

НЕЛИНЕЙНАЯ
АКУСТИКА

УДК 534.222

ИНТЕНСИВНАЯ ВОЛНА В ДЕФЕКТНЫХ СРЕДАХ,
СОДЕРЖАЩИХ ОДНОВРЕМЕННО КВАДРАТИЧНУЮ
И МОДУЛЬНУЮ НЕЛИНЕЙНОСТИ: УДАРНЫЕ ВОЛНЫ,
ГАРМОНИКИ И НЕРАЗРУШАЮЩИЙ КОНТРОЛЬ

© 2018 г. А. Л. Грэй^a, О. В. Руденко^{a, b, c, d, *}

^aТехнологический Институт Блекинге, Карлскрона, Швеция

^bМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Россия

^cИнститут общей физики им. А.М. Прохорова РАН
119991 Москва, ул. Вавилова 38, Россия

^dИнститут физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН
123242 Москва, Б. Грузинская ул. 10, стр. 1, Россия

*e-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 15.11.2017 г.

Предложено объяснение наблюдавшейся неклассической степенной зависимости амплитуды волны второй гармоники от амплитуды гармонической волны накачки как явлению, связанному с наличием двух типов нелинейности в структурно неоднородной среде. Указан подход к решению обратной задачи определения параметров нелинейности и показателя степени в указанной зависимости. Для описания эффектов сильно выраженной нелинейности предложены уравнения с двойной нелинейностью, обобщающие уравнения Хопфа и Бюргерса. Указана возможность их точной линеаризации. Рассчитаны профили, спектральный состав и средняя интенсивность волн в таких “двухжды нелинейных” средах. Найдена форма ударного фронта и оценена его ширина. Рассчитана убыль энергии волны, зависящая от обоих параметров нелинейности – квадратичной и модульной.

Ключевые слова: квадратичная модульная нелинейность, параметры нелинейности, диагностика, уравнения типа Хопфа–Бюргерса, ударный фронт, нелинейные потери

DOI: 10.1134/S0320791918040044

Недавние эксперименты [1, 2] показали, что зависимость амплитуды второй гармоники от амплитуды первой гармоники в структурно неоднородных твердых телах отличается от обычной квадратичной зависимости $A_2 = KA_1^2$. Она имеет форму $A_2 = KA_1^m$, где показатель степени лежит в диапазоне $1 < m < 2$.

Разумно предположить, что помимо классической квадратичной нелинейности среда имеет нелинейность второго типа, которая отвечает за отклонение от указанной классической зависимости. Таковой может быть так называемая “модульная” нелинейность [3]. Модульной нелинейностью обладают некоторые реальные твердые тела [4]. Она исследовалась в нелинейной акустике [5, 6]. Недавно были изучены разнообразие математические модели и физические явления, обобщающие результаты классической нелинейной акустики [7, 8] для модульных сред [9–14].

Напомним схему получения волнового уравнения в упругой среде, содержащей как квадратичную, так и модульную нелинейности. Одномерное уравнение движения динамической теории упругости для изотропной среды имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Здесь σ – механическое напряжение, ε – деформация, ρ – плотность массы.

Примем уравнение состояния в следующем виде:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \left(\sigma + g|\sigma| + \frac{\delta}{E} \sigma^2 \right). \quad (2)$$

Здесь E – модуль Юнга, $g|\sigma|$ – модульный нелинейный член [3], $\delta\sigma^2$ – член с квадратичной нелинейностью, g, δ – безразмерные константы. Под-

ставляя (2) в (1), получим уравнение для напряжения:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sigma + g|\sigma| + \delta \frac{\sigma^2}{c^2 \rho} \right) = c^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Считая нелинейные члены малыми и пользуясь методом медленно изменяющегося профиля, получим из (3) эволюционное уравнение, описывающее бегущую волну:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(g|\sigma| + \delta \frac{\sigma^2}{c^2 \rho} \right) = 0. \quad (4)$$

Известный метод упрощения, использованный при переходе от нелинейного волнового уравнения (3) к нелинейному эволюционному уравнению (4), подробно описан в учебниках (см., например, [7, 8]).

В случае слабо выраженных нелинейных эффектов можно решить уравнение (4) методом последовательных приближений. Уравнения первого и второго приближений имеют вид

$$\frac{\partial \sigma^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma^{(2)}}{\partial x} = -\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(g|\sigma^{(1)}| + \delta \frac{\sigma^{(1)2}}{c^2 \rho} \right). \quad (5)$$

Если на входе нелинейной среды задана гармоническая волна с частотой ω , из уравнений (5) получаем

$$\sigma^{(1)} = -A_1 \sin(\omega\tau), \quad \frac{\partial \sigma^{(2)}}{\partial x} = -\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial \tau} \times \left(gA_1 |\sin(\omega\tau)| + \frac{\delta}{c^2 \rho} A_1^2 \sin^2(\omega\tau) \right). \quad (6)$$

Правая часть уравнения второго приближения содержит высшие гармоники, поскольку

$$|\sin(\omega\tau)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\omega\tau)}{(2n-1)(2n+1)}, \quad (7)$$

$$\sin^2(\omega\tau) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega\tau).$$

Подставляя (7) в (6), найдем волну на частоте второй гармоники:

$$\sigma^{(2)} = -\frac{\omega}{c} x \left(\frac{4}{3\pi} gA_1 + \frac{\delta}{2c^2 \rho} A_1^2 \right) \sin(2\omega\tau). \quad (8)$$

Видим, что модульная нелинейность дает линейную зависимость амплитуды второй гармоники от амплитуды первой: $A_2 \sim A_1$, в то время как квадратичная нелинейность дает иную зависимость: $A_2 \sim A_1^2$. В общем случае, когда существенны обе нелинейности, показатель степени в зависимости $A_2 = KA_1^m$ лежит в области от 1 до 2.

Относительный вклад квадратичной и модульной нелинейностей характеризуется числом

$$S = 2 \frac{\delta}{g} \frac{A_1}{c^2 \rho}. \quad (9)$$

При $S \gg 1$ преобладает квадратичная нелинейность, а при $S \ll 1$ модульная нелинейность проявляется сильнее.

Различие в степенной зависимости может быть использовано для восстановления параметров уравнения состояния (2). Для решения обратной задачи необходимо выполнить по крайней мере два измерения на фиксированном расстоянии, но для двух разных значений амплитуды волны основной частоты. Чтобы показать это, сделаем следующее. Введем акустические числа Маха $M_{1,2} = A_{1,2}/(c^2 \rho)$ для первой и второй гармоники и перепишем зависимость (8) для двух измерений в следующей форме:

$$DM_1(1) + GM_1^2(1) = -M_2(1), \quad (10)$$

$$DM_1(2) + GM_1^2(2) = -M_2(2).$$

Здесь обозначено

$$G = \frac{4}{3\pi} gkx, \quad D = \frac{\delta}{2} kx, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (11)$$

В скобках при числах Маха указан номер соответствующего измерения – первый или второй. Предполагается, что числа Маха, расстояние, скорость звука и частота известны. Решая систему двух уравнений (10) относительно неизвестных D, G , найдем параметры модульной и квадратичной нелинейностей:

$$g = \frac{3\pi}{4kx} \frac{M_1(1)M_2(2) - M_1(2)M_2(1)}{M_1(1)M_1(2)[M_1(1) - M_1(2)]}, \quad (12)$$

$$\delta = \frac{2}{kx} \frac{M_2(1)M_1^2(2) - M_2(2)M_1^2(1)}{M_1(1)M_1(2)[M_1(1) - M_1(2)]}.$$

Конечно, можно выполнить не только два, но и большее число измерений. При этом точность определения параметров уравнения состояния возрастет.

Показатель степени в зависимости $A_2 = KA_1^m$ (или в безразмерных обозначениях $M_2 = QM_1^m$) может быть найден из любого из двух уравнений (10):

$$DM_1 + GM_1^2 = -M_2(1) = (D + \sqrt{G})M_1^m, \quad (13)$$

$$m = \frac{\ln(DM_1 + GM_1^2)}{\ln(DM_1 + \sqrt{GM_1})}.$$

Из формулы (13) следуют правильные предельные переходы. Действительно, если преобладает модульная нелинейность и $D \rightarrow \infty$, то $m \rightarrow 1$. В противоположном случае, если $G \rightarrow \infty$, то $m \rightarrow 2$.

Для дальнейшего анализа запишем уравнение (4) в безразмерной форме:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(|V| + \frac{S}{2} V^2 \right) = 0. \quad (14)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$V = -\frac{\sigma}{A_1}, \quad \theta = \omega t, \quad z = \frac{x}{l_{SH}} = \frac{\omega g x}{2c}. \quad (15)$$

Решение обобщенного уравнения Хопфа (14), удовлетворяющее условию $V = \Phi(\theta)$ на границе $z = 0$, имеет вид

$$V = \Phi[\theta + z \text{sign}(V) + zSV]. \quad (16)$$

Процесс нелинейного искажения исходной (при $z = 0$) гармонической волны $\Phi(\theta) = \sin \theta$ с ростом пройденного ею расстояния пояснен на рис. 1. Модульная нелинейность сдвигает положительный и отрицательный полупериоды в противоположных направлениях вдоль оси θ на расстояние z . В результате ударный фронт в волновом профиле образуется на сколь угодно малых расстояниях, и сразу же начинается нелинейное затухание на фронте. В то же время начальная форма положительных и отрицательных полупериодов искажается в результате квадратичной нелинейности.

Из соображений симметрии следует, что для волны, изображенной на рис. 1, центр фронта расположен при $\theta = 0$ на любом расстоянии z . Этот факт позволяет рассчитать величину скачка на ударном фронте. Запишем решение (16) в параметрической форме:

$$V = \sin \xi, \quad \theta = \xi - z \text{sign}(\xi) - zS \sin(\xi). \quad (17)$$

Полагая в решении (17)

$$\theta = 0, \quad V(\theta = 0) \equiv V_0, \quad \xi(\theta = 0) \equiv \xi_0,$$

для положительного пикового возмущения на фронте $V_0(z)$ находим

$$z = \frac{\xi_0}{1 + S \sin \xi_0}, \quad V_0 = \frac{1}{S} \left(\frac{\xi_0}{z} - 1 \right). \quad (18)$$

Как следует с очевидностью из рис. 1, отрицательное возмущение имеет ту же величину.

Первая формула (18) позволяет найти вспомогательную функцию $\xi_0(z)$. Она показана на рис. 2 для трех значений S , равных 0.3 (кривая 1), 1 (кривая 2) и 3 (кривая 3). Зная расстояние z и функцию $\xi_0(z)$, с помощью второй формулы (18) можно определить величину скачка $V_0(z)$. Результаты показаны на рис. 3 для тех же значений параметра S : 0.3 (кривая 1), 1 (кривая 2) и 3 (кривая 3). Видно, что разрыв начинает формироваться уже при $z = 0$. Он растет до максимального значения $V_0 = 1$, а затем уменьшается до нуля

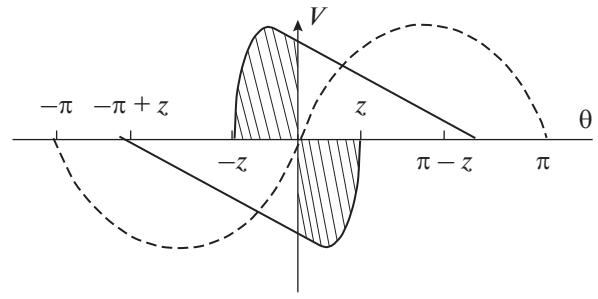


Рис. 1. Трансформация одного периода исходной синусоидальной волны (штриховая кривая) при ее распространении в среде с квадратичной и модульной нелинейностями. Искаженный профиль показан сплошной линией. Ударный фронт “отрезает” равные площади (они заштрихованы) от положительного и отрицательного полупериодов.

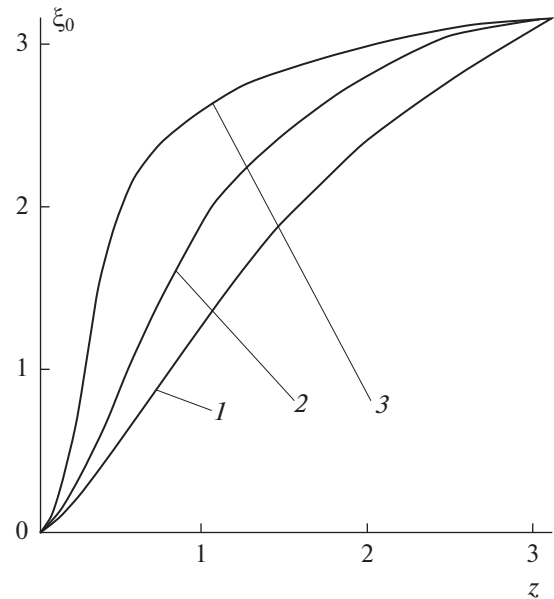


Рис. 2. Функция $\xi_0(z)$ для трех значений $S = 0.3, 1, 3$ (кривые 1, 2 и 3 соответственно).

на конечном расстоянии $z = \pi$, где волна полностью поглощается из-за нелинейного затухания.

Нетрудно рассчитать зависимость средней интенсивности волны от расстояния. Интенсивность равна

$$\overline{V^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V^2(z, \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi-z} \sin^2(\theta + z + zSV) d\theta. \quad (19)$$

Интеграл (19) от неявной функции вычисляется методом, описанным в [7, 8]. Требуется перейти от интегрирования по $d\theta$ к интегрированию по $d\xi$. Принимаем во внимание, что пределы ин-

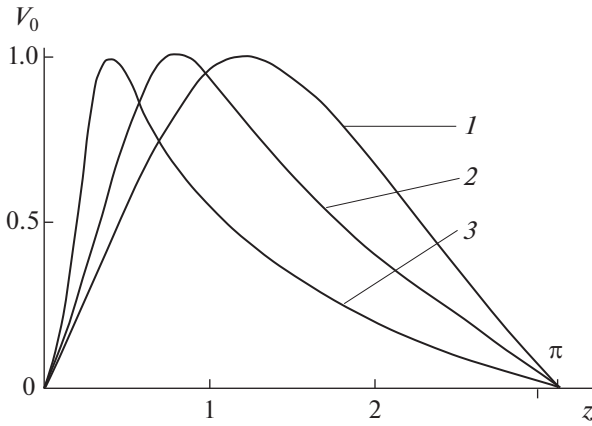


Рис. 3. Изменение с расстоянием величины скачка на ударном фронте. Кривые 1–3 соответствуют значениям $S = 0.3, 1, 3$.

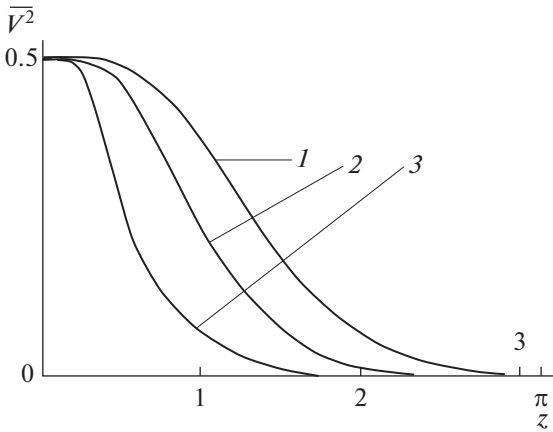


Рис. 4. Уменьшение с расстоянием интенсивности волны (усредненной за период). Кривые 1–3 соответствуют значениям $S = 0.3, 1, 3$.

тегрирования $(0, \pi - z)$ изменятся на $(\xi_0(z), \pi)$. Результат таков:

$$2\overline{V^2} = 1 - \frac{1}{\pi} \left(\xi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\xi_0 - \frac{2}{3} zS \sin^3 \xi_0 \right). \quad (20)$$

Итак, интенсивность выражается через вспомогательную функцию $\xi_0(z)$, которая уже найдена (см. рис. 2). Уменьшение интенсивности с расстоянием, пройденным волной, иллюстрировано на рис. 4, построенным для тех же значений параметра S , что и предыдущие рисунки.

Спектр высших гармоник, который можно найти из решения (16), применим не только при анализе слабых сигналов. Он обобщает результаты теории возмущений (8) и справедлив для сильно искаженных волн, содержащих ударные фронты.

Нечетные функции, показанные на рис. 1, можно разложить в ряд Фурье по синусным гармоникам:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(z) \sin(n\theta), \quad (21)$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi-z} \sin(\theta + z + zS V) \sin(n\theta) d\theta.$$

Переходя от интегрирования по $d\theta$ к интегрированию по $d\xi$, как это было сделано выше в формуле (19), получим выражение

$$B_n = \frac{2}{\pi n} V_0(z) + \frac{2}{\pi n} \int_{\xi_0(z)}^{\pi} \cos[n(\xi - z - zS \sin \xi)] \cos \xi d\xi. \quad (22)$$

Интеграл (22) можно выразить через неполные функции Бесселя. Но они плохо табулированы, так что для сравнения теории с экспериментальными данными требуется использовать численное интегрирование. Функции $\xi_0(z)$ и $V_0(z)$, содержащиеся в (22), уже известны. Их поведение показано на рис. 2 и 3.

Уравнение (14) можно обобщить для диссипативной среды. Оно примет вид типа уравнения Бюргера:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(|V| + \frac{S}{2} V^2 \right) = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (23)$$

Здесь

$$\Gamma = \frac{l_{SH}}{l_{DISS}} = \frac{b\omega}{g\rho c^2}; \quad (24)$$

Γ – отношение характерных длин нелинейности l_{SH} и диссипации l_{DISS} ; b – диссипативный коэффициент. Как показано в [3], уравнение (23) может быть линеаризовано заменой переменной:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \pm \frac{\partial U}{\partial \theta} + \Gamma \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}, \quad U = \exp \left[\frac{S}{2\Gamma} \int V(z, \theta) d\theta \right]. \quad (25)$$

В (25) знак “плюс” справедлив для положительных значений производной $U_\theta > 0 (V > 0)$, а знак “минус” – для $U_\theta < 0 (V < 0)$.

Решение задачи при отличной от нуля диссипации не содержит сингулярностей. Во-первых, можно сгладить разрыв функции, расположенный в точке $\theta = 0$ (см. рис. 1), то есть описать структуру фронта конечной ширины. Во-вторых, можно сгладить разрывы производной, образующиеся в точках $\pi - z, -\pi + z$. Соответствующая схема расчетов дана в работе [3].

Следуя этой схеме, положим в (23) производную по z равной нулю и решим соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$2\Gamma \frac{dV}{d\theta} + SV^2 + 2|V| = S + 2. \quad (26)$$

Константа интегрирования выбрана равной $(S + 2)$, чтобы удовлетворить граничным условиям на бесконечности:

$$\left. \frac{dV}{d\theta} \right|_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0, \quad |V|_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 1. \quad (27)$$

Положительная и отрицательная ветви решения таковы:

$$SV = -1 + (S + 1) \operatorname{th} \left(\frac{(S + 1)}{2\Gamma} (\theta + \theta_+) \right), \quad V > 0; \quad (28)$$

$$SV = 1 + (S + 1) \operatorname{th} \left(\frac{(S + 1)}{2\Gamma} (\theta + \theta_-) \right), \quad V < 0.$$

Здесь θ_+, θ_- — константы интегрирования. Поскольку решение должно быть непрерывным при $\theta = 0$, находим константы

$$\theta_{\pm} = \pm \frac{2\Gamma}{(S + 1)} \operatorname{arc th} \frac{1}{(S + 1)}. \quad (29)$$

Сшивание обеих ветвей решения (28) ведет к единой формуле, описывающей ударный фронт с центром, расположенным при $\theta = 0$:

$$V = \operatorname{sign}(\theta)(S + 2) \frac{\operatorname{th} \left(\frac{S + 1}{2\Gamma} |\theta| \right)}{(S + 1) + \operatorname{th} \left(\frac{S + 1}{2\Gamma} |\theta| \right)}. \quad (30)$$

Решение (30) в предельных случаях больших и малых значений параметра S должно правильно описывать форму ударного фронта в средах, имеющих только одну из нелинейностей, квадратичную или модульную. Эти частные предельные формы фронта хорошо известны:

$$V = \operatorname{th} \left(\frac{S}{2\Gamma} \theta \right), \quad V = \operatorname{sign}(\theta) \left[1 - \exp \left(-\frac{|\theta|}{\Gamma} \right) \right]. \quad (31)$$

Легко проверить, что первая и вторая функции (31) удовлетворяют соответственно первому и второму уравнениям (32), которые являются частными версиями общего уравнения (23):

$$\frac{\partial V}{\partial z} - SV \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial |V|}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (32)$$

Крутизна или ширина фронта оценивается величиной производной, вычисленной на основе решения (30) в точке $\theta = 0$:

$$\left. \frac{d\theta}{dV} \right|_{\theta=0} = \frac{2\Gamma}{S + 2}. \quad (33)$$

Как следует из (33) в соответствии с формулами (31), ширина фронта равна Γ для модульных сред

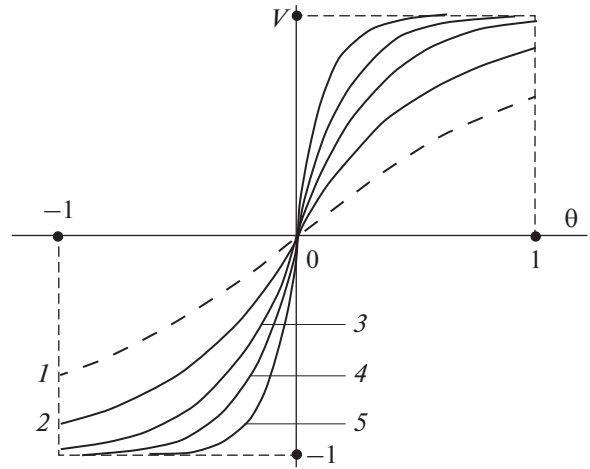


Рис. 5. Формы ударного фронта в среде с модульной и квадратичной нелинейностями. Штриховая кривая 1 построена для значений параметров $\Gamma = 1, S = 0$. Сплошные кривые 2–5 построены для $\Gamma = 0.5$ и $S = 0, 1, 2, 4$ соответственно.

($S = 0$) и уменьшается с ростом квадратичной нелинейности S . Итак, квадратичная нелинейность способна существенно сузить ударный фронт, сформированный модульной нелинейностью.

Рассчитаем теперь потери энергии, которые происходят главным образом внутри области, занятой ударным фронтом. Для этого умножим уравнение на $2V$ и проинтегрируем в бесконечных пределах:

$$\frac{\partial V^2}{\partial z} - \left(V|V| + \frac{2S}{3} V^3 \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = -2\Gamma \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2. \quad (34)$$

Второй член в левой части исчезает из-за симметрии граничных условий (27) для стационарного решения. Таким образом, потери определяются правой частью уравнения (34):

$$-2\Gamma \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 = -2\Gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dV}{d\theta} \right)^2 d\theta = -2\Gamma \int_{-1}^1 \frac{dV}{d\theta} dV. \quad (35)$$

При вычислении интеграла нужно использовать стационарное решение (30) и положить в нем:

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{(S + 1)^2 (S + 2)}{2\Gamma} \frac{(1 - X^2)}{[(S + 1) + X]^2}, \quad (36)$$

$$X \equiv \operatorname{th} \left(\frac{S + 1}{2\Gamma} \theta \right) = \frac{(S + 1)V}{(S + 2) - V}.$$

В силу симметрии решения и замены переменных можно ограничиться интегрированием по области положительных значений $0 \leq X \leq 1$. Несмотря на сложные вычисления, получается простая формула. Результат таков:

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2} &= \frac{1}{\Gamma}(S+1)^3(S+2)^2 \times \\ &\times \int_0^1 \frac{(1-X^2)dX}{[(S+1)+X]^4} = \frac{2S+3}{3\Gamma}. \end{aligned} \quad (37)$$

В частных случаях больших и малых значений числа S эта формула приводит к результатам, согласующимся с частными решениями (31). Интересно, что скорость убывания энергии

$$\frac{\partial \overline{V^2}}{\partial z} = -\left(2 + \frac{4}{3}S\right) \quad (38)$$

не зависит от числа Γ , то есть от коэффициента линейной диссипации b .

В заключение отметим, что предложенные здесь способы оценки параметров различных типов нелинейности в дальнейшем будут применены для сравнения с имеющимися экспериментальными данными. Желательно проведение дополнительных измерений, использующих изложенные выше результаты. Определение двух типов нелинейных модулей может быть полезным при оценке дефектной структуры материалов.

Теоретическое изучение “дважды нелинейных” моделей типа Хопфа и Бюргерса представляет независимый интерес для математической физики.

Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 14-22-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов А.И., Прохоров В.М. Нелинейные акустические свойства алюминиевого сплава В95 и композита В95/наноалмаз // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 6. С. 661–667.
2. Korobov A.I., Kokshaiskii A.I., Prokhorov V.M., Evdokimov I.A., Perfilov S.A., Volkov A.D. Mechanical and nonlinear elastic characteristics of polycrystalline AlMg6 aluminum alloy and n -AlMg6/C₆₀ nanocomposite // Phys. Solid State. 2016. V. 58. № 12. P. 2472–2480.
3. Rudenko O.V. Equation admitting linearization and describing waves in dissipative media with modular, quadratic, and quadratically-cubic nonlinearities // Doklady Mathematics. 2016. V. 94. № 3. P. 703–707.
4. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 318 с.
5. Radostin A.V., Nazarov V.E., Kiyashko S.B. Propagation of nonlinear acoustic waves in bimodular media with linear dissipation // Wave Motion. 2013. V. 50. № 2. P. 191–196.
6. Назаров В.Е., Кияшко С.Б., Радостин А.В. Волновые процессы в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59. № 3. С. 275–285.
7. Rudenko O.V., Soluyan S.I. Theoretical foundations of nonlinear acoustics. New York: Plenum, 1977. 274 p.
8. Gurbatov S.N., Rudenko O.V., Saichev A.I. Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, and Beijing: Higher Education Press, 2011. 472 p.
9. Rudenko O.V. Nonlinear oscillators with “modulus” potentials: dynamic and stochastic solutions // Doklady Mathematics. 2015. V. 92. № 2. P. 268–271.
10. Rudenko O.V. Modular solitons // Doklady Mathematics. 2016. V. 94. № 3. P.708–711.
11. Михайлов С.Г., Руденко О.В. Простая модель нелинейного элемента // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 3. С. 246–250.
12. Rudenko O.V. Inhomogeneous Burgers equation with modular nonlinearity: excitation and evolution of high-intensity waves // Doklady Mathematics. 2017. V. 95. № 3. P. 291–294.
13. Rudenko O.V., Hedberg C.M. A new equation and exact solutions describing focal fields in media with modular nonlinearity // Nonlinear Dynamics. 2017. V. 89. № 3. P. 1905–1913.
14. Hedberg C.M., Rudenko O.V. Collisions, mutual losses and annihilation of pulses in a modular nonlinear medium // Nonlinear Dynamics. 2017. V. 90. № 3. P. 2083–2091.