} + \mu^{(1)}) < \lambda_0(\lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}).$$

Нахождение неизвестных величин $\rho^{(k)}, \lambda^{(k)}, \mu^{(k)}$ ($k = 0, 1$), удовлетворяющих условиям (10) и (11) и минимизирующих функцию

$$F(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \mu^{(0)}, \mu^{(1)}), \quad (12)$$

осуществим с помощью следующей вычислительной процедуры.

Каждую из областей $D(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}), D(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ и $D(\mu^{(0)}, \mu^{(1)})$ покроем квадратной сеткой, схематично изображенной на рис. 2. Сетку выберем с таким расчетом, чтобы ее узлы или принадлежали области D , или находились на ее границе Γ .

Узлы $(a_p^{(0)}, a_q^{(1)})$ сетки с шагом l определяются уравнениями

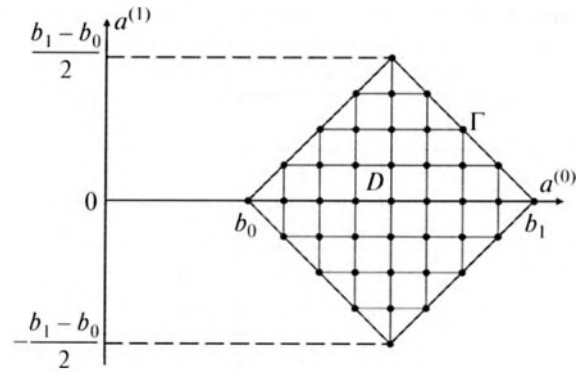


Рис. 2. Сеточная область.

$$a_p^{(0)} = b_0 + pl, \quad a_q^{(1)} = ql, \quad l = \frac{b_1 - b_0}{2M},$$

$$p = 0, 1, \dots, 2M, \quad (13)$$

$$q = \begin{cases} -p, \dots, p, & b_0 \leq a_p^{(0)} \leq (b_0 + b_1)/2, \\ -(2M - p), \dots, (2M - p), & (b_0 + b_1)/2 \leq a_p^{(0)} \leq b_1, \end{cases}$$

где $2M$ – число разбиений отрезка $[b_0, b_1]$.

Нахождение оптимального набора параметров $\rho^{(k)}, \lambda^{(k)}, \mu^{(k)}$ выполнялось с помощью процедуры поиска минимума функции многих переменных (12). При этом использовалась комбинация двух методов: метода случайного поиска и метода покоординатного спуска [21]. Начальная точка для искомых параметров в методе покоординатного спуска выбиралась случайным образом на трех сетках вида (13). При покоординатном спуске последовательно движением по узлам сетки уточнялись сначала параметры $\rho^{(0)}, \lambda^{(0)}, \mu^{(0)}$, а затем $\rho^{(1)}, \lambda^{(1)}, \mu^{(1)}$. Случайный выбор начальной точки повторялся N раз. В качестве конечного решения выбирался набор параметров, обеспечивающий минимальное значение F среди N локальных решений. Получаемое таким образом решение является приближенным, точность которого зависит от выбора шага сетки l и числа N .

При реализации предложенного алгоритма рассматривался неоднородный упругий слой толщиной 0.02 м, находящийся в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 1000$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с). Полагалось, что амплитуда падающей волны $A_0 = 1$, характерная плотность $\rho_0 = 5000$ кг/м³, характерные модули упругости $\lambda_0 = \mu_0 = 10^{11}$ Н/м² (используемые характерные величины имеют порядок соответствующих величин для металлов). Расчеты проводились для различных значений волнового размера слоя ($2k_1h = 1, 3$) и угла падения звуковой волны ($\theta_0 = 10^\circ, 30^\circ$).

При расчетах полагалось, что $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0.5$ и $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1.5$. При таких значениях границ неравенств (10) в каждом интервале $[b_0, b_1]$ его дли-

Таблица 1. Результаты расчета F при шаге сетки $l = 0.25$

$2k_1h$	θ_0	$\rho^{(0)}$	$\rho^{(1)}$	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	F
1	10°	0.5	0	1	0	0.75	0	5.93×10^{-1}
	30°	0.5	0	1.5	0	1.25	0	3.77×10^{-1}
3	10°	0.75	-0.25	1.25	0.25	1	0.25	5.99×10^{-1}
		0.75	0.25	1.25	-0.25	1	-0.25	
	30°	0.5	0	1	0.25	0.75	0.25	6.10×10^{-3}
		0.5	0	1	-0.25	0.75	-0.25	

Таблица 2. Результаты расчета F при шаге сетки $l = 0.125$

$2k_1h$	θ_0	$\rho^{(0)}$	$\rho^{(1)}$	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	F
1	10°	0.5	0	1.125	-0.25	0.625	0.125	1.15×10^{-1}
		0.5	0	1.125	0.25	0.625	-0.125	
	30°	0.5	0	1.5	0	1.375	0	3.60×10^{-1}
3	10°	0.5	0	1.125	0.25	0.625	0	9.31×10^{-4}
		0.5	0	1.125	-0.25	0.625	0	
	30°	0.625	0	1.5	0	0.875	0	1.78×10^{-4}
		0.625	0	1.5	0	0.875	0	

на равна значению средней точки интервала. Это обеспечивает достаточно широкий диапазон изменения функций $\rho(z)$, $\lambda(z)$, $\mu(z)$, когда максимально возможные значения функций больше минимально допустимых значений в три раза.

Были проведены расчеты на сгущающихся сетках. В табл. 1–3 приведены результаты расчетов при трех значениях шага сетки $l = 0.25, 0.125, 0.0625$. Для этих сеток значение N полагалось равным 50, 150, 200 соответственно.

Анализ результатов показывает, что оптимальное решение оказывается единственным, если все коэффициенты с верхним индексом 1 равны нулю, то есть если плотность и модули упругости постоянны. В других случаях для каждого из при-

веденных вариантов расчета существует по два набора коэффициентов, различающихся знаком при коэффициентах с индексом 1, то есть имеется два оптимальных решения.

Это означает, что если некоторый механический параметр в одном оптимальном решении достигает максимального (минимального) значения на одной поверхности слоя, то в другом оптимальном решении он достигает того же максимального (минимального) значения на другой поверхности. Таким образом, при линейных законах неоднородности, описываемых симметричными относительно оси ординат прямыми, плоский слой неразличим по отраженному полю.

Таблица 3. Результаты расчета F при шаге сетки $l = 0.0625$

$2k_1h$	θ_0	$\rho^{(0)}$	$\rho^{(1)}$	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	F
1	10°	0.625	-0.0625	1.125	-0.3125	0.8125	-0.0625	6.14×10^{-5}
		0.625	0.0625	1.125	0.3125	0.8125	0.0625	
	30°	0.5	0	1.5	0	1.4375	0	3.52×10^{-1}
3	10°	0.5	0	1.125	0.25	0.625	0	9.31×10^{-4}
		0.5	0	1.125	-0.25	0.625	0	
	30°	0.6875	0.125	1.25	0.1875	1	0	3.06×10^{-5}
		0.6875	-0.125	1.25	-0.1875	1	0	

Таблица 4. Результаты расчета Φ при шаге сетки $l = 0.25$

θ_0	$\rho^{(0)}$	$\rho^{(1)}$	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	$(2h/c)\Phi$
10°	0.75	0.25	1.25	-0.25	1	-0.25	1.420
	0.75	-0.25	1.25	0.25	1	0.25	
30°	0.5	0	1.25	-0.25	1	-0.25	0.614
	0.5	0	1.25	0.25	1	0.25	

Таблица 5. Результаты расчета Φ при шаге сетки $l = 0.125$

θ_0	$\rho^{(0)}$	$\rho^{(1)}$	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	$(2h/c)\Phi$
10°	0.5	0	1.125	0.375	0.625	0	0.267
	0.5	0	1.125	-0.375	0.625	0	
30°	0.5	0	1.5	0	0.875	0	0.601

Из табл. 3, где представлены результаты расчетов с самым мелким шагом сетки, видно, что для вариантов расчета $2k_1h = 1$ и $\theta_0 = 10^\circ$, $2k_1h = 3$ и $\theta_0 = 10^\circ$, $2k_1h = 3$ и $\theta_0 = 30^\circ$ найденные коэффициенты линейных законов неоднородности плоского упругого слоя обеспечивают значение величины F , меньшее 10^{-3} . Для варианта расчета $2k_1h = 1$ и $\theta_0 = 30^\circ$ найденные коэффициенты линейных функций обеспечивают минимальное значение величины F , равное 0.352. В результате расчетов определены законы неоднородности плоского слоя, обеспечивающие наименьшее отражение при заданных волновом размере слоя и угле падения плоской волны. Например, при $2k_1h = 3$ и $\theta_0 = 30^\circ$ наименьшее отражение со значением F , равным 3.06×10^{-5} , достигается при следующих законах неоднородности:

$$\rho(z) = 0.6875 \pm 0.125z, \\ \lambda(z) = 1.25 \pm 0.1875z, \quad \mu(z) = 1.$$

Для практики гораздо важнее рассмотреть случай, когда частота колебаний является не фиксированной, а изменяется в некотором диапазоне от ω_1 до ω_2 . Для этого случая построим функционал Φ вида

$$\Phi[\rho, \lambda, \mu] = \int_{\omega_1}^{\omega_2} F d\omega,$$

определенный на классе линейных функций $\rho(z)$, $\lambda(z)$, $\mu(z)$. Минимизация функционала Φ проведена с использованием предложенной выше вычислительной процедуры. Интеграл вычислялся численно. При этом частотный диапазон определялся изменением волнового размера слоя $2k_1h$ на интервале [1, 3]. Поиск минимума Φ осуществ-

лялся при двух углах падения плоской волны, $\theta_0 = 10^\circ$ и $\theta_0 = 30^\circ$.

В табл. 4 и 5 приведены результаты расчетов при двух значениях шага сетки $l = 0.25, 0.125$, которые приводят к выводам относительно законов неоднородности, аналогичным изложенным выше для случая фиксированной частоты.

Из табл. 5 видно, что найденные законы неоднородности, например, при $\theta_0 = 10^\circ$ имеют вид $\rho(z) = 0.5$, $\lambda(z) = 1.125 \pm 0.375z$, $\mu(z) = 0.625$.

Заметим, что приведенный выше способ определения законов неоднородности можно распространить на случай, когда механические характеристики материала неоднородного слоя аппроксимированы многочленами более высокой степени.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-97514) и Министерства образования и науки РФ (государственное задание № 1.1333.2014К).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толоконников Л.А., Юдачев В.В. О прохождении плоской звуковой волны через плоский упругий слой с неоднородным покрытием // *Материалы междунар. научн. конф. "Совр. пробл. математики, механики, информатики"*. Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. С. 477–480.
2. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // *ПММ*. 2011. Т. 75. 5. С. 850–857.
3. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // *Известия ТулГУ. Естественные науки*. 2013. 2. Ч. 2. С. 265–274.
4. Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием // *ПММ*. 2014. Т. 78. 4. С. 519–526.

5. Приходько В.Ю., Тютекин В.В. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акуст. журн. 1986. Т. 32. 2. С. 212–218.
6. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акуст. журн. 1990. Т. 36. 4. С. 740–744.
7. Толоконников Л.А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 5. С. 179–184.
8. Толоконников Л.А. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями // ПММ. 1998. Т. 62. 6. С. 1029–1035.
9. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой // ПММ. 2006. Т. 70. 4. С. 650–659.
10. McLaughlin J., Yoon J.-R. Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement // Inverse Problems. 2004. V. 20. P. 25–45.
11. Jadamba B., Khan A.A., Raciti F. On the inverse problem of identifying Lamé coefficients in linear elasticity // J. Computers and Mathematics with Applications. 2008. V. 56. P. 431–443.
12. Бочарова О.В., Ватульян А.О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акуст. журн. 2009. Т. 55. 3. С. 275–282.
13. Ватульян А.О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. 2010. 6. С. 911–918.
14. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // Int. J. Solids. Struct. 2014. V. 51. 3–4. P. 767–773.
15. Ватульян А.О., Самуновский П.С. Об определении упругих модулей при анализе колебаний неоднородного слоя // Доклады РАН. 2007. Т. 414. 1. С. 36–38.
16. Ватульян А.О., Явруян О.В., Богачев И.В. Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акуст. журн. 2011. Т. 57. 6. С. 723–730.
17. Ватульян А.О., Явруян О.В., Богачев И.В. Идентификация неоднородных свойств ортотропного упругого слоя // Акуст. журн. 2013. Т. 59. 6. С. 752–758.
18. Vatulyan A.O., Bogachev I.V., Yavruyan O.V. Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer // Int. J. Solids. Struct. 2014. V. 51. 11–12. P. 2238–2243.
19. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
20. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1969. 672 с.
21. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 549 с.