АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2016, том 62, № 6, с. 648–656

## КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 51-73

# ДИФРАКЦИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ВОЛНЫ НА ИМПЕДАНСНОМ ОТРЕЗКЕ ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ ПАДЕНИИ

**© 2016 г. А. И. Корольков, А. В. Шанин**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет*
*119991 ГСП-01, Москва, Ленинские горы*
*E-mail: korolkov@physics.msu.ru*

Поступила в редакцию 14.12.2015 г.

Рассматривается плоская задача дифракции высокочастотной акустической волны на отрезке с импедансными граничными условиями. Угол падения волны на отрезок считается малым (скользящим). В настоящей работе обобщается метод, развитый авторами ранее для идеального отрезка (с граничными условиями Дирихле или Неймана). Выводится выражение для диаграммы направленности рассеянного поля. Доказывается оптическая теорема для параболического уравнения. Вычисляется амплитуда поверхностной волны, а также проводится численная проверка результатов с помощью метода интегрального уравнения.

*Ключевые слова:* дифракция на импедансной полосе, параболическое уравнение теории дифракции, оптическая теорема.

**DOI:** 10.7868/S0320791916050075

## ВВЕДЕНИЕ

Плоская задача дифракции на отрезке является одной из классических задач теории дифракции. Данная геометрия представляет собой сечение трехмерной задачи дифракции на полосе, а последняя имеет практическую ценность для акустики и радиофизики. Множество работ посвящено отрезку с идеальными граничными условиями. Краткий обзор этих работ может быть найден в [1]. Кроме того, в [1] задача дифракции на идеальном отрезке была решена авторами настоящей работы в рамках параболического приближения при скользящем падении. Стоит отметить, что одна из первых попыток применения метода параболического уравнения к задаче дифракции на идеальной полосе была предпринята в [2]. В настоящей работе результаты, полученные в [1], распространяются на случай импедансных граничных условий.

Задача дифракции на импедансном отрезке исследована гораздо хуже, и точное решение этой задачи неизвестно. Попытка аналитического рассмотрения данной задачи была предпринята авторами в [3, 4]. Существует целый ряд работ, в которых решение данной задачи строится с помощью тех или иных приближенных методов. В [5, 6] задача решается с помощью построения дифракционного ряда, в [7, 8] – путем численного решения пары интегральных уравнений, в [9–11] – с использованием гибридной техники, сочетающей в себе аналитические и численные методы, в [12] – с помощью приближенного метода Винера–Хопфа, в [13] используется модифицированная теория физической оптики. Результаты, полученные в этих работах, громоздки и зачастую выводятся путем трудоемких вычислений. В настоящей работе авторами предлагается простое решение задачи об импедансном отрезке, справедливое в высокочастотном приближении при скользящем падении и относительно малых импедансах.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на плоскости $(x, y)$ полное поле $\tilde{u}(x, y)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\tilde{u} + k^2\tilde{u} = 0 \tag{1}$$

везде, кроме отрезка $y = 0$, $-a < x < 0$ (см. рис. 1), на сторонах которого выполняются импедансные граничные условия

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n} + \eta\tilde{u} = 0, \tag{2}$$

здесь $n$ – это вектор нормали к полосе (вверх в верхней полуплоскости, и вниз в нижней), а $\eta$ – импеданс. На импеданс накладывается условие неизлучения энергии:

$$\mathrm{Im}[\eta] \geq 0. \tag{3}$$

Зависимость от времени выбрана так, что волна, распространяющаяся в положительном направлении, имеет вид $\exp(ikx)$, т.е. временная за-

висимость всех переменных величин имеет вид $\exp(-i\omega t)$. Мы предполагаем, что волновое число $k$ имеет малую положительную мнимую часть в соответствии с принципом предельного поглощения.

Полное поле представляется в виде суммы падающего поля $\tilde{u}^{\text{in}}$ и рассеянного поля $\tilde{u}^{\text{sc}}$:

$$\tilde{u} = \tilde{u}^{\text{in}} + \tilde{u}^{\text{sc}}, \tag{4}$$

где

$$\tilde{u}^{\text{in}} = \exp\{ikx\cos\theta_{\text{in}} - iky\sin\theta_{\text{in}}\}. \tag{5}$$

Здесь $\theta_{\text{in}}$ – угол падения. Кроме того, требуется выполнение условий Мейкснера в вершинах и условий излучения Зоммерфельда на бесконечности.

Введем диаграмму направленности рассеянного поля $f(\tilde{\theta},\theta_{\text{in}})$:

$$\tilde{u}^{\text{sc}}(x,y) = f(\tilde{\theta},\theta_{\text{in}})\sqrt{\frac{k}{2\pi ir}}e^{ikr} + o\left((kr)^{-1/2}\right),$$
$$\operatorname{tg}\tilde{\theta} = \frac{y}{x},\quad r = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{6}$$

## ПЕРЕХОД К ПАРАБОЛИЧЕСКОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Перейдем к рассмотрению дифракции высокочастотной волны при скользящем падении, то есть будем считать, что выполняются следующие условия:

$$ka \gg 1,\quad \theta_{\text{in}} \ll 1. \tag{7}$$

Рассматривается волновой процесс, при котором волна распространяется почти параллельно оси $x$, а ее угловой спектр достаточно узок. При этом справедливо параболическое приближение [14]. Переход к параболическому приближению осуществляется следующим образом. Из полного поля выделяется осциллирующий множитель:

$$\tilde{u} = \exp(ikx)u,$$

а уравнение Гельмгольца заменяется параболическим уравнением:

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = 0. \tag{8}$$

Параболическое приближение является стандартным инструментом теории дифракции [15, 16]. Более подробно вопросы применимости параболического приближения к задачам дифракции на экранах обсуждаются авторами в работе [17].

Падающая волна в параболическом приближении имеет вид

$$u^{\text{in}} = \exp\left\{-ikx\frac{\theta_{\text{in}}^2}{2} - iky\theta_{\text{in}}\right\}. \tag{9}$$

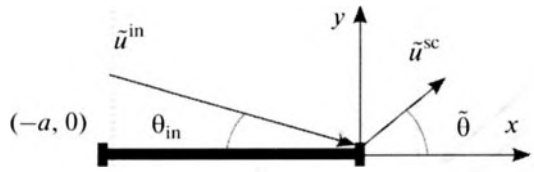


**Рис. 1.** Геометрия задачи.

Построим параболический аналог выражения (6). При фиксированных $a$ и $k$ на большом расстоянии от полосы рассеянное поле представимо в виде

$$u^{\text{sc}}(x,y) = S(\theta,\theta_{\text{in}})g(x,y) + o((kx)^{-1/2}),$$
$$\theta = y/x. \tag{10}$$

Здесь

$$g(x,y) = \sqrt{\frac{k}{2\pi ix}}\exp\left\{\frac{iky^2}{2x}\right\} \tag{11}$$

является функцией Грина параболического уравнения бесконечной плоскости. Будем называть величину $S$ диаграммой направленности параболической задачи. Сравнивая (10) с (6), получим связь между диаграммами направленности $f(\tilde{\theta},\theta_{\text{in}})$ и $S(\theta,\theta_{\text{in}})$:

$$S(\theta,\theta_{\text{in}}) \approx f(\tilde{\theta},\theta_{\text{in}}). \tag{12}$$

Приближенный характер формулы связан с тем, что параболическое приближение справедливо только для узкой области углового спектра. Более того, формула $\theta \approx \tilde{\theta}$ выполняется лишь для малых углов.

## ИМПЕДАНСНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ПОДХОД МАЛЮЖИНЦА

В монографии [18] был разработан метод, позволяющий сводить задачи с импедансными граничными условиями к задачам с условиями Дирихле. Идея метода проста. В нашем случае она может быть изложена следующим образом. Вместо поля $u(x,y)$ рассматривается поле

$$\zeta(x,y) = T_{\pm}[u(x,y)] \equiv \left(\pm\frac{\partial}{\partial y} + \eta\right)u(x,y). \tag{13}$$

Верхний знак берется для поля в верхней полуплоскости, а нижний – для поля в нижней. Операторы $T_{\pm}$ коммутируют с оператором параболического уравнения, т.е. поле $\zeta(x,y)$ удовлетворяет параболическому уравнению. В силу (2) $\zeta(x,y)$ на границе удовлетворяет условиям Дирихле:

$$\zeta(x,0) = 0,\quad -a < x < 0.$$

Таким образом, необходимо найти решение задачи дифракции для полосы с граничными условиями Дирихле (такое решение уже было по-

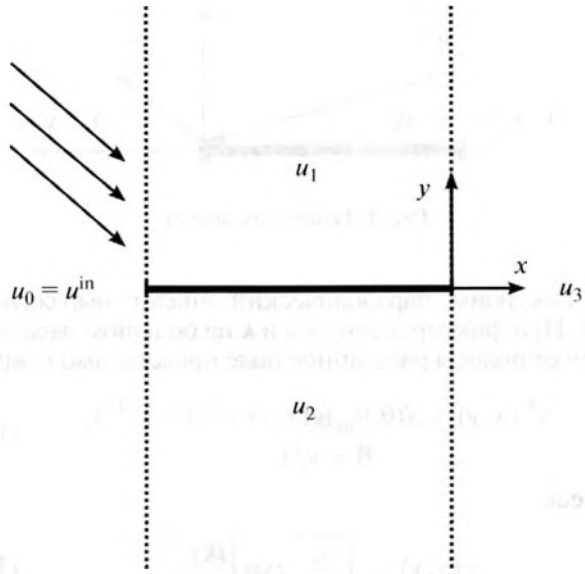


**Рис. 2.** Геометрия областей $u_0, u_1, u_2, u_3$.

строено в [1]), а потом применить к полученному решению обратный оператор $T_{\pm}^{-1}$.

Вместо непосредственного вычисления обратного оператора авторы решили пойти более простым путем – подобрать решение, удовлетворяющее импедансным граничным условиям.

## РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Напомним основные свойства параболического уравнения. Во-первых, в силу того, что в (8) стоит первая производная по $x$, параболическое уравнение описывает только волны, распространяющиеся слева направо. Во-вторых, в любой области $x' < x < x''$ без препятствий поле $u(x, y)$ описывается следующей интегральной формулой:

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x',y')g(x-x',y-y')dy', \tag{14}$$

где $g(x, y)$ дается формулой (11). Таким образом, если мы определим поле $u(x, y)$ на прямой $x = 0$, $\infty > y > -\infty$, задача будет решена. Естественно разбить плоскость на четыре области. Назовем поле в области $\infty > y > -\infty$, $-\infty < x \le -a$ символом $u_0$, поле в области $y \ge 0$, $-a \le x \le 0$ символом $u_1$, поле в области $y \le 0$, $-a < x < 0$ символом $u_2$, поле в области $x > a$ символом $u_3$ (см. рис. 2).

Поле $u_0(x, y)$ представляет собой только падающую плоскую волну (9). Поле $u_1(x, y)$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$u_1(-a,y) = \exp\left\{ika\theta_{in}^2/2\right\}\exp\{-iky\theta_{in}\}, \quad y > 0, \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \eta\right)u_1(x,0) = 0, \quad x > -a, \tag{16}$$

а поле $u_2(x, y)$ – условиям

$$u_2(-a,y) = \exp\left\{ika\theta_{in}^2/2\right\}\exp\{-iky\theta_{in}\}, \quad y < 0, \tag{17}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + \eta\right)u_2(x,0) = 0, \quad x > -a. \tag{18}$$

Покажем, что выражения для полей

$$u_1(x,y) = \exp\left\{ika\theta_{in}^2/2\right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(y')g(x+a,y-y')dy', \tag{19}$$

$$u_2(x,y) = \exp\left\{ika\theta_{in}^2/2\right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(y')g(x+a,y-y')dy', \tag{20}$$

$$\psi_1(y) = \begin{cases} \exp\{-ik\theta_{in}y\}, & y > 0, \\ -\dfrac{\eta - ik\theta_{in}}{\eta + ik\theta_{in}}\exp\{ik\theta_{in}y\} + \\ + \dfrac{2\eta}{\eta + ik\theta_{in}}\exp\{-\eta y\}, & y < 0, \end{cases} \tag{21}$$

$$\psi_2(y) = \begin{cases} -\dfrac{\eta + ik\theta_{in}}{\eta - ik\theta_{in}}\exp\{ik\theta_{in}y\} + \\ + \dfrac{2\eta}{\eta - ik\theta_{in}}\exp\{\eta y\}, & y > 0, \\ \exp\{-ik\theta_{in}y\}, & y < 0, \end{cases} \tag{22}$$

удовлетворяют условиям (15)–(18). В качестве примера возьмем $u_1(x, y)$. Прежде всего, несмотря на наличие экспоненциально растущих множителей, сходимость интегралов обеспечивается малой положительной мнимой частью $k$ и, как следствие, сверхэкспоненциальным убыванием функции Грина (11). Условие (15) гарантируется первой строчкой (21) и непрерывностью по $x$ сверточной формулы (18). Перейдем ко второму условию. Применим оператор $T_+$ к (19). Заметим, что оператор $T_+$ коммутирует с интегральным оператором. Далее,

$$T_+[\psi_1] = \begin{cases} (\eta - ik\theta_{in})\exp\{-iky\theta_{in}\}, & y > 0, \\ -(\eta - ik\theta_{in})\exp\{iky\theta_{in}\}, & y < 0. \end{cases} \tag{23}$$

Функция $\psi_1$ непрерывна (именно для этого нужен второй член во второй строчке), поэтому

$T_+[\psi_1]$ не содержит дельта-функции. Функция (23) нечетна, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_+[\psi_1](y')g(x,0-y')dy' = \\ = T_+\left[\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(y')g(x,0-y')dy'\right] = 0. \quad (24)$$

Формулы (19) и (20) дают представления полей $u_1$ и $u_2$. Используя полученные значения на линии $x' = 0$, можно вычислить поле $u_3$ по формуле (14).

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ $S(\theta,\theta_{\text{in}})$

Диаграмма направленности может быть вычислена по формуле

$$S(\theta,\theta_{\text{in}}) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{sc}}(0,y)\exp\{-iky\theta\}dy. \quad (25)$$

Последнее выражение следует из (14). Покажем это. Поле $u^{\text{sc}}(x,y)$ при $x > 0$ записывается как

$$u^{\text{sc}}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{sc}}(0,y')g(x,y-y')dy' = \sqrt{\frac{k}{2\pi ix}}\times \\ \times\int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{sc}}(0,y')\exp\left\{\frac{ik(y-y')^2}{2x}\right\}dy' = \sqrt{\frac{k}{2\pi ix}}\times \quad (26) \\ \times\exp\left\{\frac{iky^2}{2x}\right\}\int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{sc}}(0,y')\exp\left\{-\frac{ikyy'}{x}+\frac{ik(y')^2}{2x}\right\}dy'.$$

В последнем выражении перейдем к пределу при больших $x, y$ при постоянном $\theta = y/x$. Получим (10) с диаграммой (25).

Выделим в $u_1$ и $u_2$ рассеянные компоненты (вычитая $u^{\text{in}}$). Воспользуемся тем, что для $x_2 > x_1$

$$u^{\text{in}}(x_2,y) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{in}}(x_1,y')g(x_2-x_1,y-y')dy'. \quad (27)$$

Тогда

$$u_1^{\text{sc}}(x,y) = \exp\left\{ika\theta_{\text{in}}^2/2\right\}\times \\ \times\int_{-\infty}^{0}\psi_1^{\text{sc}}(y')g(x+a,y-y')dy', \quad (28)$$

$$u_2^{\text{sc}}(x,y) = \exp\left\{ika\theta_{\text{in}}^2/2\right\}\times \\ \times\int_{0}^{\infty}\psi_2^{\text{sc}}(y')g(x+a,y-y')dy', \quad (29)$$

$$\psi_1^{\text{sc}}(y) = -\frac{\eta-ik\theta_{\text{in}}}{\eta+ik\theta_{\text{in}}}\exp\{ik\theta_{\text{in}}y\} - \\ -\exp\{-ik\theta_{\text{in}}y\} + \frac{2\eta}{\eta+ik\theta_{\text{in}}}\exp\{-\eta y\}, \quad (30)$$

$$\psi_2^{\text{sc}}(y) = -\frac{\eta+ik\theta_{\text{in}}}{\eta-ik\theta_{\text{in}}}\exp\{ik\theta_{\text{in}}y\} - \\ -\exp\{-ik\theta_{\text{in}}y\} + \frac{2\eta}{\eta-ik\theta_{\text{in}}}\exp\{\eta y\}. \quad (31)$$

Теперь, используя (28)–(31) и (25), можно выписать диаграмму направленности:

$$S(\theta,\theta_{\text{in}}) = \exp\left\{\frac{ika\theta_{\text{in}}^2}{2}\right\}\left(-Y(-\theta,\theta_{\text{in}}) - \right. \\ -\frac{\eta-ik\theta_{\text{in}}}{\eta+ik\theta_{\text{in}}}Y(-\theta,-\theta_{\text{in}}) - Y(\theta,-\theta_{\text{in}}) - \\ -\frac{\eta+ik\theta_{\text{in}}}{\eta-ik\theta_{\text{in}}}Y(\theta,\theta_{\text{in}}) + \frac{2\eta}{\eta+ik\theta_{\text{in}}}\times \\ \left.\times Y(-i\eta/k,-\theta) + \frac{2\eta}{\eta-ik\theta_{\text{in}}}Y(-i\eta/k,\theta)\right), \quad (32)$$

где

$$Y(\theta_1,\theta_2) = \sqrt{\frac{k}{2\pi ia}}\times \\ \times\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\exp\left\{ik\left(\theta_1y_1+\theta_2y_2+\frac{(y_1+y_2)^2}{2a}\right)\right\}dy_1dy_2. \quad (33)$$

Вычислим интеграл (33). Для этого запишем его в следующем виде:

$$Y(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2}\exp\left\{-ika\frac{\theta_2^2}{2}\right\}\times \\ \times\int_0^{\infty}\exp\{ik(\theta_1-\theta_2)y_1\}\operatorname{erfc}\left(\left(\theta_2+\frac{y_1}{a}\right)\sqrt{\frac{ka}{2i}}\right)dy_1, \quad (34)$$

где

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty}e^{-\tau^2}d\tau.$$

Интегрируя (34) по частям, получим

$$Y(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2ik(\theta_1-\theta_2)}\left(\exp\left\{-ika\frac{\theta_1^2}{2}\right\}\times \right. \\ \left.\times\operatorname{erfc}\left(\theta_1\sqrt{\frac{ka}{2i}}\right) - \exp\left\{-ika\frac{\theta_2^2}{2}\right\}\operatorname{erfc}\left(\theta_2\sqrt{\frac{ka}{2i}}\right)\right). \quad (35)$$

Формулы (32) и (35) дают выражение диаграммы направленности в однократных квадратурах.

## ОПТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

В [1] было введено понятие полного сечения рассеяния для параболической задачи. Была также доказана оптическая теорема для полосы с идеальными граничными условиями. Ниже будет сформулирована оптическая теорема для полосы с импедансными граничными условиями. Теорема формулируется без доказательства, так как оно полностью аналогично доказательству из [1].

**Теорема.** Полное сечение рассеяния $\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} |u^{\mathrm{sc}}(x,y)|dy$, $x > 0$ связано с амплитудой рассеяния вперед $S(-\theta_{\mathrm{in}}, \theta_{\mathrm{in}})$ следующим соотношением:

$$\Sigma = -2\,\mathrm{Re}[S(-\theta_{\mathrm{in}}, \theta_{\mathrm{in}})] - \\ - 2\,\mathrm{Im}[\eta]\int_{-a}^{0}\left(|u(x,+0)|^2 + |u(x,-0)|^2\right)dx. \tag{36}$$

Второй член в правой части формулы (36), взятый со знаком минус, называется сечением поглощения и представляет собой энергию, поглощенную полосой. Сумма сечения поглощения и полного сечения рассеяния называется сечением экстинкции (см. [19, 20]).

## ПОВЕРХНОСТНАЯ ВОЛНА

Вернемся к форме решения (28) и (30). Член

$$u_1^{\mathrm{sp}}(x,y) = \exp\left\{ika\theta_{\mathrm{in}}^2/2\right\}\times \\ \times\int_{-\infty}^{0}\frac{2\eta}{\eta + ik\theta_{\mathrm{in}}}\exp\{-\eta y'\}g(x+a, y-y')dy'$$

отвечает за поверхностную волну и поверхностную полутень (т. е. зону формирования поверхностной волны) в области $-a < x < 0$, $y > 0$. Перепишем его в виде

$$u_1^{\mathrm{sp}}(x,y) = \frac{\eta}{\eta + ik\theta_{\mathrm{in}}}\times \\ \times\exp\left\{\frac{ika\theta_{\mathrm{in}}^2}{2}\right\}\exp\left\{i\frac{\eta^2(a+x)}{2k} - \eta y\right\}\times \\ \times\mathrm{erfc}\left[-\sqrt{\frac{i}{2k(a+x)}}(\eta(a+x) + iky)\right]. \tag{37}$$

Для простоты будем считать, что $\mathrm{Im}[\eta] = 0$. Рассмотрим случай $\mathrm{Re}[\eta] > 0$. Будем также считать, что $ky \ll \eta(a+x)$, т.е. будем анализировать поле вблизи отрезка. Для функции $\mathrm{erfc}(z)$ справедлива асимптотическая формула

$$\mathrm{erfc}(z) = \begin{cases} 2 + \dfrac{e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}}, & \mathrm{Re}[z] \to -\infty, \\ \dfrac{e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}}, & \mathrm{Re}[z] \to \infty. \end{cases} \tag{38}$$

Константа в этой формуле связана с вкладом от перевальной точки. При положительных импедансах контур интегрирования в (38) проходит через точку перевала и, следовательно,

$$u_1^{\mathrm{sp}}(x,y) \approx \frac{2\eta}{\eta + ik\theta_{\mathrm{in}}}\exp\left\{\frac{ika\theta_{\mathrm{in}}^2}{2}\right\}\times \\ \times\exp\left\{i\frac{\eta^2(a+x)}{2k} - \eta y\right\} - \\ - \frac{2}{\eta + ik\theta_{\mathrm{in}}}\exp\left\{\frac{ika\theta_{\mathrm{in}}^2}{2}\right\}g(x+a, y). \tag{39}$$

Первый член в (39) представляет собой поверхностную волну, а второй – краевую волну, убывающую как $(x+a)^{-1/2}$ вдоль полосы. При $\mathrm{Re}[\eta] < 0$ следует пользоваться второй асимптотикой из (38), т.е. в выражении для поля присутствует только краевая волна, а поверхностная волна не возбуждается. При $(x+a) \sim \dfrac{k}{\eta^2}$ мы попадем в переходную область между асимптотиками – в зону полутени. Длина этой полутени вдоль оси $x$ соответственно имеет порядок $\dfrac{k}{\eta^2}$.

Введем обозначение для амплитуды поверхностной волны:

$$A = \frac{2\eta}{\eta + ik\theta_{\mathrm{in}}}. \tag{40}$$

В Приложении А амплитуда поверхностной волны вычисляется путем решения точной задачи с помощью метода Винера–Хопфа. Устанавливаются условия, при которых точная амплитуда близка к $A$.

## ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для проверки корректности результатов, полученных выше, было произведено численное моделирование. Сравнение производилось с точным решением, полученным с помощью метода интегрального уравнения (см. Приложение Б).

Известно, что параболическое приближение хорошо работает при $\sqrt[4]{ka}\theta_{\mathrm{in}} \ll 1$ и $ka \gg 1$. В случае импедансных граничных условий также важным параметром является число $\eta\sqrt{a/k}$. При

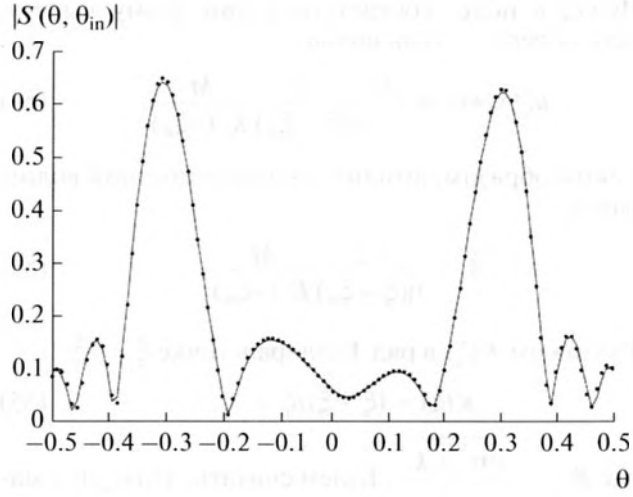


**Рис. 3.** Модуль диаграммы направленности при $ka = 200$, $\eta a = 20$, $\theta_{in} = 0.3$. Сплошная линия соответствует результатам точного счета, прерывистая – результатам вычисления с помощью формулы (32).

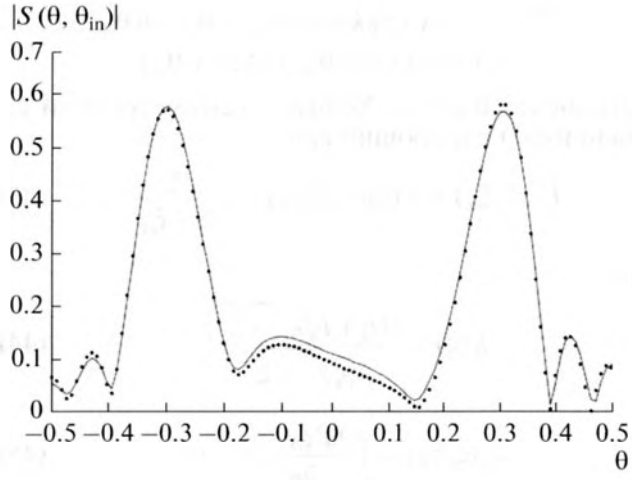


**Рис. 4.** Модуль диаграммы направленности при $ka = 200$, $\eta a = 60$, $\theta_{in} = 0.3$. Сплошная линия соответствует результатам точного счета, прерывистая – результатам вычисления с помощью формулы (32).

$\eta\sqrt{a/k} \ll 1$ поверхностная волна не успевает развиться и импеданс можно считать малым. Было проведено множество численных экспериментов в диапазоне параметров, удовлетворяющих этим ограничениям, и везде формула (32) давала хорошее совпадение с точным решением. Более того, параболическое приближение дает результаты, близкие к точным, также и на границе его области применимости. На рис. 3 представлены результаты численного моделирования при $ka = 200$, $\eta a = 20$, $\theta_{in} = 0.3$, т.е. из трех условий хорошо выполнено только условие $ka \gg 1$, а $\sqrt[4]{ka}\theta_{in} \sim 1$ и $\eta\sqrt{a/k} \sim 1$. Несмотря на это, формула (32) дает хорошее совпадение с точным решением. На рис. 4 представлены результаты моделирования при $ka = 200$, $\eta a = 60$, $\theta_{in} = 0.3$. Как и следовало ожидать, с увеличением значения импеданса точность параболического решения падает.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе были развиты идеи, изложенные в [1], в применении к задаче дифракции на импедансной полосе. Было получено выражение в одиночных квадратурах для диаграммы направленности в параболическом приближении. Кроме того, была произведена численная проверка результатов. Также была сформулирована оптическая теорема для параболической задачи и вычислена амплитуда поверхностной волны.

Работа поддержана грантом РФФИ 14-02-00573 и грантом Президента Российской Федерации по программе поддержки ведущих научных школ № НШ-283.2014.2.

Авторы выражают свою глубокую благодарность проф. И.В. Андронову за активное обсуждение материала данной статьи.

### *Приложение А. Решение задачи об импедансной полуплоскости методом Винера–Хопфа*

Ниже строится точное решение задачи дифракции на импедансной полуплоскости и рассчитывается амплитуда поверхностной волны. Производится сравнение полученного выражения с (40).

Пусть импедансная полупрямая занимает область $y = 0$, $x > 0$. Пусть на импедансной полуплоскости выполняется граничное условие (2). Будем решать задачу для уравнения Гельмгольца (1) с падающей волной (5). Пользуясь тем фактом, что импеданс на обеих сторонах полуплоскости выбран одинаковым, представим рассеянное поле в виде полусуммы симметричной и антисимметричной части:

$$\tilde{u}^{sc} = \frac{1}{2}\left(u^{s} + u^{a}\right), \tag{42}$$

где

$$u^{s}(x,-y) = u^{s}(x,y), \quad u^{a}(x,-y) = -u^{a}(x,y).$$

Падающие волны для симметричного и антисимметричного случая имеют вид

$$u^{in,s}(x,y) = \exp\{ikx\cos\theta_{in} - iky\sin\theta_{in}\} + \\ + \exp\{ikx\cos\theta_{in} + iky\sin\theta_{in}\},$$

$$u^{\text{in,a}}(x,y) = \exp\{ikx\cos\theta_{\text{in}} - iky\sin\theta_{\text{in}}\} - \\ - \exp\{ikx\cos\theta_{\text{in}} + iky\sin\theta_{\text{in}}\}.$$

Уравнение Винера–Хопфа для симметричной задачи имеет следующий вид:

$$U_-(\xi,\xi_*) + K(\xi)V_+(\xi,\xi_*) = -\frac{2i}{\xi+\xi_*}, \tag{43}$$

где

$$K(\xi) = \frac{i\left(\eta + i\sqrt{k^2-\xi^2}\right)}{\eta\sqrt{k^2-\xi^2}}, \tag{44}$$

$$V_+(\xi,\xi_*) = \int_0^\infty \frac{\partial u^{\text{s}}(x,0)}{\partial n} e^{i\xi x}dx, \tag{45}$$

$$U_-(\xi,\xi_*) = \int_{-\infty}^0 u^{\text{s}}(x,0)e^{i\xi x}dx, \tag{46}$$

$$\xi_* = k\cos\theta_{\text{in}}. \tag{47}$$

Функция $V_+(\xi,\xi_*)$ является аналитической по переменной $\xi$ в верхней полуплоскости, а функция $U_-(\xi,\xi_*)$ – в нижней.

Точное решение уравнения (43) было получено в [21] путем непосредственной факторизации символа $K(\xi)$. Выпишем формальное решение. Пусть

$$K(\xi) = K_+(\xi)K_-(\xi), \tag{48}$$

где функция $K_+(\xi)$ аналитична и не имеет нулей в верхней полуплоскости, а $K_-(\xi)$ – в нижней (также выполняются требования роста, см. [22]). Тогда

$$\frac{U_-(\xi,\xi_*)}{K_-(\xi)} + K_+(\xi)V_+(\xi,\xi_*) = \\ = -\frac{2i}{\xi+\xi_*}\frac{1}{K_-(\xi)} + \frac{2i}{\xi+\xi_*}\frac{1}{K_-(-\xi_*)}, \tag{49}$$

$$V_+(\xi) = -\frac{2i}{\xi+\xi_*}\frac{K_+^{-1}(\xi)}{K_-(-\xi_*)}. \tag{50}$$

Рассеянное поле на импедансной полуплоскости может быть вычислено путем обращения (45):

$$u^{\text{s}}(x,+0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\frac{1}{i\sqrt{k^2-\xi^2}}V_+(\xi)d\xi. \tag{51}$$

Перейдем к вычислению амплитуды поверхностной волны. Пусть функция $K_+^{-1}(\xi)$ имеет полюс при $\xi = -\tilde{\xi} = -\sqrt{\eta^2+k^2}$. Пусть вычет в этом полюсе равен

$$\operatorname{Res}[K_+^{-1}(\xi), \xi = -\tilde{\xi}] = M. \tag{52}$$

Вклад в поле, соответствующий этому вычету, есть поверхностная волна:

$$u_\eta^{\text{s}}(x,+0) = e^{i\tilde{\xi}x}\frac{-2}{\eta(\tilde{\xi}-\xi_*)}\frac{M}{K_-(-\xi_*)}. \tag{53}$$

Таким образом, амплитуда поверхностной волны равна

$$\tilde{A}_{\text{s}} = \frac{-2}{\eta(\tilde{\xi}-\xi_*)}\frac{M}{K_-(-\xi_*)}. \tag{54}$$

Разложим $K(\xi)$ в ряд Тейлора в точке $\xi = -\tilde{\xi}$:

$$K(\xi) = (\xi+\tilde{\xi})B_0 + \ldots, \tag{55}$$

где $B_0 = -\dfrac{\sqrt{\eta^2+k^2}}{\eta^3}$. Будем считать, что $\theta_{\text{in}}$ и $\eta$ малы. Кроме того, функция $K_-(\xi)$ регулярна вблизи точки $-k$. Тогда

$$K_-(-\tilde{\xi}) \approx K_-(-\xi_*) \approx K_-(-k)$$

$$\text{и } M \approx \frac{K_-(-k)}{B} = -K_-(-k)\frac{\eta^3}{\sqrt{\eta^2+k^2}}.$$

В результате имеем приближенное значение амплитуды поверхностной волны для антисимметричной задачи:

$$\tilde{A}_{\text{s}} = \frac{4\eta^2}{\eta^2+\theta_{\text{in}}^2k^2}. \tag{56}$$

Уравнение Винера–Хопфа для антисимметричной задачи имеет следующий вид:

$$\hat{V}_-(\xi,\xi_*) + \hat{K}(\xi)\hat{U}_+(\xi,\xi_*) = -\frac{2i}{\xi+\xi_*}, \tag{57}$$

где

$$\hat{K}(\xi) = i\left(\eta + i\sqrt{k^2-\xi^2}\right), \tag{58}$$

$$\hat{V}_-(\xi,\xi_*) = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u^{\text{a}}(x,0)}{\partial n}e^{i\xi x}dx, \tag{59}$$

$$\hat{U}_+(\xi,\xi_*) = \int_0^\infty u^{\text{a}}(x,0)e^{i\xi x}dx. \tag{60}$$

Антисимметричная часть амплитуды поверхностной волны вычисляется аналогично:

$$\tilde{A}_{\text{a}} = -\frac{4i\eta k\theta_{\text{in}}}{\eta^2+\theta_{\text{in}}^2k^2}. \tag{61}$$

Для полной амплитуды поверхностной волны имеем:

$$\tilde{A} = \frac{1}{2}\left[\tilde{A}_{\text{s}} + \tilde{A}_{\text{a}}\right] = \frac{2\eta}{\eta + ik\theta_{\text{in}}}. \tag{62}$$

Таким образом, мы получили выражение для амплитуды, полностью совпадающее с (40), т.е. параболическое приближение правильно учитывает вклад от поверхностной волны, при условии малости $\theta_{in}$ и $\eta$.

*Приложение Б. Метод интегрального уравнения*

Для проверки формулы (32) задача дифракции была также решена численно с помощью метода интегрального уравнения. Как и в Приложении А, рассеянное поле представляется в виде комбинации симметричной и антисимметричной части (см. (42)).

В антисимметричном случае имеем следующее интегральное уравнение (см. [23]):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k^2\right)\int_{-a}^{0} G(x-x',0)\nu(x')dx' - \\ -\frac{1}{2}\eta\nu(x) = ik\sin\theta_{in}\exp\{-ikx\cos\theta_{in}\}, \tag{63}$$

где

$$G(x,y) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+y^2}\right), \tag{64}$$

$H_0^{(1)}(z)$ – функция Ханкеля первого рода, а $\nu(x)$ – потенциал двойного слоя:

$$u^{a}(x,y) = -\int_{-a}^{0}\frac{\partial}{\partial y}G(x-x',y)\nu(x')dx'. \tag{65}$$

Здесь $u^{a}$ – антисимметричная часть рассеянного поля $\tilde{u}^{sc}$. На полосе потенциал двойного слоя $\nu(x)$ связан с $u^{a}(x,y)$ простым соотношением:

$$u^{a}(x,+0) = -\frac{1}{2}\nu(x), \quad -a<x<0. \tag{66}$$

Антисимметричная часть диаграммы направленности вычисляется по формуле

$$f^{a}(\tilde{\theta},\theta_{in}) = -e^{-i\pi/4}k\sin\tilde{\theta}\int_{-a}^{0}u^{a}(x,+0)e^{-ikx\cos\tilde{\theta}}dx. \tag{67}$$

В симметричном случае справедливо интегральное уравнение

$$\frac{1}{2}\mu(x)+\eta\int_{-a}^{0}G(x-x',0)\mu(x')dx' = \\ = -\eta\exp\{-ikx\cos\theta_{in}\}, \tag{68}$$

где $\mu(x)$ – потенциал двойного слоя:

$$u^{s}(x,y) = \int_{-a}^{0}G(x-x',y)\mu(x')dx', \\ \frac{\partial u^{s}}{\partial y}(x,+0) = \frac{1}{2}\mu(x), \quad -a<x<a. \tag{69}$$

Здесь $u^{s}$ – симметричная часть рассеянного поля $\tilde{u}^{sc}$. Симметричная часть диаграммы направленности вычисляется по формуле

$$f^{s}(\tilde{\theta},\theta_{in}) = e^{-i\pi/4}\int_{-a}^{0}\frac{\partial u^{s}}{\partial y}(x,+0)e^{-kx\cos\theta}dx. \tag{70}$$

Уравнения (63) и (68) решаются численно стандартными методами, с помощью формул (67) и (70) вычисляются симметричная и антисимметричная часть диаграммы направленности. Диаграмма направленности $f(\tilde{\theta},\theta_{in})$ вычисляется по формуле

$$f(\tilde{\theta},\theta_{in}) = \frac{1}{2}\left[f^{a}(\tilde{\theta},\theta_{in})+f^{s}(\tilde{\theta},\theta_{in})\right]. \tag{71}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Корольков А.И., Шанин А.В.* Дифракция высокочастотной плоской волны на идеальной полосе при скользящем падении. Рассмотрение на основе параболического уравнения // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 4. С. 399–407.
2. *Попов А.В.* Метод поперечной диффузии в задаче о дифракции звука на ленте // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 4. С. 594–600.
3. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Diffraction by an impedance strip I. Reducing diffraction problem to Riemann–Hilbert problems // Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math. 2015. V. 68. P. 321–339.
4. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Diffraction by an impedance strip II. Solving Riemann–Hilbert problems by OE-equation method // Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math. 2015. V. 68. P. 341–362.
5. *Herman M.I., Volakis J.L.* High frequency scattering by a resistive strip and extensions to conductive and impedance strips // Radio Science. 1987. V. 22. P. 335–349.
6. *Büyükaksoy A., Serbest A.H., Uzgören G.* Secondary diffraction of plane waves by an impedance strip // Radio Science. 1989. V. 24. P. 455–464.
7. *Senior B.A.* Backscattering from resistive strips // IEEE Transaction Antennas Propagation. 1979. V. 27. P. 808–813.
8. *Volakis J.L., Bindiganavale S.S.* Scattering by a narrow groove in an impedance plane // Radio Science. 1996. V. 31 P. 401–408.
9. *Burnside W.D., Yu C.L., Marhefka R.J.* A technique to combine the geometrical theory of diffraction and the moment method // IEEE Trans. on Ant. and Proc. 1975. V. 23. P. 551–558.

10. *Sahalos J.N., Thiele G.A.* On the application of the GTD technique and its limitations // IEEE Trans. on Ant. and Proc. 1981. V. 29. P. 780–786.

11. *Ikiz T., Koshikawa S., Kobayashi K., Veliev E.I., Serbest A.H.* Solution of the plane wave diffraction problem by an impedance strip using numerical-analytical method: E-polarized case // J. Electromagn. Waves and Appl. 2001. V. 15. P. 315–340.

12. *Serbest A.H., Büyükaksoy A.* Some approximate methods related to the diffraction by strips and slits. Eds.: Hashimoto M., Idemen M., Tretyakov O.A. Tokyo: Sci. House, 1993.

13. *Umul Y.Z.* Physical optics theory for scattering of waves by an impedance strip // Optics Communications. 2011. V. 284. P. 1760–1765.

14. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.

15. *Фок В.А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. Радио, 1970. 518 с.

16. *Малюжинец Г.Д.* Развитие представлений о явлениях дифракции // УФН. 1959. № 10. P. 321–334.

17. *Корольков А.И., Шанин А.В.* Об использовании параболического уравнения и приближения дифракции Френеля для решения вайнштейновских задач // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2014. Т. 426. С. 87–118.

18. *Малюжинец Г.Д.* Обобщение метода отражений в теории дифракции. Л.: ЦНИИ "РУМБ", 1981. 68 с.

19. *Ström S.* The scattered field. Field representation and introduction to scattering. Eds.: Varadan V.V., Lakhtakia A., Varadan V.K. Elsevier Science Publisher, 1991. P. 143–149.

20. *Mishchenko M.I.* The electromagnetic optical theorem revisited // J. Quantitat. Spectr. Radiat. Trans. 2006. V. 101. P. 404–410.

21. *Senior T.B.A.* Diffraction by a semi-infinite metallic sheet // Proc. R. Soc. Lond. A. 1952. V. 213. P. 436–458.

22. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: ИЛ, 1962. 279 с.

23. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.