

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ  
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ  
В ПРЕДНАПРЯЖЕННОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ СЛОЕ

© 2017 г. Т. И. Белянкова<sup>а</sup>, В. В. Калинин<sup>б</sup>, \*

<sup>а</sup>Южный научный центр РАН  
344006 Ростов-на-Дону, пр. Чехова 41

<sup>б</sup>Южный Федеральный университет  
344006 Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая 105

\*e-mail: kalin@ssc-ras.ru

Поступила в редакцию 09.05.2016 г.

Исследуются особенности формирования волнового поля в предварительно напряженном функционально-градиентном слое, инициированного действием поверхностного источника гармонических колебаний. Предполагается, что упругие модули и плотность материала слоя изменяются с глубиной по произвольному закону. В качестве исходного материала среды использована модель гиперупругого материала с модулями упругости III порядка. Краевая задача для системы уравнений Ламе сведена к системе задач Коши с начальными условиями, решение которой строится модифицированным применительно к особенностям задачи методом Рунге–Кутты–Мерсона. На примере сдвиговых колебаний функционально-градиентного слоя исследовано влияние типа неоднородности, величины изменения свойств и характера начального напряженного состояния на распределение смещений по глубине. Особое внимание уделено особенностям локализации смещений внутри слоя с интерфейсным включением в окрестности критических частот. Показана непосредственная связь структуры неоднородного слоя с характером локализации смещений по глубине. Выявлено существенное возрастание роли начальных напряжений и величины изменения параметров материала в окрестности критических частот.

**Ключевые слова:** функционально-градиентные материалы, начальные напряжения, формирование волнового поля, локализация волнового поля.

**DOI:** 10.7868/S0320791917030042

ВВЕДЕНИЕ

Появление первых моделей функционально-градиентных материалов, т.е. материалов, свойства которых непрерывно изменяются по одной из координат, было связано с приложениями в сейсмологии, фундаментостроении и геофизике [1–6]. Позднее спектр приложений функционально-градиентных материалов существенно расширился, затронув машиностроение, авиа- и космические технологии, современную электронику и др. [7–18]. Развитие принципиально новых подходов к созданию современных функционально ориентированных материалов с заранее заданными свойствами приводит к необходимости прогнозирования их поведения с учетом особенностей производства, режимов и условий эксплуатации. Особую роль при исследовании подобных материалов и покрытий играет исследование эффектов, возникающих в окрестности их неоднородности. При моделировании функционально-градиентного материала предполагается, что его свойства

изменяются по произвольному [2, 4, 6, 8–12, 14, 16–18], степенному [3, 5, 7, 13, 15] или экспоненциальному [1, 2, 13] закону. Когда все параметры материала изменяются по одному закону, решение в ряде случаев строится в аналитической форме [7, 13], что важно для оценки результатов более сложного численного или численно-аналитического моделирования. В общем случае, как правило, для исследования свойств неоднородных сред привлекаются методы, основанные на преобразовании исходных уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (ОДУПК). В ранних работах для их решения использовались приближенные асимптотические методы и методы разложения неоднородности по параметру, позволяющие качественно анализировать структуру волнового поля. В [1] в предположении экспоненциальной зависимости и при определенных допущениях исходное уравнение сведено к уравнению Бесселя. В [2, 3] исходное

уравнение сведено к системе ОДУПК, решение которой строится в виде разложения по параметру неоднородности с привлечением аппарата гипергеометрических функций. В [4], возможно, впервые для решения полученной системы ОДУПК использованы численные методы. В [6] предложен метод, основанный на представлении компонент тензора напряжений через компоненты импеданса среды. В [11] этот метод был обобщен на класс задач для слоисто-неоднородных сред. В [8] был предложен метод, основанный на построении системы задач Коши обыкновенных дифференциальных уравнений (СЗК ОДУ) относительно компонент вектора перемещений и их производных с последующим использованием численных методов. Позднее этот подход был реализован при исследовании широкого круга задач [9, 10, 12] для неоднородного полупространства. В [14] исходная система сведена к ОДУПК относительно компонент тензора напряжений, построена функция Грина для функционально-градиентного полупространства. Недостатком использованных в [3–6, 8–15] подходов является то, что в матрице полученных систем уравнений участвуют либо производные материальных констант [3–6, 8–13, 15], либо производная плотности [14]. Это накладывает ограничения на закон изменения свойств среды, исключает наличие изломов и разрывов. В [16] предложенный в [8] подход был модифицирован за счет использования, вместо производных компонент вектора перемещений, их естественных комбинаций — компонент вектора напряжений. Это позволило снять все ограничения с закона изменения свойств среды, поскольку среди коэффициентов СЗК ОДУ отсутствуют производные материальных констант. Такой подход в сочетании с методом Рунге–Кутты для решения СЗК ОДУ представлял собой эффективный метод восстановления функции Грина, позволивший исследовать широкий круг задач для тел, выполненных из функционально-градиентных материалов [17, 18].

В настоящей работе развитый в [16–18] метод обобщен на класс задач для предварительно напряженных полуограниченных тел. Решение системы СЗК ОДУ с переменными коэффициентами строится оригинальным методом на основе модификации метода Рунге–Кутты–Мерсона с усовершенствованным алгоритмом. В отличие от [16–18] реализовано восстановление функции Грина не только на поверхности, но и по глубине функционально-градиентного материала, что позволило исследовать особенности локализации волнового поля в зависимости от характера неоднородности, интенсивности изменения свойств

покрытия, вида и величины начальных воздействий даже в окрестности критических частот. В качестве исходного материала использована модель гиперупругого материала с модулями упругости III порядка, позволяющая более точно описывать свойства преднапряженной среды [19–24], в частности, исследовать эффекты второго порядка [25–29], определять механические напряжения в твердых телах [30, 31], контролировать напряженное состояние материалов и конструкций [32, 33]. Для слоя, выполненного из функционально-градиентного материала и находящегося в условиях однородной начальной статической деформации, построена трехмерная функция Грина. На примере задачи о сдвиговых гармонических колебаниях слоя с интерфейсным включением установлена связь вида неоднородности с характером локализации смещений по толщине слоя. Выявлено существенное усиление влияния начальных напряжений и величины изменения плотности на динамику неоднородного слоя в окрестности критических частот.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рассмотрение вводятся декартовый ортонормированный базис  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  и начально-деформированная  $V$ -конфигурация (далее НДК) с координатами  $x_i, i = 1, 2, 3$ , связанная с естественной  $v$ -конфигурацией (далее ЕК) с лагранжевыми координатами  $a_i, i = 1, 2, 3$ , соотношениями

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{A} = \delta_{ij} v_i \mathbf{r}_j, \quad (1)$$

$$v_i = \text{const}.$$

Здесь  $\mathbf{R} = x_k \mathbf{i}_k$  и  $\mathbf{r} = a_k \mathbf{i}_k$  — радиусы-векторы точки среды в НДК и ЕК соответственно,  $v_i = 1 + \delta_i, \delta_i$  — относительные удлинения волокон, направленных в ЕК вдоль осей  $a_i, i = 1, 2, 3$ , совпадающих с декартовыми координатами,  $\mathbf{G}$  — мера деформации Коши–Грина,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. В качестве модели предварительно напряженной среды использована модель первоначально изотропного материала с упругим потенциалом в форме Мурнагана [23]:

$$\chi = \frac{1}{4} \left[ \left( -3\lambda - 2\mu + \frac{9}{2}l + \frac{n}{2} \right) I_1 + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu - 3l - 2m) I_1^2 + \left( -2\mu + 3m - \frac{n}{2} \right) I_2 - m I_1 I_2 + \frac{1}{6} (l + 2m) I_1^3 + \frac{n}{2} (I_3 - 1) \right]. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda, \mu$  — упругие константы Ламе,  $l, m, n$  — константы Мурнагана III порядка,  $I_k = I_k(\mathbf{G}) =$

$= I_k(\mathbf{F})$ ,  $k = 1, 2, 3$ , – инварианты меры деформации Фингера  $\mathbf{F}$ , совпадающие с инвариантами меры деформации Коши–Грина.

**Замечание 1.** Для описания свойств преднапряженных материалов используются различные наборы констант III порядка, которые зависят от вида разложения термодинамического потенциала [19–24]. Константы  $l, m, n$  [20] введены для описания свойств нелинейных изотропных материалов с использованием инвариантов тензора деформации Коши–Грина. В [21] для описания свойств нелинейных материалов с использованием компонент тензора конечных деформаций предложены константы  $A, B$  и  $C$ . В [24] при использовании разложения потенциала по алгебраическим инвариантам тензора деформации Коши–Грина введены константы  $a, b$  и  $c$ . В [30–33] указанные выше константы с успехом использованы в задачах акустоупругости для определения механических напряжений в твердых телах и контроля напряженного состояния материалов и конструкций. В литературе также известны константы III порядка  $v_1, v_2, v_3$  с использованием разложения потенциала по алгебраическим инвариантам степеней тензора деформации [22]. Несмотря на различный вид разложения термодинамического потенциала, все константы связаны между собой [23].

Далее полагаем, что свойства материала слоя в естественном (ненапряженном) состоянии определяются формулами

$$\begin{aligned} \rho(x_3) &= \rho_0 f_\rho(x_3), \quad \mu(x_3) = \mu_0 f_\mu(x_3), \\ \lambda(x_3) &= \lambda_0 f_\lambda(x_3), \quad l(x_3) = l_0 f_l(x_3), \\ m(x_3) &= m_0 f_m(x_3), \quad n(x_3) = n_0 f_n(x_3). \end{aligned} \quad (3)$$

$\rho_0, \lambda_0, \mu_0, l_0, m_0, n_0$  – соответственно плотность и модули “опорного” материала, относительно которого множители  $f_\rho(x_3), f_\mu(x_3), f_\lambda(x_3), f_l(x_3), f_n(x_3)$  определяют изменение соответствующих параметров среды.

Рассмотрим краевую задачу о гармонических колебаниях преднапряженного слоя  $|x_1|, |x_2| \leq \infty$ ,  $0 \leq x_3 \leq h$  под действием заданной в области  $O_1$  на его поверхности нагрузки  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}e^{-i\omega t}$ . Нижняя грань слоя жестко сцеплена с недеформируемым основанием. Задача описывается линейаризованными уравнениями движения [23]

$$\nabla \cdot \Theta = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (4)$$

с граничными условиями на поверхности  $x_3 = h$ ,  $O = O_1 + O_2$ :

$$\mathbf{N} \cdot \Theta = \mathbf{f} = \mathbf{q}e^{-i\omega t}, \quad \{x_1, x_2 \in O_1\}, \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*, \quad \{x_1, x_2 \in O_2\}; \quad (6)$$

на нижней грани

$$\mathbf{u} = 0, \quad x_3 = 0. \quad (7)$$

Здесь  $\nabla$  – оператор Гамильтона,  $\mathbf{N}$  – вектор внешней нормали к поверхности среды,  $\rho$  – плотность материала среды,  $\mathbf{u}, \mathbf{q}$  – векторы перемещений и напряжений, определенные в НДК. Плотность материала и нагрузка, распределенная по площадке  $dO_1$  в НДК, связаны с ЕК соотношениями

$$\rho = \rho_0 J^{-1} = \frac{\rho_0}{v_1 v_2 v_3}, \quad \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{o}_1 \mathbf{f}^*}{dO_1} = \frac{\mathbf{f}^*}{v_i v_j},$$

$J = v_1 v_2 v_3$  – метрический множитель,  $v_i, v_j$  – удлинения вдоль осей ориентации площадки. В случае первоначально изотропного гиперупругого материала тензор  $\Theta$  имеет вид [23]

$$\begin{aligned} \Theta &= \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u} + 4J^{-1} \left[ -\Psi_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \Psi_2 \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{F} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^2 \sum_{m=0}^2 V_{km} \mathbf{F}^k \mathbf{F}^m \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= I_3 \frac{\partial \chi}{\partial I_3}, & V_{0m} &= I_3 \frac{\partial \Psi_m}{\partial I_3}, \\ \Psi_1 &= \frac{\partial \chi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \chi}{\partial I_2}, & V_{1m} &= \frac{\partial \Psi_m}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi_m}{\partial I_2}, \\ \Psi_2 &= -\frac{\partial \chi}{\partial I_2}, & I_k &= I_k(\mathbf{G}), \quad V_{2m} = -\frac{\partial \Psi_m}{\partial I_2}, \quad m = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\mathbf{T} = 2J^{-1} (\Psi_0 \mathbf{I} + \Psi_1 \mathbf{F} + \Psi_2 \mathbf{F}^2), \quad (10)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  – линейный тензор деформации возмущенного состояния;  $\mathbf{I}$  – единичный тензор.

С учетом формул (8)–(10) компоненты тензора  $\Theta$  представляются в виде [18]

$$\begin{aligned} \Theta_{lk} &= \theta_{lksp} \mu_{s,p}, \quad \theta_{lksp} = \delta_{ls} \delta_{kp} s_{lk}^{(1)} + \\ &\quad + \delta_{ks} \delta_{lp} v_i^2 s_{lk}^{(2)} + \delta_{lk} \delta_{sp} s_{ls}^{(3)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} s_{lk}^{(1)} &= \frac{2}{J} [-\Psi_0 + \Psi_2 v_i^2 v_k^2], \\ s_{lk}^{(2)} &= \frac{2}{J} [\Psi_1 + \Psi_2 (v_i^2 + v_k^2)], \end{aligned} \quad (12)$$

$$s_{lk}^{(3)} = \frac{4}{J} \sum_{M=0}^2 \sum_{N=0}^2 V_{MN} v_i^{2M} v_k^{2N}.$$

После внесения представления (2) в формулы (9)–(11) нетрудно получить [18, 23]

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{1}{8}nI_3, \quad \psi_1 = \frac{1}{4}\left[(I_1 - 3)\lambda - 2\mu + \frac{l}{2}(I_1 - 3)^2 + \right. \\ &\quad \left. + m(I_1 - I_2) - \frac{n}{2}(I_1 - 1)\right], \quad \psi_2 = \frac{1}{4}\left[2\mu + \right. \\ &\quad \left. + m(I_1 - 3) + \frac{n}{2}\right], \quad V_{11} = \frac{1}{4}\left[\lambda + l(I_1 - 3) - \right. \\ &\quad \left. - m(I_1 - 1) - \frac{n}{2}\right], \quad V_{12} = V_{21} = \frac{1}{4}m, \quad V_{00} = \frac{1}{8}nI_3; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \theta_{jjj} &= 2J^{-1}\{-\psi_0 + \psi_1 v_j^2 + 3\psi_2 v_j^4 + 2[V_{00} + v_j^4 \times \\ &\quad \times (V_{11} + 2v_j^2 V_{12})]\}, \quad \theta_{jkk} = 2J^{-1}\{v_j^2[\psi_1 + \psi_2 \times \\ &\quad \times (v_j^2 + v_k^2)]\}, \quad \theta_{jkj} = 2J^{-1}\{-\psi_0 + \psi_2 v_j^2 v_k^2\}, \\ \theta_{jjk} &= 4J^{-1}\{V_{00} + v_j^2 v_k^2 [V_{11} + V_{12}(v_j^2 + v_k^2)]\}. \end{aligned} \quad (14)$$

В силу представлений (3) компоненты тензора  $\Theta$  (14), тензора начальных напряжений  $\mathbf{T}$  (10) и функция удельной потенциальной энергии  $\chi$  (2) являются функциями  $x_3$ . Далее полагаем режим колебаний среды установившимся и перейдем к безразмерным параметрам: упругие модули  $(\lambda, \mu, l, m, n)$ , напряжения и усилия отнесены к модулю сдвига  $\mu_0$ , плотность к плотности  $\rho_0$ , линейные параметры к толщине слоя  $h$ . В качестве безразмерной частоты используется параметр  $\omega' = \omega h (V_S^0)^{-1}$ , где  $V_S^0 = \sqrt{\mu_0(\rho_0)^{-1}}$  – скорость сдвиговой волны опорного материала. Далее штрихи опускаем.

С учетом формул (11)–(14) задача (4)–(7) представляется в виде системы

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1[u_1] + \theta_1 u_{2,12} + \theta_2 u_{3,13} + \theta_{3113,3} u_{1,3} + \theta_{1313,3} u_{3,1} = 0, \\ \theta_1 u_{1,12} + \mathbf{L}_2[u_2] + \theta_3 u_{3,23} + \theta_{3223,3} u_{2,3} + \theta_{2323,3} u_{3,2} = 0, \\ \theta_2 u_{1,13} + \theta_3 u_{2,23} + \mathbf{L}_3[u_3] + \theta_{1133,3} u_{1,1} + \theta_{2233,3} u_{2,2} + \theta_{3333,3} u_{3,3} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

с граничными условиями на поверхности  $x_3 = h$

$$\begin{cases} \Theta_{31} = \theta_{3113} u_{1,3} + \theta_{1313} u_{3,1} = q_1(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in O_1, \\ \Theta_{32} = \theta_{3223} u_{2,3} + \theta_{2323} u_{3,2} = q_2(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in O_1, \\ \Theta_{33} = \theta_{1133} u_{1,1} + \theta_{2233} u_{2,2} + \theta_{3333} u_{3,3} = q_3(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in O_1, \end{cases} \quad (16)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in O_2; \quad (17)$$

на грани  $x_3 = 0$

$$\mathbf{u} = 0. \quad (18)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_{1122} + \theta_{1212}, \quad \theta_2 = \theta_{1133} + \theta_{1313}, \\ \theta_3 &= \theta_{2233} + \theta_{2323}, \quad \mathbf{L}_k = \theta_{ikki} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \rho \omega^2, \\ k &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (19)$$

Для решения задачи (15)–(18) с обозначениями (19) используем развитый в [16–18] подход. С этой целью применим преобразование Фурье по координатам  $x_1, x_2$  ( $\alpha_1, \alpha_2$  – параметры преобразования) и введем новые переменные

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_\Theta \\ \mathbf{Y}_u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_\Theta = \|\tilde{\Theta}_{3k}\|_{k=1}^3, \quad \mathbf{Y}_u = \|U_k\|_{k=1}^3. \quad (20)$$

Здесь  $U_k, \tilde{\Theta}_{3k}$  – трансформанты Фурье компонент вектора перемещений и тензора напряжений. С учетом обозначений (20) задачу (15)–(18) переищем в виде

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \mathbf{Y}, \quad (21)$$

$$\mathbf{D}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \mathbf{Y} = \mathbf{Q}. \quad (22)$$

Здесь в общем случае

$$\mathbf{D}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_h \\ \mathbf{D}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_h \\ \mathbf{Q}_0 \end{pmatrix}.$$

В случае слоя с заземленным основанием

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{Q} = \hat{\uparrow} \{Q_1, Q_2, Q_3, 0, 0, 0\}. \quad (23)$$

$\mathbf{E}$  – единичная матрица,

$$\mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_1^3 & m_1^4 & m_1^5 & 0 \\ 0 & 0 & m_2^3 & m_2^4 & m_2^5 & 0 \\ m_3^1 & m_3^2 & 0 & 0 & 0 & m_3^6 \\ m_4^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_4^6 \\ 0 & m_5^2 & 0 & 0 & 0 & m_5^6 \\ 0 & 0 & m_6^3 & m_6^4 & m_6^5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} m_k^3 &= i\alpha_k \theta_{kk33} l, \quad k = 1, 2, \quad m_1^4 = P_1 - \alpha_1^2 (\theta_{1133})^2 l, \\ m_2^5 &= P_2 - \alpha_2^2 (\theta_{3322})^2 l, \quad m_1^5 = m_2^4 = \alpha_1 \alpha_2 \times \\ &\quad \times (\theta_1 - \theta_{1133} \theta_{2233} l), \quad m_3^j = i\alpha_j \theta_{j3j3} l, \quad j = 1, 2, \\ m_3^6 &= P_3^{(n)} - \alpha_1^2 (\theta_{1313})^2 l - \alpha_2^2 (\theta_{2323})^2 l, \end{aligned} \quad (24)$$

$$m_j^k = (\theta_{3kk3})^{-1}, \quad k = 1, 2, \quad j = 4, 5, \quad m_4^6 = i\alpha_1 \theta_{3131} (\theta_{3113})^{-1}, \quad m_5^6 = i\alpha_2 \theta_{3232} (\theta_{3223})^{-1}, \\ m_6^3 = l, \quad m_6^4 = m_1^3, \quad m_6^5 = m_2^3, \quad l = (\theta_{3333})^{-1}, \\ P_k = \theta_{1kk1} \alpha_1^2 + \theta_{2kk2} \alpha_2^2 - \rho \omega^2.$$

### ФУНКЦИЯ ГРИНА ГРАДИЕНТНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Уравнение (21) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений. Шесть ее линейно независимых решений строятся на основе численного решения набора задач Коши для уравнения (21) при фиксированных значениях параметров  $\alpha_1, \alpha_2$ . Пусть  $y_{km}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ ,  $m, k = 1, 2, \dots, 6$ , – набор решений для уравнения (21) с начальными условиями ( $\delta_{km}$  – символ Кронекера)

$$y_{km}(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \delta_{km}. \quad (25)$$

Общее решение для слоя с переменными свойствами можно записать в виде

$$Y_k = \sum_{m=1}^6 c_m(\alpha_1, \alpha_2) y_{km}(\alpha_1, \alpha_2, x_3), \quad k = 1, 2, \dots, 6. \quad (26)$$

Неизвестные коэффициенты  $c_k(\alpha_1, \alpha_2)$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ), участвующие в представлениях (26), определяются при удовлетворении граничных условий (22). После внесения представлений (26) в формулы (22), (23) получим уравнение

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{Q}, \quad (27)$$

где  $\mathbf{c} = \hat{\uparrow} \{c_k\}_{k=1}^6$ ,  $\mathbf{R}$  представляет собой матрицу размера  $6 \times 6$  с элементами

$$R_{km} = y_{km}(\alpha_1, \alpha_2, h), \quad k = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2, \dots, 6, \quad (28) \\ R_{km} = y_{km}(\alpha_1, \alpha_2, 0), \quad k = 4, 5, 6, \quad m = 1, 2, \dots, 6.$$

Решение краевой задачи (21)–(24) представляется выражениями

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} \mathbf{k}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3) \mathbf{q}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (29)$$

$$\mathbf{k}(s, t, x_3) = \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) e^{-i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (30)$$

$$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \|\| K_{m+3, n} \| \|_{m, n=1}^3,$$

$$K_{mn} = \Delta^{-1} \sum_{k=1}^6 \Delta_{nk} y_{mk}(\alpha_1, \alpha_2, x_3), \quad \Delta = \det \mathbf{R}. \quad (31)$$

Здесь  $\Delta_{nk}$  – алгебраическое дополнение элемента  $R_{nk}$  матрицы  $\mathbf{R}$  (27), (28). Контуры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в представлении (30) выбираются по правилам, указан-

ным в [10]. Формулы (29)–(31) определяют перемещение произвольной точки предварительно напряженного слоя, выполненного из функционально-градиентного материала под действием заданной в области  $\Omega$  нагрузки. Для исследования структуры и параметров поверхностного волнового поля достаточно рассмотреть дисперсионное уравнение

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \omega) = 0. \quad (32)$$

Формулы (29)–(32) позволяют проводить исследование влияния параметров среды, вида напряженного состояния и величины начальной деформации на динамику среды.

### СДВИГОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГРАДИЕНТНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Применим приведенный выше метод к исследованию процесса формирования волнового поля в неоднородном предварительно напряженном функционально-градиентном слое. При проведении численного анализа ограничимся сдвиговыми колебаниями слоя под действием нагрузки  $\mathbf{q}(x_1, t) = \{0, \delta(x_1) e^{-i\omega t}, 0\}$  при условиях  $u_2 = u_2(x_1, x_3)$ ,  $u_1 = u_3 = 0$ . Как следует из формул (29)–(31), смещение слоя в этом случае представляется выражениями

$$u_2(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a k_{22}(x_1 - \xi, x_3, \omega) q(\xi) d\xi, \quad (33)$$

$$k_{22}(s, x_3, \omega) = \int_{\Gamma} K_{22}(\alpha, x_3, \omega) e^{-i\alpha s} d\alpha, \quad (34)$$

$$K_{22}(\alpha, x_3, \omega) = y_{21}(\alpha, x_3, \omega) [y_{11}(\alpha, h, \omega)]^{-1}.$$

Здесь  $\alpha$  – параметр преобразования Фурье по координате  $x_1$ , контур  $\Gamma$  выбирается в соответствии с условиями излучения [10]. Как правило, он совпадает с вещественной осью и отклоняется от нее при обходе отрицательных полюсов функции  $K_{22}$  сверху, а положительных – снизу.  $y_{jk}(\alpha, x_3, \omega)$  – линейно независимые решения задачи Коши с начальными условиями  $y_{jk}(\alpha, 0, \omega) = \delta_{jk}$  для уравнения

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{M}(\alpha, x_3) \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \Theta_{32} \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$$\mathbf{M}(\alpha, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & \theta_{1221} \alpha^2 - \rho \omega^2 \\ (\theta_{3233})^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Замечание 2.** Как следует из формул (33), (34), ключевым моментом при вычислении перемещений в среде является построение с высокой точно-

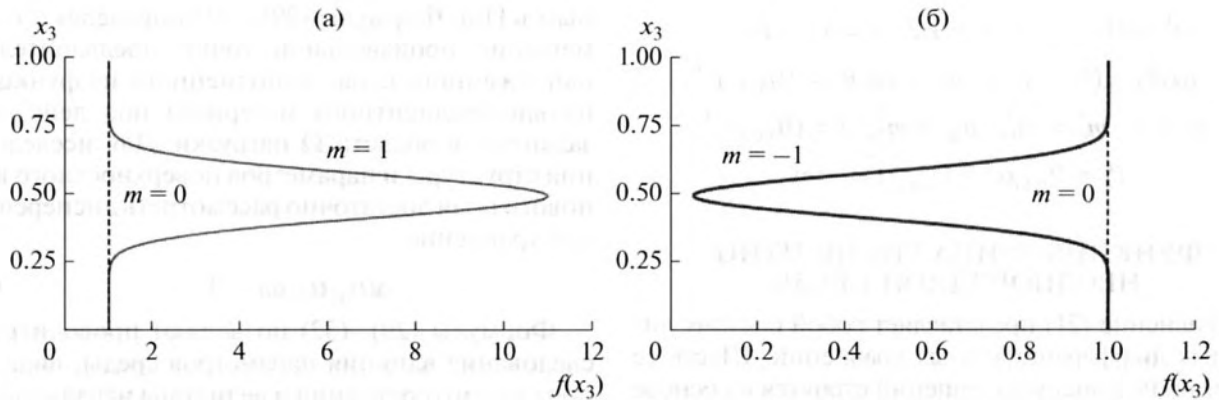


Рис. 1. Функциональные зависимости изменения свойств материала слоя.

стью набора решений уравнения (21) с начальными условиями (22). В работе использована модификация метода Рунге–Кутты–Мерсона, реализовано восстановление функции Грина как на поверхности, так и по глубине покрытия с точностью  $10^{-10}$ . Вычисление контурного интеграла (33), (34) при исследовании особенностей локализации смещений в слое проводилось с точностью до  $10^{-8}$ .

### ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Рассмотрим колебания неоднородного слоя, свойства которого в естественном (ненапряженном) состоянии заданы на рис. 1. Здесь и ниже индексом  $m$  отмечается либо однородная среда ( $m = 0$ ), либо среда с жестким ( $m = 1$ ) или податливым ( $m = -1$ ) интерфейсным включением. В качестве “опорного” будет использоваться изотропный материал с параметрами [23]  $\rho_0 = 7.748 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu_0 = 0.804 \times 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\lambda_0 = 1.1 \times 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $l_0 = -3.25 \times 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $m_0 = -6.32 \times 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $n_0 = -0.804 \times 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>. Толщину слоя  $h$  примем равной 1.

Далее при проведении численного анализа будем разделять “акустически однородную” среду (скорости объемных волн постоянны по толщине слоя), в которой все параметры материала в естественном (ненапряженном) состоянии изменяются по одному и тому же закону

$$\begin{aligned} f_\rho(x_3) = f_\mu(x_3) = f_\lambda(x_3) = f_l(x_3) = f_m(x_3) = \\ = f_n(x_3) = f(x_3), \quad \Delta\rho = \Delta\mu = \Delta\lambda = \\ = \Delta l = \Delta m = \Delta n = \Delta f; \end{aligned} \quad (36)$$

и “акустически неоднородную” среду (скорости изменяются по толщине) с условиями

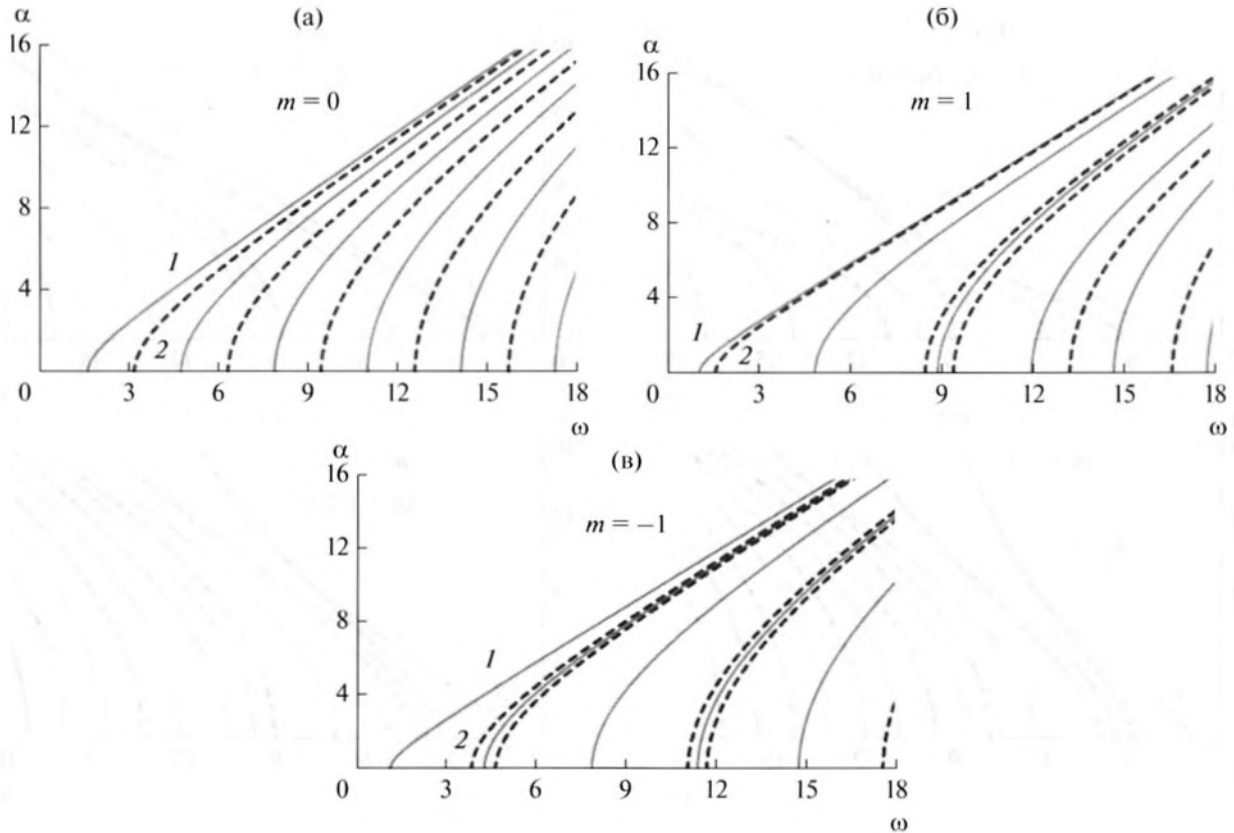
$$\begin{aligned} f_\rho(x_3) \neq f(x_3), \quad f_\mu(x_3) = f_\lambda(x_3) = f_l(x_3) = \\ = f_m(x_3) = f_n(x_3) = f(x_3), \quad \Delta\rho \neq \Delta f, \quad (37) \\ \Delta\mu = \Delta\lambda = \Delta l = \Delta m = \Delta n = \Delta f. \end{aligned}$$

В формулах (36) и (37) использовано обозначение  $\Delta s = (s_0)^{-1} \max_{x_3 \in [0, h]} |s(x_3) - s_0|$ .

### СТРУКТУРА ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ СЛОЕ В ОТСУТСТВИИ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

На рис. 2 и 3 представлены кривые, иллюстрирующие поведение полюсов (кривые 1) и нулей (кривые 2) функции  $K_{22}$  (34) в зависимости от частоты. В отличие от равномерного чередования нулей и полюсов в однородном слое, для слоя с жестким включением характерно подавление нулями первой и третьей мод полюсов, для слоя с податливым включением – второй и четвертой мод. Существенно изменяются значения критических частот: для  $m = 1$  критическая частота первой моды понижается, частоты возникновения остальных мод, за исключением второй, – повышаются; для  $m = -1$  уменьшаются частоты возникновения первых двух мод, значения остальных критических частот, за исключением третьей, – увеличиваются. Угол наклона первых мод полюсов в обоих случаях не зависит от типа включения.

На рис. 3 видно, что независимо от типа включения величина изменения плотности материала существенно влияет на свойства функции Грина среды. Для слоя с жестким включением уменьшение  $\Delta\rho$  приводит к уменьшению количества по-



**Рис. 2.** Распределение полюсов (сплошные линии) и нулей (штриховые линии) функции  $K_{22}$  для однородного слоя (а) и «акустически однородного» слоя с жестким (б) и податливым (в) интерфейсными включениями.

люсов и нулей  $K_{22}$  в фиксированном диапазоне частот и уменьшению угла наклона дисперсионных кривых, т.е. фазовая скорость поверхностных волн возрастает. Имеет место асимптотическое подавление нулями второй и четвертой моды (рис. 3а и 3б) полюсов. Для слоя с податливым включением ситуация обратная: с уменьшением  $\Delta\rho$  количество полюсов и нулей возрастает, угол наклона дисперсионных кривых увеличивается, фазовая скорость поверхностных волн уменьшается. Наблюдается «асимптотическое» подавление нулями первых мод полюсов (рис. 3в и 3г).

Анализ с использованием формул (33)–(35) показал, что в низкочастотном диапазоне ( $\omega < \omega_1^*, \omega_1^*$  – первая критическая частота) амплитуда  $u_2(x_3) = u_2(0, x_3, \omega)$  как для жесткого, так и для податливого включений является вещественной. При приближении к  $\omega_1^*$  амплитуда возрастает, однако излучение от источника колебаний отсутствует. При достижении  $\omega_1^*$  фаза смещения скачком изменяет значение с 0 на  $\pi/2$ , от источ-

ника начинают распространяться волны, амплитуда которых максимальна в момент возникновения и зависит от взаимного расположения нулей и полюсов функции.

### ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ ВНЕ ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ

На рис. 4 представлены графики распределения амплитуд и фаз смещений по толщине в «акустически однородном» слое на более высоких частотах, исключая окрестность критических. Цифрами 0, 1, –1 отмечены кривые, соответствующие типу включения, индексами  $h_m$  ( $m = 0, 1, -1$  – тип интерфейсного включения) отмечены значения  $x_3$ , на которых  $\varphi_2(x_3)$  меняет знак скачком. Как следует из рисунка, смещения локализованы либо над включением ( $m = 1$ ), либо в области включения и над ним ( $m = -1$ ). Необходимо отметить, что если в однородном слое значение  $h_0$  определяется соотношением длины волны и толщины слоя, то при наличии включения эта связь становится более сложной.

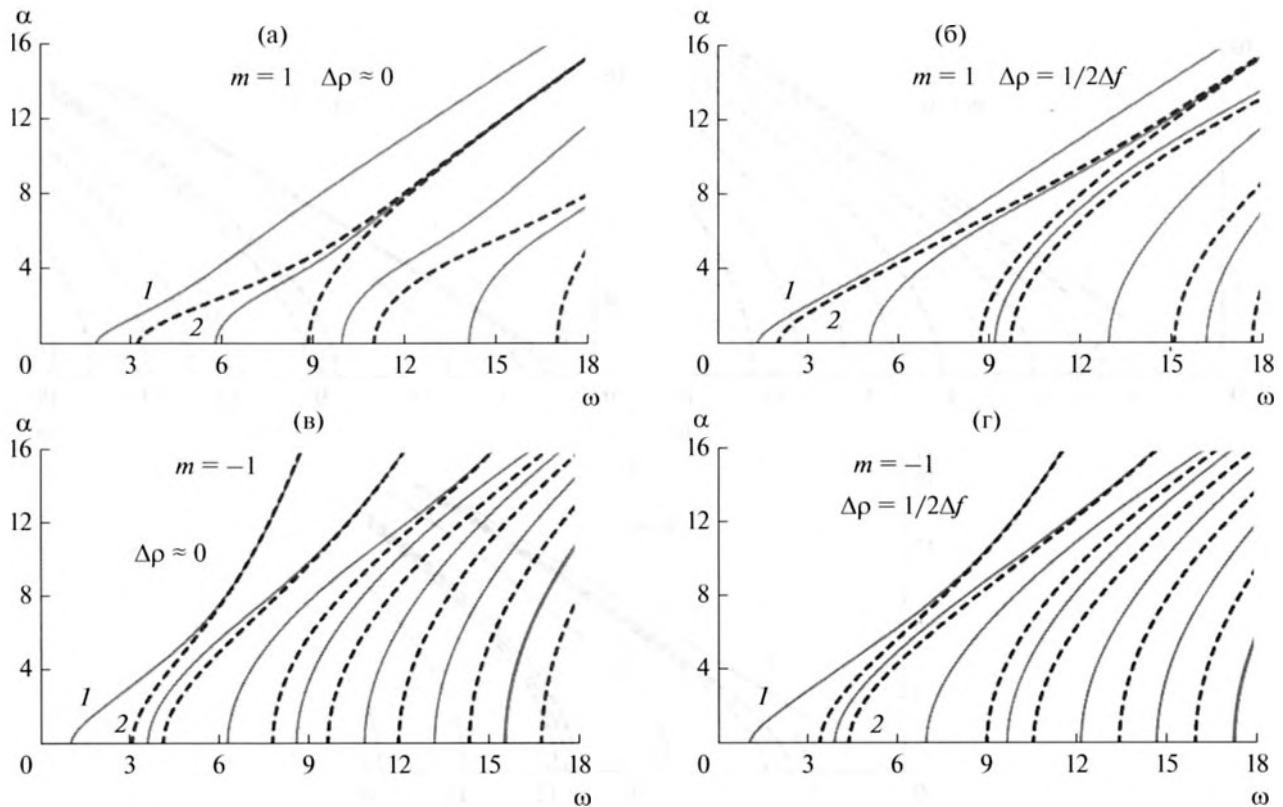


Рис. 3. Влияние величины изменения плотности материала на распределение полюсов и нулей функции  $K_{22}$  для неоднородного слоя.

### ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ В СЛОЕ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ

Далее исследуются окрестности частот появления полюсов функции  $K_{22}$ , подавляемых нулями (мода 2 – рис. 2г, мода 3 – рис. 2б) и не подавляемых нулями (мода 2 – рис. 2б, мода 3 – рис. 2г). На рис. 5–7 показаны особенности локализации смещений в “акустически однородном” слое с податливым или жестким включением в окрестности второй (рис. 5), третьей (рис. 6), четвертой (рис. 7а) и пятой (рис. 7б, 7в) критических частот. Цифрами 1, 2, 3, 4, 5 на рис. 5 отмечены кривые амплитуд и фаз смещения для частот, отклоняющихся от второй критической частоты  $\omega_2^m$  ( $m = 1$  или  $m = -1$ ) на  $\Delta\omega_2^{-1} = 10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ ,  $-3 \times 10^{-5}$ ,  $-6 \times 10^{-4}$ ,  $-0.01$  (рис. 5а) и  $\Delta\omega_2^1 = 0.2$ ,  $0.02$ ,  $0.001$ ,  $-0.002$ ,  $-0.16$  (рис. 5б) соответственно. Здесь  $\Delta\omega_2^m = \omega_2^m - \omega$ . Индексы  $h_k^0$  и  $h_k$  на рисунках отвечают значениям  $x_3$ , на которых фаза  $\varphi_2$  меняет значение от 0 до  $\pi$  и с разрывом от  $-\pi$  до  $\pi$ ,  $k$  в нижнем индексе соответствует частоте. На рис. 5а

(подавляемая мода) видно, что колебания локализируются в нижней части слоя, максимум достигается в полосе  $\omega_2^{-1} \pm 1 \times 10^{-4}$ .

График изменения фазы показывает, что в окрестности ниже критической частоты  $\omega_2^{-1}$  смещения вещественны (фаза в верхней части равна 0, в нижней части  $\pi$ ), внутри слоя наблюдается стоячая волна с одним узлом, излучение отсутствует. На частоте выше  $\omega_2^{-1}$  фаза в приповерхностной области принимает значение  $\pi/2$ , в нижней части слоя  $-\pi/2$ . Возникает вторая мода, причем колебания в верхней и нижней частях слоя происходят в противофазе. С увеличением частоты смещения в приповерхностной области становятся комплексными с положительной мнимой частью, в придонной области – с отрицательной мнимой частью. На рис. 5б (неподавляемая мода) колебания локализованы в приповерхностной области, максимум достигается в более широкой полосе частот  $\omega_2^1 \pm 2 \times 10^{-3}$ . Как и ранее, ниже  $\omega_2^1$  смещения вещественны, излучения нет. На частотах вы-

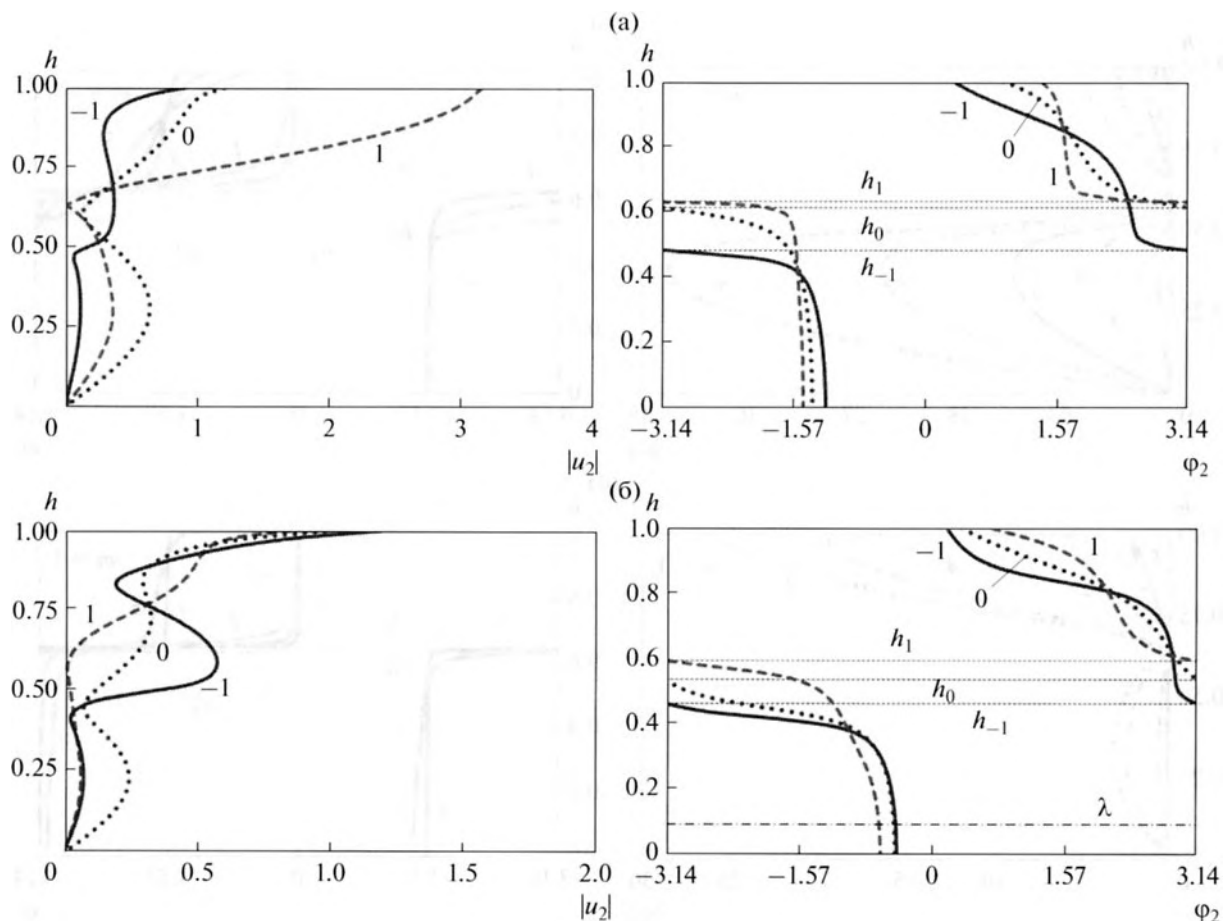


Рис. 4. Распределение амплитуды и фазы смещений по глубине слоев различных типов для частот (вне окрестности критических) (а)  $\omega = 4.9$ , (б)  $\omega = 7.0$ .

ше  $\omega_2^1$  смещения сначала чисто мнимые, затем становятся комплексными с положительной мнимой частью в верхней области и отрицательной — в придонной.

На рис. 6 цифрами 1, 2, 3, 4 отмечены кривые амплитуд и фаз смещения “акустически однородного” слоя для частот, отклоняющихся от третьей критической частоты  $\omega_3^m$  на  $\Delta\omega_3^{-1} = 0.08, 4 \times 10^{-4}, -3 \times 10^{-4}, -0.02$  и  $\Delta\omega_3^1 = 0.01, 3 \times 10^{-5}, -1 \times 10^{-5}, -3 \times 10^{-4}$  соответственно. Индексами  $h_k^*$  отмечены значения  $x_3$ , на которых  $\phi_2$  меняет значение от  $-\pi$  до 0 или от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  без разрыва. Линии, отмеченные  $\lambda_s$  на правых фрагментах рис. 6 и 7, соответствуют значению  $x_3 = h - \lambda_s$ , где  $\lambda_s = 2\pi/\zeta$ ,  $\zeta$  — волновое число, решение аналога уравнения (32)  $\Delta(\alpha, \omega_s^m) = 0$ . На рис. 6а (мода не подавлена) колебания локализованы в приповерхностной области, максимум достигается в сравнительно широ-

кой полосе частот  $\omega_3^{-1} \pm 1 \times 10^{-2}$ . На рис. 6б (мода подавлена) видно, что колебания локализуются в нижней части слоя, максимум достигается в узкой полосе частот  $\omega_3^1 \pm 4 \times 10^{-4}$ . Характер поведения смещений на частотах до и после критической остается таким же, как и на рис. 5, с той разницей, что фаза меняется не один, а два раза: волна, стоячая до  $\omega_3^1$  и распространяющаяся выше  $\omega_3^1$ , имеет два узла. В окрестности ниже частоты  $\omega_3^1$  смещения вещественны, излучение отсутствует. Выше частоты  $\omega_3^1$  амплитуда колебаний является комплексной с мнимой частью, знак которой меняется в точках  $h_k^*$ .

Эффект подавления моды подтверждается рис. 7, на котором приведено распределение амплитуд и фаз смещений по глубине для слоя с подавляющим включением (рис. 7а — подавляемая мода и рис. 7б — неподдаваемая мода) в сравне-

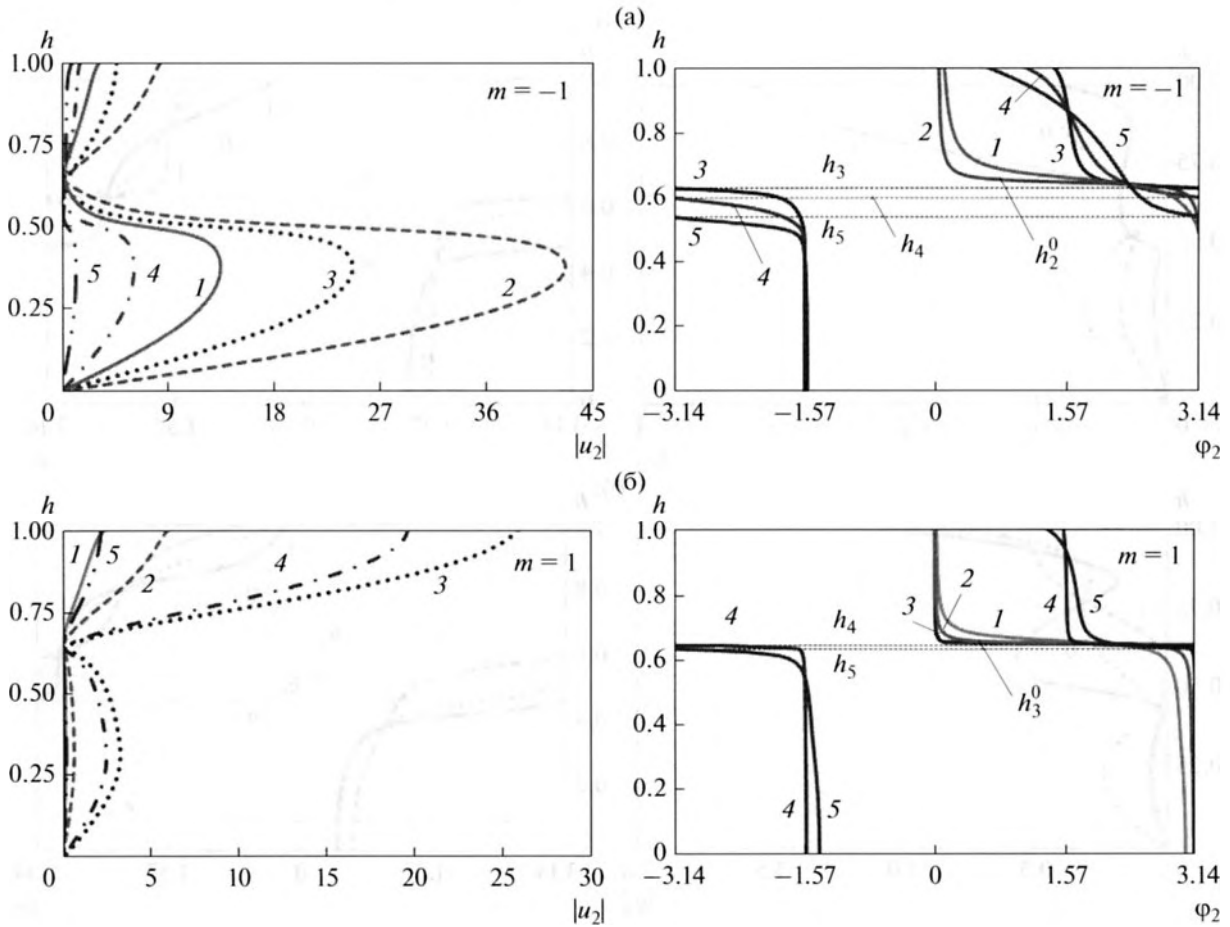


Рис. 5. Распределение амплитуды и фазы смещения по глубине для слоя с (а) податливым (подавляемая мода  $\omega_2^{-1} = 4.270418$ ) и (б) жестким (неподавляемая мода  $\omega_2^1 = 4.824122$ ) включением.

нии с однородным слоем (рис. 7в). Цифрами 1, 2, 3 и 4 на рис. 7а и 7в отмечены кривые для частот, отклоняющихся от критической частоты  $\omega_4^{-1}$  на  $\Delta\omega_4^{-1} = 2 \times 10^{-4}$ ,  $9.7 \times 10^{-6}$ ,  $-1 \times 10^{-5}$ ,  $-1 \times 10^{-4}$  (рис. 7а) и от  $\omega_5^0$  на  $\Delta\omega_5^0 = 2 \times 10^{-4}$ ,  $4 \times 10^{-5}$ ,  $-8 \times 10^{-6}$ ,  $-8 \times 10^{-4}$  (рис. 7в). Цифрам 1, 2 и 3 на рис. 7б соответствуют кривые для частот, отклоняющихся от  $\omega_5^{-1}$  на  $\Delta\omega_5^{-1} = 6 \times 10^{-6}$ ,  $-3 \times 10^{-4}$ ,  $-1 \times 10^{-3}$ . Как следует из рисунков, эффект подавления моды является характерным для слоя с включением. Колебания локализованы либо в придонной (рис. 7а – подавляемая мода), либо в приповерхностной (рис. 7б – неподавляемая мода) области. При этом для подавляемой моды характерно существенное сужение полосы. Характер поведения среды на частотах до и после критической остается таким же, как и на рис. 6, с той

разницей, что фаза меняется уже не два, а три (рис. 7а) или четыре (рис. 7б) раза. Как и ранее, в окрестности ниже частоты  $\omega_3^1$  смещения вещественны, излучение отсутствует. Выше частоты  $\omega_3^1$  амплитуда колебаний становится комплексной, мнимая часть которой меняет знак в  $h_k^*$ . Для сравнения на рис. 7в приведено распределение смещений для однородного слоя в окрестности пятой критической частоты. Нетрудно видеть, что колебания в однородном слое происходят по всей толщине с одинаковой амплитудой, эффект локализации отсутствует.

#### ВЛИЯНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ МАТЕРИАЛА СЛОЯ

На рис. 3 приведены графики, иллюстрирующие зависимость нулей и полюсов функции  $K_{22}$  от характера изменения  $\Delta\rho$ . Наблюдается сдвиг

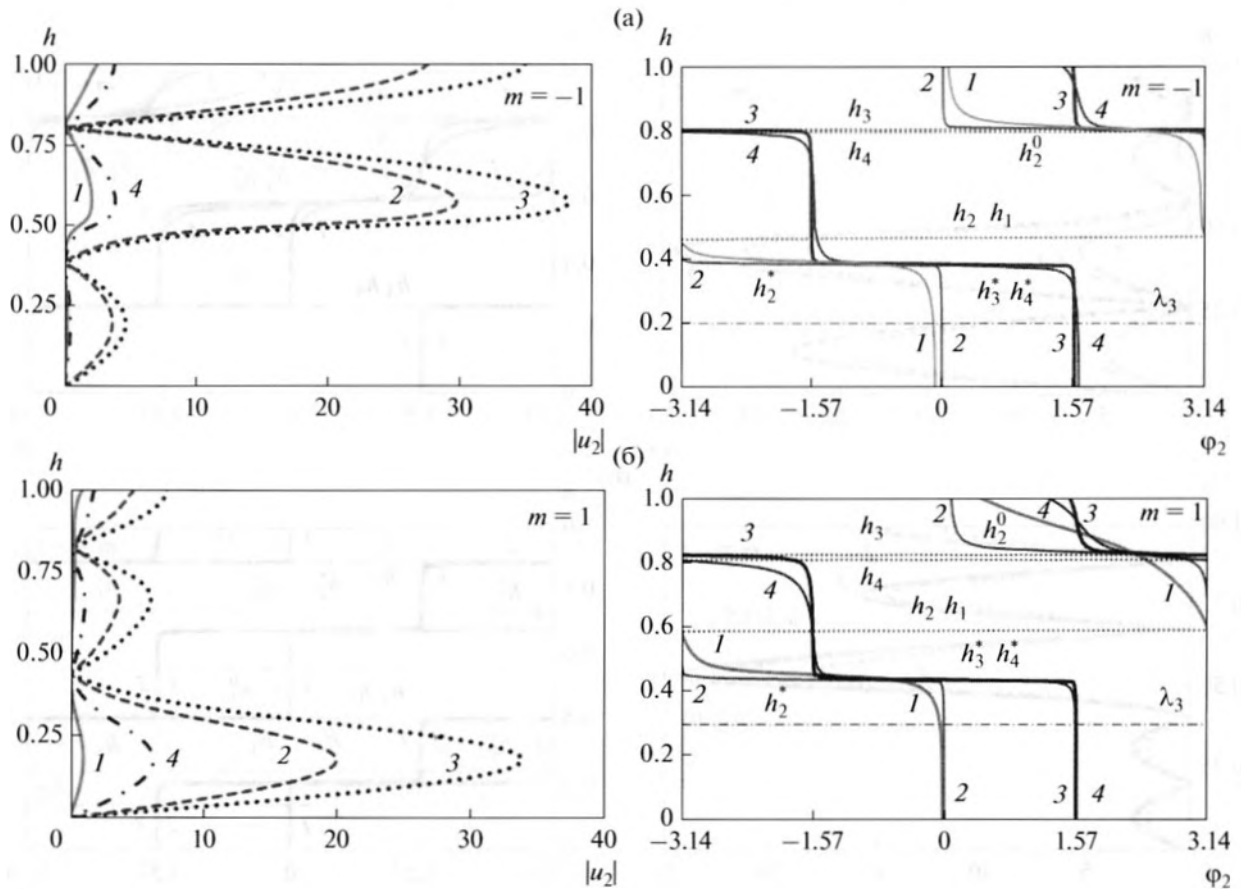


Рис. 6. Распределение амплитуд и фаз смещений по глубине для слоя с (а) податливым (неподавляемая мода  $\omega_3^{-1} = 7.875724$ ) и (б) жестким (подавляемая мода  $\omega_3^1 = 8.870378$ ) включением.

критических частот, а также изменение кривых нулей и полюсов. На рис. 8 приведено распределение амплитуд и фаз смещений по глубине слоя с жестким (рис. 8а) и податливым (рис. 8б) включением при различных  $\Delta\rho$ .

Из рис. 2 и 3 следует, что частоты  $\omega_2^1 = 4.824122$  и  $\omega_3^{-1} = 7.003794$  являются критическими для слоя с  $m = 1$ ,  $\Delta\rho = \Delta f$  (рис. 2б) и с  $m = -1$ ,  $\Delta\rho = 1/2\Delta f$  (рис. 3г) соответственно, причем они соответствуют частотам зарождения второй и третьей неподавляемых мод. Из графиков следует, что в обоих случаях смещения локализованы в приповерхностной области. Характер колебаний в окрестности критических частот соответствует изложенному выше. Из рис. 8а и 8б следует, что, изменяя  $\Delta\rho$ , можно или вызвать резонанс на заданной частоте, или подавить, или сместить его с приповерхностной области слоя в придонную. Возможность управления резонансными свойствами слоя основана на детальном изучении не только дисперсионных характеристик слоя, но,

что особенно важно, на исследовании взаимного расположения нулей и полюсов функции Грина среды.

### ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Помимо величины изменения плотности материала к сдвигу резонансных частот приводит воздействие различных типов НДС (1) материала. Ниже рассмотрено влияние одноосных начальных воздействий  $-1x_n: \sigma_{nn}^0 = p(x_3); \sigma_{kk}^0 = 0; k \neq n; n, k = 1, 2, 3$ .

На рис. 9 приведен фрагмент, иллюстрирующий влияние одноосных начальных напряжений на частоту выхода третьей дисперсионной кривой функции  $K_{22}$  для слоя с податливым включением в случае “акустически” неоднородного материала с  $\Delta\rho = 0.48\Delta f$ . Цифрами 0, 1, 2, 3 отмечены третьи моды слоя в ЕК и при одноосных  $1x_1, 1x_2, 1x_3$  начальных удлинениях  $v_i = 1.02$  соответственно.

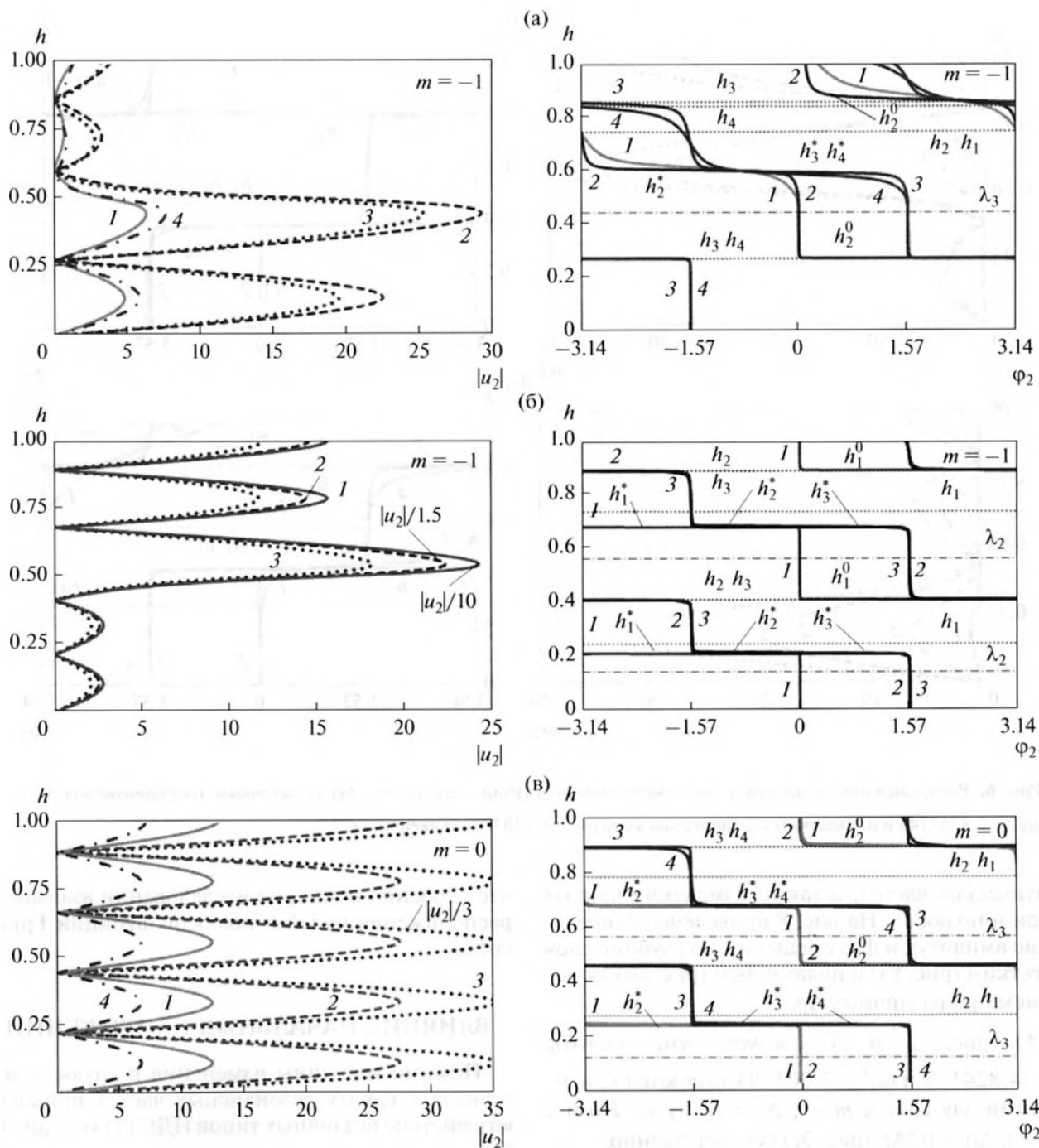


Рис. 7. Распределение амплитуды и фазы смещений: (а) для слоя с податливым включением (подавляемая мода  $\omega_4^{-1} = 11.404151$ ), (б) неподдаваемая мода  $\omega_5^{-1} = 14.775982$ , (в) для однородного слоя, мода  $\omega_5^0 = 14.137167$ .

**Замечание 3.** Для описания однородного начально-деформированного состояния слоя используются нелинейные соотношения с константами III порядка. Предполагается, что наведенные деформации могут принимать значения  $\pm 10^{-4} \leq \delta_i \leq \pm 3 \times 10^{-2}$ , что оправдано для рас-

считываемых одноосных НДС (1) и параметров материала [23]. В [20] обсуждаются экспериментальные результаты, полученные Бриджменом при давлении 20000 атмосфер. В [26] упоминается о нелинейности механических характеристик горных пород при одноосной начальной дефор-

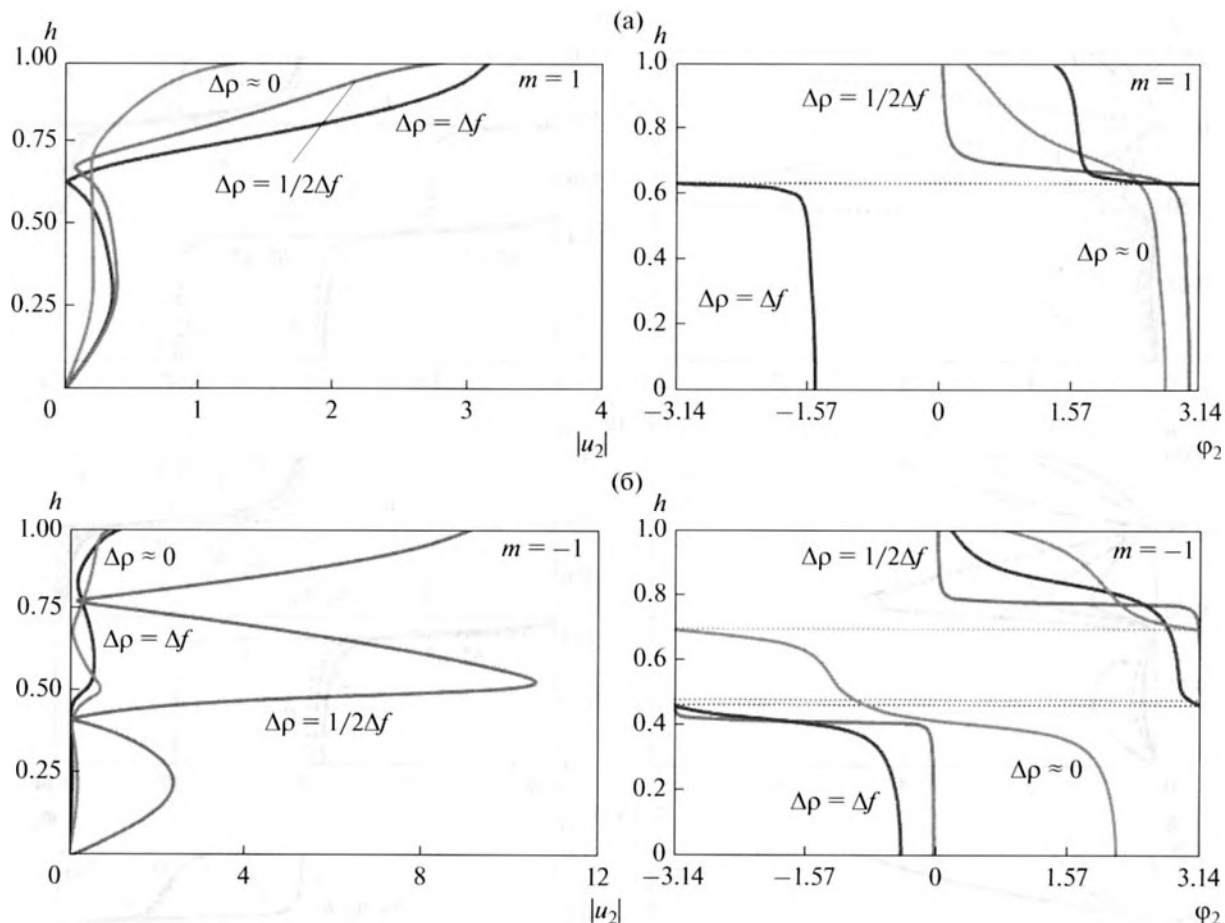


Рис. 8. Влияние величины изменения плотности слоя: (а) с жестким включением,  $\omega = 4.9$ , (б) с податливым включением,  $\omega = 7.0$ .

мации 5–10%. Ниже на рис. 9–11 для большей наглядности приведены результаты расчетов для деформации  $2 \times 10^{-2}$ , но в силу линейности проведенный анализ и полученные закономерности справедливы и для меньших деформаций.

На рис. 10 приведено распределение амплитуды и фазы смещений по толщине неоднородного слоя с податливым включением и  $\Delta\rho = 0.48\Delta f$  в естественном (рис. 10а) и одноосных НДС  $1x_1$  (рис. 10б),  $1x_2$  (рис. 10в),  $1x_3$  (рис. 10г) соответственно. Цифрами 0, 1, 2, 3 отмечены кривые для частот  $\omega_0^*, \omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$  (см. рис. 9) соответственно. Сравнивая рис. 6а и рис. 10, нетрудно заметить, что характер распределения амплитуды и фазы смещения по глубине соответствует характеру распределения для неподавляемых мод, однако значения резонансных частот значительно меньше.

Рисунок 11 иллюстрирует влияние величины изменения плотности на формирование волнового поля в слое с жестким включением. Кривые расчи-

таны для фиксированной частоты  $\omega = 4.824122$  в ЕК (рис. 11а) и в одноосных  $1x_1$  (рис. 11б),  $1x_2$  (рис. 11в),  $1x_3$  (рис. 11г) НДС слоя. Цифры 1, 2, 3 и 4

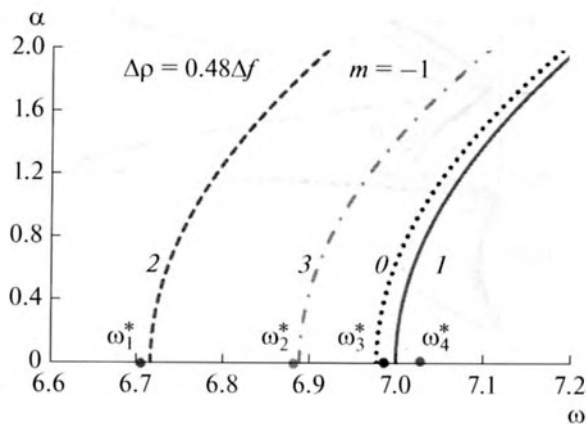


Рис. 9. Влияние одноосных начальных напряжений на третью критическую частоту неоднородного слоя с податливым включением.

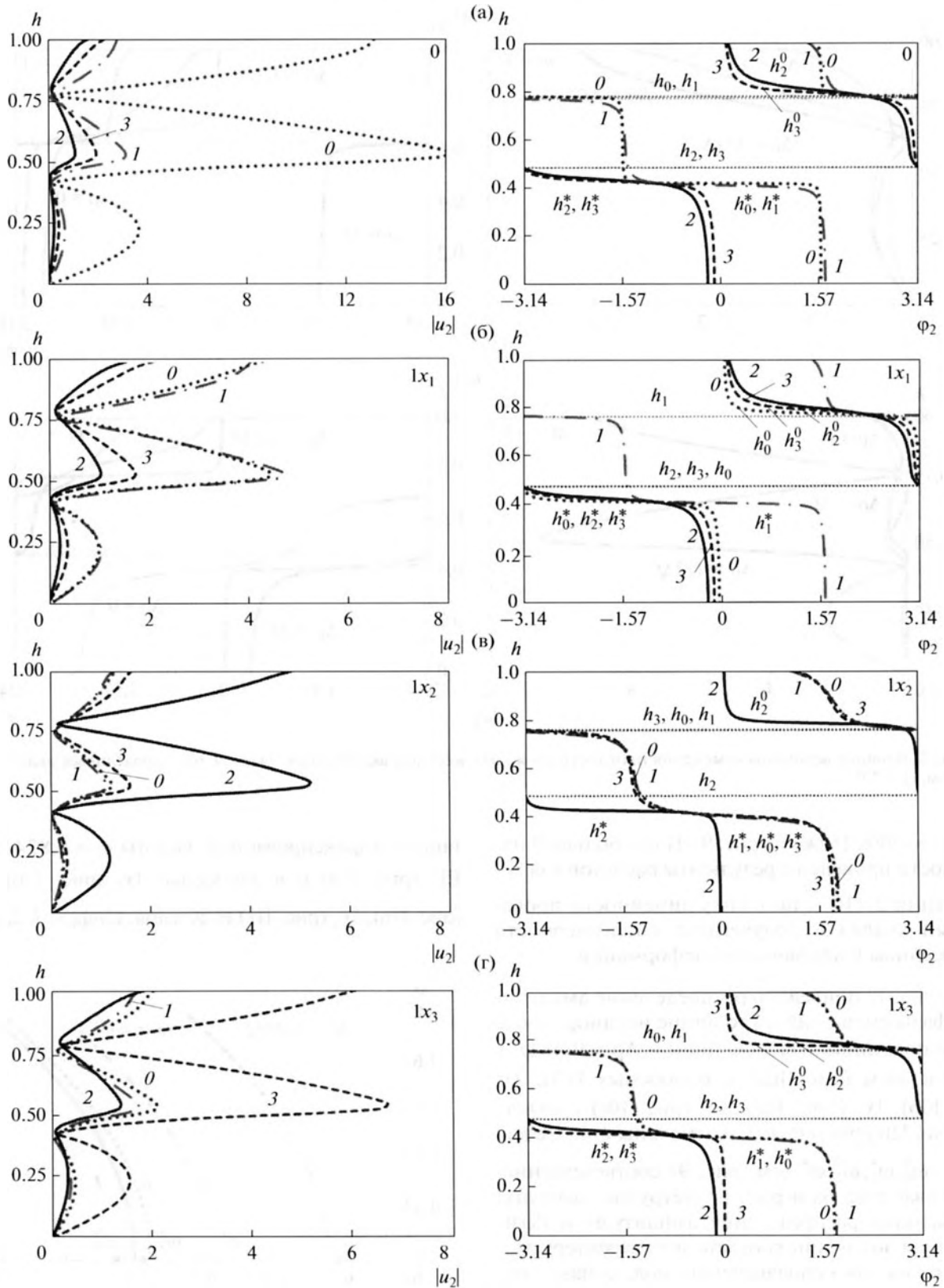


Рис. 10. Распределение амплитуды и фазы смещения по толщине слоя с податливым включением в окрестности третьей критической частоты (а) в ЕК (б–г) и при различных одноосных НДС.

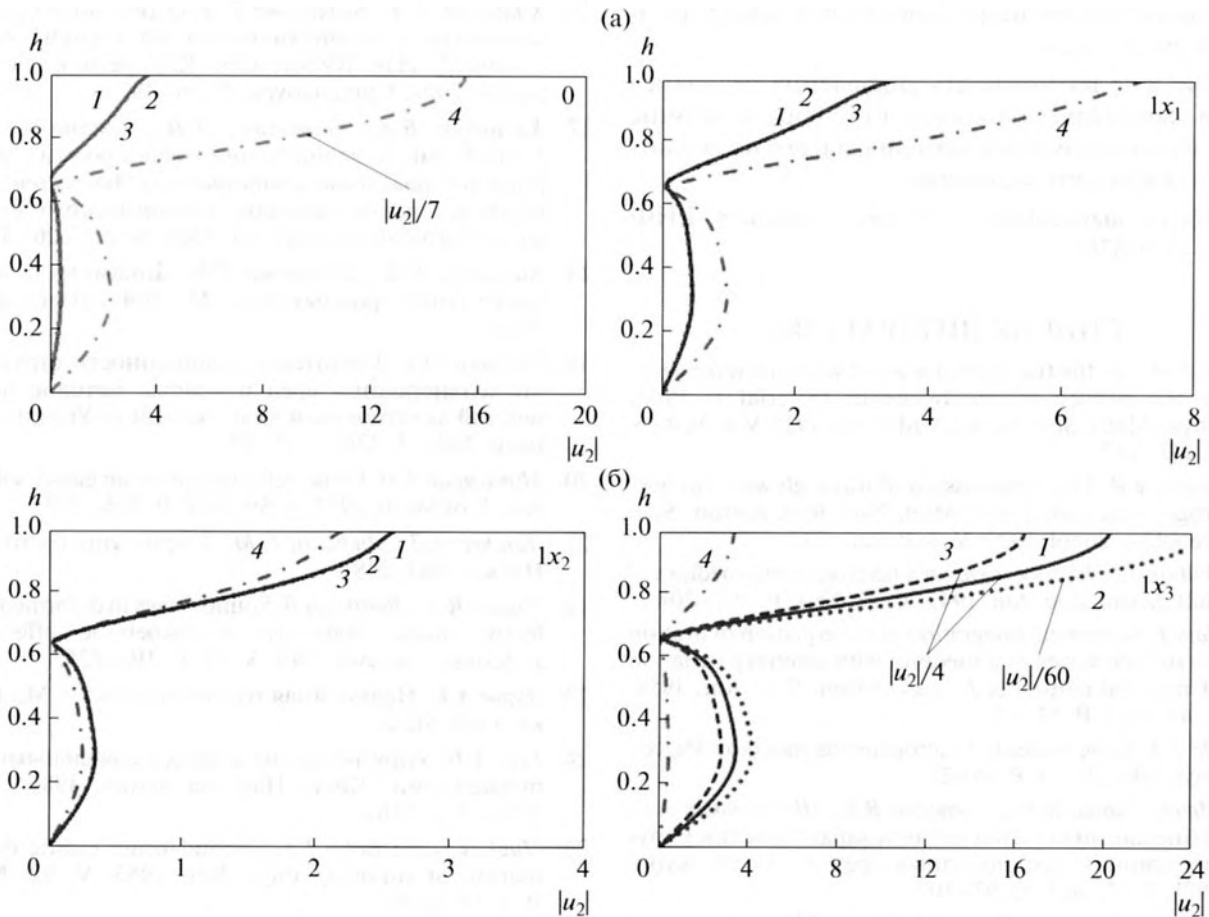


Рис. 11. Распределение амплитуды смещения по глубине слоя с жестким включением при различной величине изменения плотности.

отвечают значениям  $\Delta\rho = 0.6029\Delta f$ ,  $0.6031\Delta f$ ,  $0.6034\Delta f$  и  $0.7515\Delta f$  соответственно.

Нетрудно заметить, что незначительное возмущение плотности приводит к существенным изменениям волнового поля. Тем самым, наглядно продемонстрирована возможность создания условий для возникновения резонансных колебаний на заданной частоте за счет более точного подбора значения  $\Delta\rho$ . С другой стороны, используя воздействие начальных напряжений, можно целенаправленно влиять на резонансные свойства среды и тем самым предотвращать возникновение нежелательных эффектов на конкретных частотах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен эффективный метод исследования динамики функционально-градиентных сред, позволяющий исследовать широкий круг динамических проблем неоднородных сред,

включая тонкие вопросы локализации волновых полей в окрестности критических частот.

Для слоя, выполненного из функционально-градиентного материала и находящегося в условиях однородной начальной деформации, построена трехмерная функция Грина.

На примере сдвиговых колебаний установлена связь особенности локализации смещений по толщине слоя с характером неоднородности, величиной изменения плотности и типом наведенного начально-деформированного состояния.

Установлено различие в характере локализации смещений по глубине слоя в окрестности частот зарождения подавляемых и неподавляемых мод поверхностных волн. В окрестности зарождения подавляемой моды колебания локализуются в придонной области слоя; в окрестности зарождения неподавляемой моды колебания локализуются в приповерхностной области слоя.

Установлен существенный рост влияния начальных напряжений и величины изменения

плотности для неоднородного слоя в окрестности критических частот.

Показана возможность управления резонансными свойствами слоя за счет подбора величины изменения параметров материала и его начального напряженного состояния.

Работа выполнена в рамках проекта РНФ № 14-19-01676.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aichi K.* On the transversal seismic waves travelling up on the surface of heterogeneous material // *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan. 3-rd Series.* 1922. V. 4. № 4–5. P. 137–142.
2. *Stoneley R.* The transmission of Rayleigh waves in heterogeneous medium // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc. Geophys. Suppl.* 1934. V. 3. P. 222–232.
3. *Willson J.N.* Surface waves in a heterogeneous medium // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1942. V. 32. № 4. P. 297–304.
4. *Sato J.* Numerical integration of the equation of motion for surface waves in a medium with arbitrary variation of material constants // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1959. V. 49. № 4. P. 57–77.
5. *De T.K.* Love waves in heterogeneous media // *Pageophys.* 1968. V. 70. P. 18–21.
6. *Мачевариани М.М., Тотекин В.В., Шкварников А.П.* Импедансный метод расчета характеристик упругих слоисто-неоднородных сред // *Акуст. журн.* 1971. Т. 17. № 1. С. 97–102.
7. *Bhattacharya S.N.* Exact solutions of SH wave equation in transversely isotropic inhomogeneous elastic media // *Pageophys.* 1972. V. 93. № 3. P. 19–35.
8. *Ананьев И.В., Бабешко В.А.* Колебания штампа на слое с переменными по глубине характеристиками // *МТТ.* 1978. № 1. С. 64–69.
9. *Ананьев И.В., Калинин В.В., Полякова И.Б.* О возбуждении волн вибрирующим штампом в среде с неоднородными начальными напряжениями // *ПММ.* 1983. Т. 47. № 3. С. 483–491.
10. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
11. *Скобельцын С.А., Толоконников Л.А.* Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // *Акуст. журн.* 1990. Т. 36. № 4. С. 740–744.
12. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2002. 240 с.
13. *Collet B., Destrade M., Maugin G.A.* Bleustein–Gulyaev waves in some functionally graded materials // *European J. Mechanics A. Solids.* 2006. V. 25. P. 695–706.
14. *Matsuda O., Glorieux C.* A Green's function method for surface acoustic waves in functionally graded materials // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 121. № 6. P. 3437–3445.
15. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И., Жанг Ч.* Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 3. С. 370–385.
16. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* О динамике среды с непрерывно изменяющимися по глубине свойствами // *Изв. ВУЗов. Сев.-Кав. регион. Естест. науки.* 2004. Спецвыпуск. С. 46–49.
17. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И., Богомолов А.С.* К проблеме моделирования неоднородных материалов с заданными свойствами // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* 2006. № 2. С. 26–32.
18. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
19. *Руденко О.В.* Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // *Успехи физ. наук.* 2006. Т. 176. С. 77–95.
20. *Murnaghan F.D.* Finite deformations of an elastic solid // *Am. J. of Math.* 1937. V. 59. № 2. P. 235–260.
21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
22. *Toupin R.A., Bernstein B.* Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect // *J. Acoust. Soc. Am.* 1961. V. 33. P. 216–225.
23. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
24. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Киев: Наукова думка, 1986. Т. 1. 376 с. Т. 2. 536 с.
25. *Hughes D.S., Kelly J.L.* Second-order elastic deformation of solids // *Phys. Rev.* 1953. V. 92. № 5. P. 1145–1149.
26. *Бакулин В.Н., Протосеня А.Г.* О наличии нелинейных эффектов при распространении упругих волн в горных породах // *ДАН СССР.* 1982. Т. 263. № 2. С. 314–316.
27. *Секоян С.С.* О вычислении констант упругости третьего порядка по результатам ультразвуковых измерений // *Акуст. журн.* 1970. Т. 16. № 3. С. 453–457.
28. *Eastman D.E.* Measurement of Third-Order Elastic Moduli of Yttrium Iron Garnet // *J. Appl. Phys.* 1966. V. 37. № 6. P. 2312–2316.
29. *Волков А.Д., Кокшайский А.И., Коробов А.И., Прохоров В.М.* Коэффициенты упругости второго и третьего порядков в поликристаллическом сплаве алюминия марки АМГ6 // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 6. С. 685–691.
30. *Ерофеев В.И., Зазнобин В.А., Самохвалов Р.В.* К определению механических напряжений в твердых телах акустическим методом // *Акуст. журн.* 2007. Т. 53. № 5. С. 625–631.
31. *Никитина Н.Е., Камышев А.В., Казачек С.В.* Применение метода акустоупругости для определения напряжений в анизотропных трубных сталях // *Дефектоскопия.* 2015. № 3. С. 51–60.
32. *Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н.* Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. М.: Наука, 2009. 280 с.
33. *Никитина Н.Е.* Акустоупругость. Опыт практического применения. Н. Новгород: ТАЛАМ, 2005. 208 с.