АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2016, том 62, № 3, с. 369–374

## АКУСТИКА СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 539.3

# РЕКОНСТРУКЦИЯ ЖЕСТКОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

© 2016 г. И. В. Богачев*, А. О. Ватульян*,**, О. В. Явруян**

*Южный федеральный университет, институт математики, механики и компьютерных наук
344006 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8а

**Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, 362027 Владикавказ

E-mail: bogachev89@yandex.ru; vatulyan@aaanet.ru

Поступила в редакцию 18.06.2015 г.

Рассмотрена задача о реконструкции неоднородного цилиндрически симметричного распределения жесткости круглой пластины по информации о функции смещения при установившихся колебаниях, измеренной в некоторой точке. Построено решение прямой задачи с использованием метода Галеркина и обратной задачи о реконструкции жесткости с помощью итерационного подхода на основе регуляризованного метода линеаризации. Приведены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению различных типов функций, показавшие эффективность предложенного подхода и позволяющие осуществлять оценку изменения жесткости.

*Ключевые слова*: идентификация, колебания, неоднородность, круглая пластина, итерационный процесс, регуляризация.

**DOI:** 10.7868/S0320791916030059

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время задачи о деформировании пластин переменной жесткости часто используются при моделировании различных объектов. Это и элементы некоторых технических систем, где использование модели с эффективной постоянной жесткостью может привести к большой погрешности, и элементы биологических систем – например, решетчатая пластина склеры глаза. Задачи для таких объектов могут быть разбиты на два класса – исследование деформирования при сложных условиях нагружения и задачи идентификации жесткости при известных (измеренных) деформационных характеристиках [1].

При решении обратных задач идентификации параметров материалов одним из наиболее удобных для реализации на практике методов измерения деформирования является акустический метод. К несомненным достоинствам его также стоит отнести неинвазивность, что зачастую очень важно при исследовании, например, биологических объектов.

При исследовании пластин из однородных материалов во многих случаях построены аналитические решения задач о их колебаниях. Так, например, в работе [2] построено асимптотически точное решение задачи о поперечных колебаниях прямоугольной ортотропной пластины со свободными краями. Задача сведена к решению бесконечной алгебраической системы, анализ которой позволяет найти степенную асимптотику нетривиального решения системы, что дает возможность вычислить собственные частоты колебаний и построить соответствующие им собственные формы.

В случае наличия неоднородностей в пластинах исследование их колебаний и распространяющихся в них волн требует применения специальных подходов. В [3] исследуются волны, локализованные вдоль периодического набора точечных неоднородностей, которые моделируют отверстия в тонкой упругой пластине. Задача сведена к численному исследованию дисперсионных уравнений, выписанных в явном виде в квадратурах.

Отметим, что обратные задачи идентификации параметров в случае однородных материалов достаточно хорошо изучены [4–7]. Как правило, для решения этих задач используется сведение к проблеме минимизации функционала невязки в конечномерном пространстве, для реализации которой существует различные методы, в частности, градиентные и эволюционные алгоритмы [8].

В случае исследования деформирования пластин из композитных материалов применяются подходы, разработанные для однородных объектов в сочетании со специальными приемами типа осреднения и методов теории смесей. В литературе представлено множество работ, посвященных идентификации характеристик композитных материалов. Например, в статье [9] представлена задача идентификации упругих модулей композит-

ной пластины, решение которой основано на двухступенчатой процедуре идентификации, в которой на первом шаге модули Юнга и сдвига находятся с помощью генетического алгоритма, а на втором они корректируются на основе минимизации функционала невязки. В работе [10] решается подобная задача для композиционной панели с помощью метода конечных элементов на основе анализа вибрационного отклика.

При исследовании деформирования конструкций из существенно неоднородных материалов решение обратных задач значительно усложняется. В соответствующих краевых задачах коэффициенты становятся переменными, следовательно, прямые задачи можно решить лишь численно. Обратные задачи в этом случае имеют две постановки.

В первой постановке известна (измерена) функция смещения в конечном наборе точек, а решение линейной задачи реконструкции реализовано в [11], в которой обратную задачу достаточно эффективно удалось решить с помощью метода Галеркина.

Во второй постановке известна АЧХ смещения в некоторой точке. При этом обратная задача имеет существенно нелинейный характер, и для построения решения требуется установить операторные связи между восстанавливаемыми функциями и следами решений. Для такого рода задач авторами настоящего исследования разработаны итерационные подходы, применявшиеся для решения задач об идентификации характеристик упругих и вязкоупругих неоднородных стержней [12], неоднородного по толщине слоя [13–15] и других объектов.

В настоящей работе рассмотрена задача об установившихся колебаниях защемленной по контуру существенно неоднородной круговой в плане упругой пластины. Решение прямой задачи осуществлялось методом Галеркина. Обратная задача заключалась в определении переменной жесткости пластины по измеренному в некотором частотном диапазоне смещению в некоторой точке. Для решения этой нелинейной задачи был построен итерационный алгоритм, сочетающий решение прямой задачи на каждом шаге и стандартной некорректной задачи – интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с гладким ядром. Был проведен ряд вычислительных экспериментов по восстановлению функций разного вида, показавших эффективность предложенного подхода.

## *1. Постановка задачи*

В цилиндрической системе координат $r$, $\varphi$, $z$ рассмотрим установившиеся изгибные осесимметричные колебания круглой пластины радиуса $R$ и толщины $h$ с переменным цилиндрически симметричным распределением жесткости, находящейся под действием нагрузки $q(r)$. Будем предполагать, что жесткость пластины $D(r) = \dfrac{E(r)h^3}{12(1-\nu^2)}$ ($E(r)$ – модуль Юнга, $\nu = \text{const}$ – коэффициент Пуассона) является функцией только радиальной координаты. Тогда в рамках гипотез Кирхгофа–Лява [16] представим функции смещения в следующем виде:

$$u_r = -z\frac{\partial w}{\partial r},\quad u_\varphi = 0,\quad u_z = w, \tag{1.1}$$

где $w$ – функция прогиба пластины.

Для вывода уравнения колебаний пластины, аналогично [11], будем использовать вариационный принцип Гамильтона–Остроградского:

$$\delta(\Pi - K) = 0, \tag{1.2}$$

где функционалы П и К соответственно представляют собой потенциальную и кинетическую энергии.

В рассматриваемом случае, с учетом гипотез (1.1) и соображений симметрии, из (1.2) имеем

$$\delta(\Pi - K) = 2\pi\delta\left[\int_0^R D(r)\left\{\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)^2 + 2\nu\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right)\right\}rdr - 2\int_0^R q(r)w(r)rdr - \int_0^R \rho\omega^2 hrw^2(r)rdr\right] = 0, \tag{1.3}$$

откуда, варьируя, получим

$$2\int_0^R D(r)\left\{\frac{d^2w}{dr^2}\delta\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\frac{1}{r}\delta\left(\frac{dw}{dr}\right) + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\delta\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right) + \frac{d^2w}{dr^2}\frac{1}{r}\delta\left(\frac{dw}{dr}\right)\right)\right\}rdr - 2\int_0^R q(r)\delta w(r)rdr - 2\omega^2\int_0^R \rho hrw(r)\delta w(r)rdr = 0.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^R\left[(D(r)rw''(r,\kappa))'' - \left(\frac{D(r)w'(r,\kappa)}{r}\right)' - \nu(D(r)w''(r,\kappa))' + \nu(D(r)w'(r,\kappa))'' - \rho\omega^2 hrw(r) - q(r)r\right]\times \delta w(r)dr + \left(-(D(r)rw''(r))' + \frac{D(r)w'(r)}{r} + \nu D(r)w''(r) - \nu(D(r)w'(r))'\right)\delta w(r)\Big|_0^R + \left(\nu D(r)w'(r) + D(r)rw''(r)\right)\delta w'(r)\Big|_0^R = 0. \tag{1.4}$$

Собирая коэффициенты при одинаковых вариациях, получим уравнение колебаний пластины и дополнительные условия:

$$(D(r)rw''(r,\kappa))'' - \left(\frac{D(r)w'(r,\kappa)}{r}\right)' - \nu(D(r)w''(r,\kappa))' + \\ + \nu(D(r)w'(r,\kappa))'' - \rho\omega^2 hrw(r) - q(r)r = 0, \tag{1.5}$$

$$-(D(r)rw''(r))' + \frac{D(r)w'(r)}{r} + \nu D(r)w''(r) - \\ - \nu(D(r)w'(r))'\Big|_0^R = 0, \quad \nu D(r)w'(r) + D(r)rw''(r)\Big|_0^R = 0. \tag{1.6}$$

Введем безразмерные параметры и переменные $r = R\tilde{r}$, $D = D_0\tilde{D}$, $D_0 = D(R)$ (знак тильды в дальнейшем будем опускать). Тогда уравнение колебаний пластины в безразмерных переменных можно записать в виде

$$(D(r)rw''(r,\kappa))'' - \left(\frac{D(r)w'(r,\kappa)}{r}\right)' - \nu(D(r)w''(r,\kappa))' + \\ + \nu(D(r)w'(r,\kappa))'' - \kappa^4 rw(r,\kappa) - kq(r)r = 0. \tag{1.7}$$

Здесь $\kappa^4 = \dfrac{\rho\omega^2 hR^4}{D_0}$ – безразмерный параметр, характеризующий частоту колебаний, $k = \dfrac{qR^3}{D_0}$ – безразмерный коэффициент, характеризующий уровень нагружения. Отметим, что уравнение (1.7) отличается от приведенного в [11] тем, что не содержит производных от жесткости и может быть использовано при анализе колебаний неоднородных пластин с кусочно-непрерывной жесткостью. Краевые условия имеют вид (пластина жестко защемлена по краю)

$$w(1) = w'(1) = 0. \tag{1.8}$$

Ввиду симметричности пластины относительно центра, к условиям (1.8) нужно добавить условие

$$w'(0) = 0. \tag{1.9}$$

Дополнительные условия (1.6) в нуле приводят к еще одному ограничению вида

$$\lim_{r\to 0} r\left(\frac{1}{r}w'(r,\kappa)\right)' = 0. \tag{1.10}$$

Будем считать, что нагрузка сосредоточена при $r = r_0$ и имеет вид $q(r) = q\delta(r - r_0)$, где $\delta(r)$ – функция Дирака. Для постановки обратной задачи добавим к формулировке условие о том, что известна дополнительная информация о прогибе пластины в некотором частотном диапазоне $[\kappa_1, \kappa_2]$ при $r = r_0$:

$$w(r_0,\kappa) = f(\kappa), \quad [\kappa_1, \kappa_2]. \tag{1.11}$$

Обратная задача заключается в определении пары неизвестных функций $w(r,\kappa)$ и $D(r)$, удовлетворяющих (1.7)–(1.10) с учетом дополнительной информации (1.11). Обратная задача в такой постановке является существенно нелинейной, и для ее решения построен специальный итерационный процесс.

### *2. Метод решения прямой задачи*

При переменной жесткости краевая задача (1.7)–(1.10) имеет переменные коэффициенты, поэтому для нахождения решения прямой задачи необходимо применять численные схемы. Обычно для этого используются разностные схемы или метод пристрелки. В данном случае был использован метод Галеркина [17], причем в качестве координатных функций, удовлетворяющих условиям (1.9), (1.10), была выбрана система линейно-независимых функций:

$$\varphi_m(r) = (1 - r^2)^2 r^{2(m-1)}, \quad m = 1,\ldots,N, \tag{2.1}$$

а решение искалось в виде их линейной комбинации

$$w(r,\kappa) = \sum_{m=1}^{N} C_m(\kappa)\varphi_m(r), \tag{2.2}$$

где $C_m(\kappa)$ – коэффициенты разложения, зависящие от частотного параметра $\kappa$. Следуя методу Галеркина, исходя из условий ортогональности невязки $R_N$ базисным функциям $(R_N, \varphi_m) = 0$, построим линейную систему, из которой найдем $C_m(\kappa)$ и определим функцию прогиба в виде (2.2).

Для оценки правильности работы предложенного подхода было произведено сравнение результатов расчетов прогиба для однородной пластинки ($D(r) = \text{const}$, $\nu = 0.3$) при $\kappa = 0$ с известными аналитическими результатами, приведенными в [16]. Выражение для прогиба равномерно нагруженной однородной пластинки в случае жесткой заделки на краю имеет вид

$$w = \frac{q}{64D}(1 - r^2)^2. \tag{2.3}$$

Относительная погрешность по сравнению с точным решением (2.3) при использовании метода Галеркина для пяти координатных функций не превосходит $10^{-6}$, а для 10 функций – $10^{-10}$.

Кроме того, тестирование представленной схемы осуществлено при определении резонансных значений для пластины с постоянной жесткостью $D(r) = 1$. Найдены резонансные значения $\kappa_1 = 3.1962$, $\kappa_2 = 6.3064$, $\kappa_3 = 9.4447$; первые два значения практически совпадают, а третье несколько выше приведенных в литературе для квадратов этих величин (10.21, 39.78, 88.90 соответственно) [18].

В случае неоднородной пластины при квадратичном законе неоднородности вида $D(r) = 1 - 0.5r^2$ найдены резонансные значения $\kappa_1 = 2.9324$, $\kappa_2 = 5.9252$, $\kappa_3 = 8.9204$. График $w(0,\kappa)$ в этом случае представлен на рис. 1 сплошной линией.

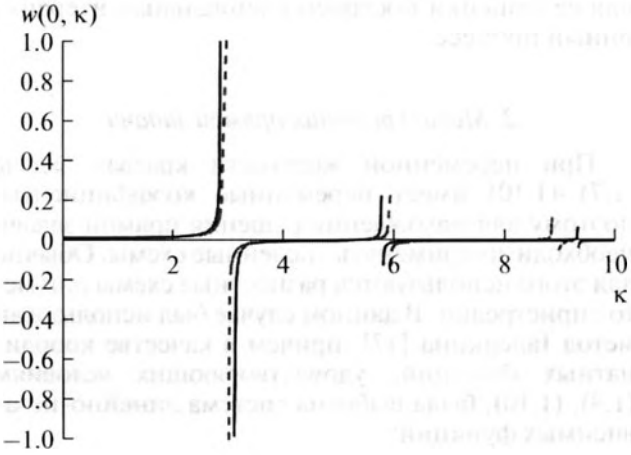


**Рис. 1.** График АЧХ функции прогиба в центре неоднородной круглой пластины.

В случае неоднородной пластины при экспоненциальном законе неоднородности вида $D(r) = e^{-0.6r}$ найдены резонансные значения $\kappa_1 = 2.8893$, $\kappa_2 = 5.7925$, $\kappa_3 = 9.3411$. График $w(0, \kappa)$ в этом случае представлен на рис. 1 пунктирной линией.

### *3. Описание итерационного процесса*

Итерационный процесс (схожий с описанным в работах [12–15]) для решения обратной задачи (1.7)–(1.11) по реконструкции цилиндрически симметричного распределения жесткости построен с помощью метода линеаризации, следуя которому представим каждую из функций краевой задачи (1.6)–(1.9) в виде разложения по формальному параметру ε:

$$D(r) = D_0(r) + \varepsilon D^1(r),$$
$$w(r, \kappa) = w_0(r, \kappa) + \varepsilon w^1(r, \kappa). \tag{3.1}$$

Осуществляя разложение по параметру ε, сформулируем набор однотипных краевых задач для начального приближения и поправок. Общая схема итерационного процесса решения обратной задачи приведена ниже.

1. Пусть известно $n-1$ приближение $D_{n-1}(r)$ неизвестной функции $D(r)$, тогда соответствующая функция прогиба $w_{n-1}(r, \kappa)$ определяется из решения соответствующей краевой (прямой) задачи вида (1.7)–(1.10) с помощью метода Галеркина, описанного в разделе 2.

2. Далее определим поправку $D^1(r)$, удовлетворяющую интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода, которое получено аналогично тому, как это сделано в работах [12–15]:

$$\int_0^1 D^1(r) K(r, \kappa) dr = q r_0 \left( f(\kappa) - w_{n-1}(r_0, \kappa) \right), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2],$$

$$K(r, \kappa) = r (w''_{n-1}(r, \kappa))^2 + \tag{3.2}$$
$$+ \frac{1}{r} (w'_{n-1}(r, \kappa))^2 + 2\nu w''_{n-1}(r, \kappa) w'_{n-1}(r, \kappa).$$

Интегральное уравнение (3.2) является интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода с неотрицательным ядром, его решение представляет собой некорректную задачу и требует использования регуляризующих алгоритмов. В данной работе применяется метод Тихонова А.Н. [19].

Уравнение (3.2) имеет ряд особенностей по сравнению с задачами для стержневых и слоистых структур [12–15]. Во-первых, в отличие от рассмотренных ранее задач для балок и слоистых структур, в силу условия (1.9) в точке $r = 0$ ядро интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода (3.2) обращается в ноль, $K(0, \kappa) = 0$, что приводит к некоторым трудностям при решении (3.2) даже при использовании метода регуляризации. В такой ситуации задача является сильно некорректной, и определить значение жесткости в нуле с приемлемой точностью невозможно. Это препятствие преодолено при помощи использования дополнительной априорной информации о жесткости в нуле, которая находится из статических экспериментов.

3. В итоге находим функцию $D_n(r) = D_{n-1}(r) + D^1(r)$, которая является приближенным решением обратной коэффициентной задачи (1.7)–(1.11).

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено одно из условий выхода: величина функционала невязки не станет меньше некоторого заданного малого числа $\varepsilon_0$, либо число итераций не превысит заранее заданное значение.

Начальное приближение для реализации описанного алгоритма выбиралось в классе линейных функций путем минимизации функционала невязки на компактном множестве априорной информации об ограниченности восстанавливаемых функций.

### *4. Вычислительные эксперименты*

Ниже представлены результаты вычислительных экспериментов по решению обратной задачи (1.7)–(1.11) о реконструкции неизвестной функции жесткости $D(r)$. Коэффициент Пуассона полагался известным и постоянным $\nu = 0.3$. Для реализации решения прямых задач в итерационном процессе в методе Галеркина использовано от 15 до 20 базисных функций. Для вычисления производных в ядре интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода (3.2) на каждом шаге итерационного процесса использовались сплайны 4-го порядка.

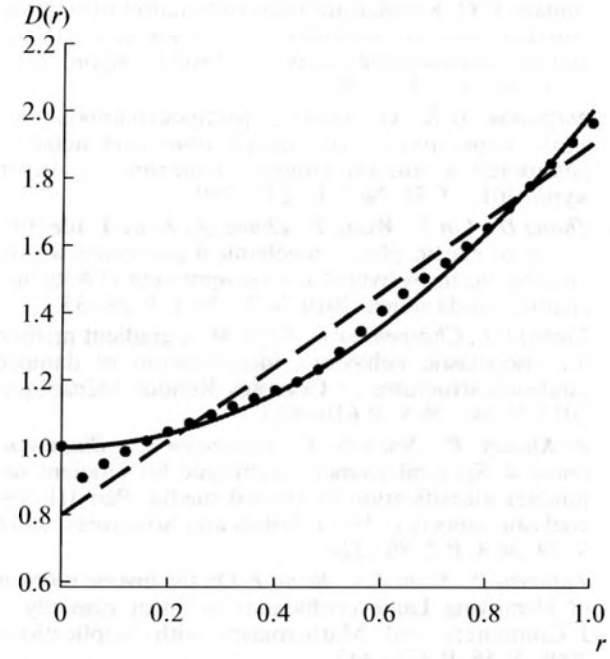


**Рис. 2.** Результат восстановления монотонно возрастающей функции жесткости.

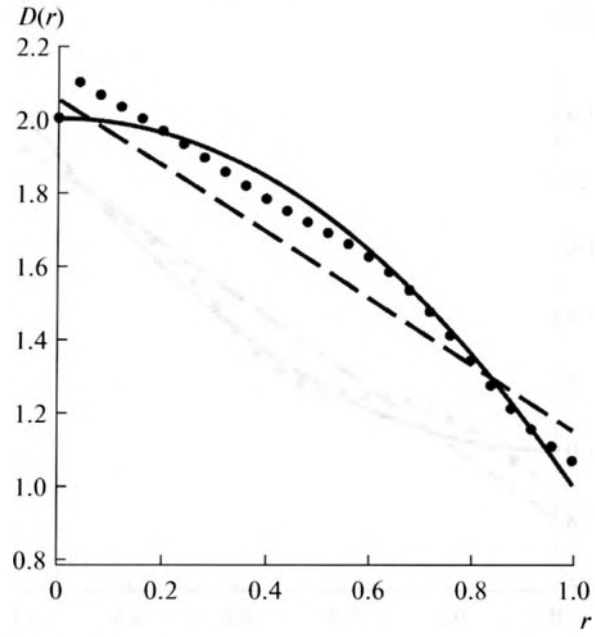


**Рис. 3.** Результат восстановления монотонно убывающей функции жесткости.

Выход из итерационного процесса во всех экспериментах производился либо по достижении 20 итераций, либо по условию малости невязки при $\varepsilon_0 = 10^{-5}$. В ходе экспериментов было выявлено, что наиболее благоприятным для процедуры реконструкции является частотный диапазон между второй и третьей резонансными частотами.

**Пример 1.** Рассмотрен случай монотонно возрастающей функции $D(r) = 1 + 2r^2$. Начальное приближение найдено в виде $D_0(r) = 1.1r + 0.8$, частотный диапазон $[\kappa_1, \kappa_2] = [3.62, 6.68]$. Для реконструкции потребовалось восемь итераций. Относительная погрешность реконструкции при этом не превосходит 4%. На рис. 2 представлены графики точного решения (сплошная линия), начального приближения (пунктирная линия), восстановленной функции (точки).

**Пример 2.** В случае монотонно убывающей функции $D(r) = 2 - r^2$ начальное приближение найдено в виде $D_0(r) = 2.05 - 0.9r$, частотный диапазон $[\kappa_1, \kappa_2] = [3.57, 6.97]$. Для реконструкции потребовалось семь итераций. Относительная погрешность при этом не превосходит 5%. На рис. 3 представлены графики точного решения (сплошная линия), начального приближения (пунктирная линия), восстановленной функции (точки).

**Пример 3.** В случае немонотонной функции $D(r) = e^{-(r-0.5)^2/0.05} + 1$ начальное приближение найдено в виде $D_0(r) = 1.5$, частотный диапазон $[\kappa_1, \kappa_2] = [3.7, 6.75]$. Для реконструкции потребовалось 13 итераций. Относительная погрешность при этом не превосходит 6%. На рис. 4 представлены графики точного решения (сплошная линия), начального приближения (пунктирная линия), восстановленной функции (точки).

Рассмотрено также влияние аддитивного зашумления дополнительной информации на погреш-

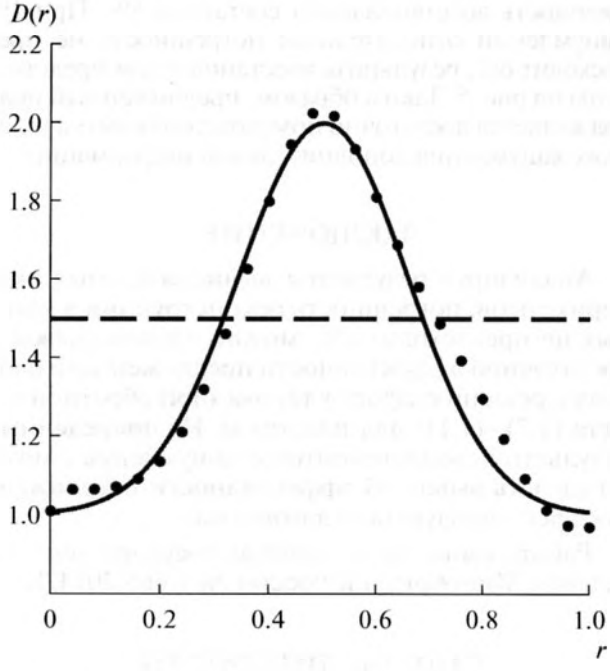


**Рис. 4.** Результат восстановления немонотонной функции жесткости.

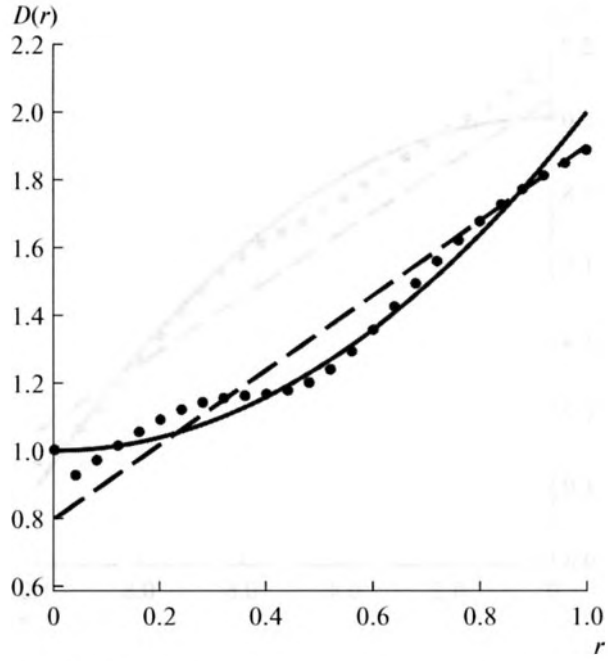


**Рис. 5.** Результат восстановления функции жесткости с зашумлением дополнительной информации на 1%.

ность восстановления, что моделирует реальный эксперимент. Зашумление моделировалось с помощью соотношения $f_\delta(\kappa) = f(\kappa)(1 + \delta\gamma)$, где $\delta$ – величина зашумления, $\gamma$ – случайная величина с равномерным законом распределения.

При зашумлении дополнительной информации в примере 1 получились следующие результаты. В случае зашумления на 0.1% относительная погрешность восстановления составила 5%. При 1% зашумлении относительная погрешность не превосходит 6%, результаты восстановления представлены на рис. 5. Таким образом, предложенный подход является достаточно помехоустойчивым в условиях зашумления дополнительной информации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализируя результаты вычислительных экспериментов, погрешность реконструкции в которых не превосходит 6%, можно сделать вывод о достаточной эффективности предложенного подхода к решению сформулированной обратной задачи (1.7)–(1.11) для пластины. Из приведенных результатов экспериментов с зашумлением можно сделать вывод об эффективности предложенного регуляризующего алгоритма.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России № 9.665.2014/К.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
2. *Папков С.О.* Колебания прямоугольной ортотропной пластины со свободными краями: анализ и решение бесконечной системы // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 152–160.
3. *Андронов И.В.* О волнах, распространяющихся вдоль периодического набора точечных неоднородностей в тонкой упругой пластине // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 3. С. 291–299.
4. *Zhang H., Lin X., Wang Y., Zhang Q., Kang Y.* Identification of elastic-plastic mechanical properties for bimetallic sheets by hybrid-inverse approach // Acta mechanica solida sinica. 2010. V. 23. № 1. P. 29–35.
5. *Elkhaldi I., Charpentier I., Daya M.* A gradient method for viscoelastic behaviour identification of damped sandwich structures // Comptes Rendus Mécanique. 2012. V. 340. № 8. P. 619–623
6. *Al-Khoury R., Scarpas A., Kasbergen C., Blaauwendraad J.* Spectral element technique for efficient parameter identification of layered media. Part III: viscoelastic aspects // Int. J. Solids and Structures. 2002. V. 39. № 8. P. 2189–2201.
7. *Jadamba B., Khan A.A., Raciti F.* On the inverse problem of identifying Lame coefficients in linear elasticity // J. Computers and Mathematics with Applications. 2008. V. 56. P. 431–443.
8. *Емельянов В.В., Курейчик В.В., Курейчик В.М.* Теория и практика эволюционного моделирования. М.: Физматлит, 2003. 432 с.
9. *Diveyev B., Butiter I., Shcherbina N.* Identifying the elastic modules of composite plates by using high-order theories. Theoretical-experimental approach // Mechanics of Composite Materials. 2008. V. 44. № 2. P. 139–144.
10. *Kovalovs A., Rucevskis S.* Identification of elastic properties of composite plate // J. IOP Conf. Ser.: Material Sciences and Engineering. 2011. V. 23. № 1. P. 1–7.
11. *Аникина Т.А., Ватульян А.О., Углич П.С.* Об определении переменной жесткости круглой пластины // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17. № 6. С. 26–35.
12. *Аникина Т.А., Богачев И.В., Ватульян А.О.* Об идентификации неоднородных характеристик вязкоупругих стержней при изгибных колебаниях // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17. № 1. С. 1016–1023.
13. *Богачев И.В., Ватульян А.О., Явруян О.В.* Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 6. С. 723–730.
14. *Vatulyan A.O., Yavruyan O.V., Bogachev I.V.* Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer // Int. J. Solids and Structures. 2014. V. 51. № 11–12. P. 2238–2243.
15. *Богачев И.В., Ватульян А.О., Явруян О.В.* Идентификация неоднородных свойств ортотропного упругого слоя // Акуст. журн. 2013. Т. 9. № 6. С. 752–758.
16. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
17. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
18. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
19. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.