КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 519.958:531.33:517.956.8

ОБОСТРЕНИЕ И СГЛАЖИВАНИЕ ОКОЛОПОРОГОВЫХ АНОМАЛИЙ ВУДА В АКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

© 2018 г. С. А. Назаров^{а, b}

^aСанкт-Петербургский государственный университет 199034 Санкт-Петербург, Университетская наб. 7—9, Россия ^bИнститут проблем машиноведения РАН 199178 Санкт-Петербург, Васильевский остров, Большой просп. 61, Россия e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk
Поступила в редакцию 08.09.2017 г.

Пологое возмущение жесткой стенки плоского акустического волновода может вызвать аномалию Вуда, выражающуюся в несоразмерно быстром изменении дифракционной картины при приближении снизу к частотам отсечки внутри непрерывного спектра. При помощи асимптотического анализа установлены ограничения на профиль возмущения стенки, обеспечивающие возникновение аномалии, ее обострение или исчезновение. Исследуется асимптотика собственных частот и обсуждаются комплексные и пороговые резонансы.

Ключевые слова: акустический волновод, возмущение стенки, асимптотика, точки отсечки в непрерывном спектре, аномалия Вуда, комплексный и пороговый резонансы

DOI: 10.1134/S0320791918050076

ВОЛНОВОД С ИСКАЖЕННЫМИ СТЕНКАМИ

Жестким стенкам Γ^0_\pm прямого плоского акустического волновода $\Pi^0=\{(x,y)\colon x\in\mathbb{R},\,|y|<1/2\}$ (рис. 1a) придано локальное пологое возмущение, т.е. искаженный волновод Π^ϵ (рис. 1б, 1в) ограничен кривыми

$$\Gamma_{\pm}^{\varepsilon} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, \ y = \pm \frac{1}{2} \pm \varepsilon H_{\pm}(x) \right\}. \tag{1}$$

Здесь H_\pm — произвольные гладкие профильные функции, которые обращаются в нуль при $|x|\!\!>\!\!\ell>0$, но далее будут подчинены дополнительным условиям. Предположение о гладкости нужно для упрощения рассуждений и выкладок, однако окончательные формулы и выводы сохраняются и для непрерывных кусочно-гладких профилей. Давление u^ϵ удовлетворяет задаче Неймана для оператора Лапласа:

$$-\Delta u^{\varepsilon}(x,y) = \lambda^{\varepsilon} u^{\varepsilon}(x,y), \quad (x,y) \in \Pi^{\varepsilon}, \tag{2}$$

$$\partial_{n_{-}^{\varepsilon}} u^{\varepsilon}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial \Pi^{\varepsilon} = \Gamma_{+}^{\varepsilon} \cup \Gamma_{-}^{\varepsilon}.$$
 (3)

При этом $\partial_{n_{\pm}^{\varepsilon}}$ — производная вдоль внешней нормали,

$$(1 + \varepsilon^{2} |\partial_{x} H_{\pm}(x)|^{2})^{1/2} \partial_{n_{\pm}^{\varepsilon}} = \pm \partial_{y} - (\partial_{x} H_{\pm}(x)) \partial_{x},$$

$$\partial_{x} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_{y} = \frac{\partial}{\partial y},$$
(4)

а $\lambda^{\epsilon} = \kappa_{\epsilon}^2$ — спектральный параметр, и $\kappa_{\epsilon} > 0$ — частота гармонических во времени колебаний (волновое число поршневой моды). Далее удобно иметь дело именно с λ -спектром, а переход к к-спектру, нужный при исследовании комплексных резонансов в конце статьи, не вызывает затруднений.

Непрерывный λ -спектр $\sigma_c = [0, +\infty)$ задачи (2), (3) не зависит от ϵ и порогами $\pi^2 k^2$, $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, отвечающими частотам отсечек πk , разбивается на участки постоянной кратности. В статьях [1-4] для других задач математической физики установлено, что при малом $\epsilon > 0$ путем подбора профилей возмущения стенок (1) можно образовать собственное число

$$\lambda^{\varepsilon} = \lambda^{0} - \varepsilon^{2} \tau^{2} + \tilde{\lambda}^{\varepsilon}, \quad \tau > 0, \quad \left| \tilde{\lambda}^{\varepsilon} \right| \leq c \varepsilon^{3}, \tag{5}$$

расположенное ниже любого, но заданного наперед порога $\lambda^0 = \pi^2 k^2$. Оно вкраплено в непрерыв-

ный спектр и обладает природной неустойчивостью, и поэтому его возникновение требует точной настройки 2k (по числу распространяющихся волн) параметров профилей H_{\pm} . Далее соответствующая процедура будет применена и к задаче (2), (3), однако основное внимание в данной статье уделяется ситуации, в которой вместо собственного числа появляется точка комплексного резонанса [5, 6] или сохраняется пороговый резонанс [7-9]. При этом в прямой полосе пороговый резонанс, порожденный не зависящей от продольной координаты x, в частности, стабилизирующейся на бесконечности волной $\cos(\pi k(y-1/2))$, разумеется, присутствует на пороге $\pi^2 k^2$, но комплексного резонанса заведомо нет. Комплексные резонансы ассоциируются (см. статьи [6, 7] и др.) с полюсами резольвенты в комплексной плоскости, которая (резольвента) получена аналитическим продолжением с физического на нефизический лист. Если точка комплексного резонанса попадает на порог, то она становится точкой порогового резонанса, а если на вещественную ось вне порогов. то обычным собственным числом, вкрапленным в непрерывный спектр.

Как известно, точка комплексного резонанса провоцирует аномалии Вуда [10] (см. также [11-13] и др.), заключающиеся в несоразмерно быстром изменении дифракционной картины при приближении спектрального параметра к порогу внутри непрерывного спектра, и обязательно снизу от него. Впервые аномалии рассеяния световых волн на решетках были обнаружены P. Byдом. Поскольку формулировка соответствующей математической задачи обычно переносится при помощи условий квазипериодичности на бесконечную призму (см., например, монографию [14]), этот же термин используется при возникновении патологического поведения коэффициентов отражения и прохождения, т.е. матрицы рассеяния в цилиндрических волноводах. В данной работе аномалии Вуда изучаются без обычного перехода в комплексную плоскость, но при помощи вспомогательного искусственного объекта – расширенной матрицы рассеяния S^{ε} (см. публикации [2, 15, 16] и др.). Простая формула (21), связывающая S^{ε} с классической матрицей рассеяния s^{ε} , позволяет описать все свойства последней матрицы после построения асимптотики первой при $\varepsilon \to +0$. В частности, обнаружен новый эффект "обострения" аномалии Вуда, для которого опять-таки требуется некоторая настройка параметров профилей возмущения стенок (1). Наконец, сохранение порогового резонанса или образование околопорогового собственного числа ин-

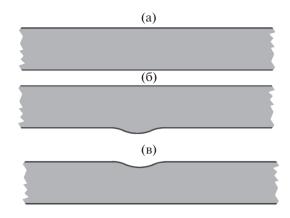


Рис. 1. Прямой волновод (а) и возмущенные волноводы с наростом (б) и каверной (в).

терпретируется как "сглаживание" аномалии Вуда: быстрое изменение матрицы s^{ϵ} при $\lambda^{\epsilon} \to \lambda^0 - 0$ не наблюдается.

МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

В задаче (2), (3) с околопороговым, по-прежнему возмущенным согласно формуле (5) параметром возникают распространяющиеся волны

$$v_{p\pm}^{\varepsilon}(x,y) = a_{p}^{\varepsilon} e^{\pm i\alpha_{p}^{\varepsilon}x} \cos\left(\pi p \left(y - \frac{1}{2}\right)\right),$$

$$p = 0, \dots, k - 1$$
(6)

с ингредиентами

$$\alpha_{p}^{\varepsilon} = \sqrt{\lambda^{\varepsilon} - \pi^{2} p^{2}} = \pi \sqrt{k^{2} - p^{2}} + O(\varepsilon^{2}),$$

$$a_{0}^{\varepsilon} = (2\alpha_{0}^{\varepsilon})^{-1/2} = (2\pi)^{-1/2} k^{-1/2} + O(\varepsilon^{2}),$$

$$a_{q}^{\varepsilon} = (\alpha_{q}^{\varepsilon})^{-1/2} = \pi^{-1/2} (k^{2} - q^{2})^{-1/4} + O(\varepsilon^{2}),$$

$$q = 1, \dots, k - 1.$$
(7)

Принцип излучения Зоммерфельда (см., например, книгу [14]) связывает направление "от $\tau \sim \kappa \pm \infty$ " распространения волн (6) с их волновыми числами $\pm \alpha_p^{\epsilon}$. Как известно, вне зависимости от того, является или нет λ^{ϵ} собственным числом, приходящие волны в рукавах $\Pi^{\pm} = \{(x,y) \in \Pi : \pm x > \ell\}$ порождают следующие решения дифракционной задачи в волноводе Π^{ϵ} :

$$\zeta_{p\pm}^{\varepsilon}(x,y) = \chi_{\pm}(x)v_{p\mp}^{\varepsilon}(x,y) +$$

$$+ \sum_{\gamma=\pm} \sum_{q=0}^{k-1} \chi_{\gamma}(x)s_{q\gamma p\pm}^{\varepsilon}v_{q\gamma}^{\varepsilon}(x,y) + \tilde{\zeta}_{p\pm}^{\varepsilon}(x,y).$$
(8)

При этом χ_{\pm} — гладкие срезающие функции, предназначенные для локализации волн в Π^{\pm} ,

$$\chi_{\pm}(x) = 1$$
 при $\pm x \ge 2\ell$ и $\chi_{+}(x) = 0$ при $\pm x \le \ell$,

а $\tilde{\zeta}_{p\pm}^{\epsilon}(x,y)$ — остаток, затухающий на бесконечности со скоростью $O(e^{-\alpha_k^{\epsilon}|x|})$. Показатель $\alpha_k^{\epsilon}>0$ определен похожей на (7) формулой, но отличающейся от нее. так как $\lambda^{\epsilon}<\pi^2k^2$:

$$\alpha_k^{\varepsilon} = \left| \lambda^{\varepsilon} - \pi^2 k^2 \right|^{1/2} = \sqrt{\pi^2 k^2 - \lambda^{\varepsilon}} = \varepsilon \tau + O(\varepsilon^2).$$
 (9)

Здесь и далее число $\tau > 0$ берется из представления (5) спектрального параметра. Наконец, коэффициенты $s_{q\gamma p\pm}^{\varepsilon}$ отражения при $\gamma = \pm$ и прохождения при $\gamma = \mp$ образуют матрицу рассеяния s^{ε} размером $2k \times 2k$. Эта матрица оказывается унитарной и симметричной благодаря нормирующим множителям (7) и связи $v_{p-}^{\varepsilon}(x,y) = \overline{v_{p+}^{\varepsilon}(x,y)}$ осциллирующих волн (6) (необходимые вычисления можно найти, например, в статье [2]).

Далее также понадобятся волны¹

$$w_{k\pm}^{\varepsilon}(x,y) = a_k^{\varepsilon} e^{\pm \alpha_k^{\varepsilon} x} \cos\left(\pi k \left(y - \frac{1}{2}\right)\right). \tag{10}$$

Они экспоненциально растут при $x \to \pm \infty$ и затухают при $x \to \mp \infty$, но далее называются просто экспоненциальными. Ввиду малой скорости затухания/роста новые (ср. формулы (7) и (9)) нормирующие множители неограниченно возрастают в случае $\epsilon \to +0$:

$$a_k^{\varepsilon} = (\alpha_k^{\varepsilon})^{-1/2} = \varepsilon^{-1/2} (\tau^{-1/2} + \varepsilon a_k'(\tau) + O(\varepsilon^2)).$$
 (11)

Следуя работам [2, 15, 16] и др., введем линейные комбинации экспоненциальных волн (10)

$$v_{k\pm}^{\varepsilon}(x,y) = 2^{-1/2} \left(w_{k+}^{\varepsilon}(x,y) \mp i w_{k-}^{\varepsilon}(x,y) \right)$$
 (12)

и классифицируем волны (6) и (12) при помощи принципа излучения Умова—Мандельштама [17, 18] (см., например, книги [19, гл. 1] и [20, гл. 5]), опирающегося на следующую симплектическую форму переноса энергии, пропорциональную проекции осредненного вектора Умова на ось х:

$$Q(u,v) = \int_{-1/2}^{1/2} (\overline{v(R,y)} \frac{\partial u}{\partial x}(R,y) - u(R,y) \frac{\overline{\partial v}}{\partial x}(R,y)) dy. (13)$$

Поскольку интеграл (13) возникает в формуле Грина для оператора Гельмгольца, форма Q(u, v) не зависит от параметра R для всех рассматриваемых волн и их линейных комбинаций. Непосредственными вычислениями проверяем, что благодаря введенным множителям (7) и (10) волны (6) и (12) удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки

$$Q(v_{n+}^{\varepsilon}, v_{n\gamma}^{\varepsilon}) = \pm \delta_{n,n} \delta_{+,\gamma}, \quad p, q = 0, \dots, k, \ \gamma = \pm. \tag{14}$$

В случае p,q=0,...,k-1 эти условия сохраняются при предельном переходе $\varepsilon \to +0$, т.е. на пороге $\lambda_k = \pi^2 k^2$, однако для волн (12) такой переход невозможен из-за роста коэффициента (11). Энергетический принцип связывает направление "от $\tau \to \kappa \pm \infty$ " распространения волны со знаком $\tau \to \infty$ в травой части (14). Конечно же, оба упомянутых принципа излучения предоставляют одинаковую классификацию распространяющихся волн (6), однако искусственные, т.е. экспоненциально растущие волны (12), а также постоянная, в частности, стабилизирующаяся на бесконечности, и линейная по переменной τ волны

$$w_k^0(x, y) = w_k^0(y) = \cos\left(\pi k \left(y + \frac{1}{2}\right)\right),$$

$$w_k^1(x, y) = x \cos\left(\pi k \left(y + \frac{1}{2}\right)\right),$$
(15)

возникающие на пороге λ_k , обслуживаются только принципом Умова—Мандельштама.

Известно (см., например, работы [2, 15] и монографию [20, гл. 5]), что соотношения (14) обеспечивают существование специальных решений дифракционной задачи (2), (3), инициированных приходящими волнами,

$$Z_{p\pm}^{\varepsilon}(x,y) = \chi_{\pm}(x)v_{p\mp}^{\varepsilon}(x,y) + \sum_{\gamma=\pm} \sum_{q=0}^{k-1} \chi_{\gamma}(x)S_{q\gamma p\pm}^{\varepsilon} \times v_{q\gamma}^{\varepsilon}(x,y) + \chi_{+}(x)S_{\dagger p\pm}^{\varepsilon}v_{k+}^{\varepsilon}(x,y) + v_{+}^{\varepsilon}(x)T_{\dagger p\pm}^{\varepsilon}w_{k+}^{\varepsilon}(x,y) + \tilde{Z}_{p\pm}^{\varepsilon}(x,y),$$

$$(16)$$

при p = 0, ..., k - 1 и

$$Z_{\dagger}^{\varepsilon}(x,y) = \chi_{+}(x)v_{k-}^{\varepsilon}(x,y) +$$

$$+ \sum_{\gamma=\pm} \sum_{q=0}^{k-1} \chi_{\gamma}(x) S_{q\gamma\dagger}^{\varepsilon} v_{q\gamma}^{\varepsilon}(x,y) + \chi_{+}(x) S_{\dagger\dagger}^{\varepsilon} v_{k+}^{\varepsilon}(x,y) +$$

$$+ \chi_{-}(x) T_{\dagger\dagger}^{\varepsilon} w_{k+}^{\varepsilon}(x,y) + \tilde{Z}_{\dagger}^{\varepsilon}(x,y).$$

$$(17)$$

Остатки $\tilde{Z}^{\varepsilon}_{...}(x,y)$ затухают на бесконечности со скоростью $O(e^{-\alpha_{k+1}^{\varepsilon}|x|})$, где в отличие от (9) показатель

$$\alpha_{k+1}^{\varepsilon} \sqrt{\pi^2 (k+1)^2 - \lambda^{\varepsilon}} \ge \pi \sqrt{2k+1}$$
 (18)

равномерно отделен от нуля.

¹ При соблюдении условий ортогональности и нормировки (14) волны обозначаются литерой v, но в остальных случаях — литерой w. Поскольку $\lambda^{\varepsilon} < \pi^2 k^2$, но $\lambda^{\varepsilon} > \pi^2 p^2$, формулы в случаях p = k и p = 0, ..., k - 1 записываются по-разному.

Из-за экспоненциального роста линейных комбинаций (12) решения (17) и (18) и входящие в них коэффициенты лишены физического смысла. Вместе с тем проверка существования таких решений и свойств унитарности и симметричности расширенной матрицы рассеяния

$$S^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} S_{\cdot \cdot}^{\varepsilon} & S_{\cdot \uparrow}^{\varepsilon} \\ S_{+ \cdot \cdot}^{\varepsilon} & S_{+ + \cdot}^{\varepsilon} \end{pmatrix}$$
 (19)

размером $(2k+1)\times(2k+1)$ осуществляется почти дословным повторением обычных рассуждений и вычислений применительно к решениям (8) и классической матрице рассеяния (см., например, книгу [20, гл. 5] и статью [2]), так как и распространяющиеся волны (6), и линейные комбинации (12) переносят энергию, а быстро затухающие остатки — нет. Введение матрицы S^{ε} обусловлено тем, что, как будет видно далее, в отличие от матрицы s^{ε} ей не свойственна быстрая изменяемость на отдельных участках окрестности порога, причем, как и в статье [16], нужное свойство достигается при введении линейных комбинаций (12) только в одном рукаве — выбрали Π^+ . Коэффициенты $T^{\varepsilon}_{\dagger\,p\pm}$ и $T^{\varepsilon}_{\dagger\dagger}$ при затухающей в $\Pi^$ волне w_{k+}^{ε} не включены в матрицу S^{ε} , которая в сравнении с s^{ε} приобрела дополнительные строку и столбец. В результате нижний правый элемент матрицы (19) — скаляр $S^{\varepsilon}_{\dagger\dagger}$, и в силу симметрии матрицы (19) столбец $S_{\bullet \uparrow}^{\varepsilon}$ — транспонированная строка

$$S_{\pm}^{\varepsilon} = (S_{\pm 0+}^{\varepsilon}, S_{\pm 0-}^{\varepsilon}, \dots, S_{\pm k-1+}^{\varepsilon}, S_{\pm k-1-}^{\varepsilon}). \tag{20}$$

Решения (16) с экспоненциальным ростом при $x \to +\infty$ отличаются от ограниченных решений (8), т.е. $(2k \times 2k)$ -блок $S^{\varepsilon}_{..}$ матрицы (19), вообще говоря, не совпадает с матрицей рассеяния s^{ε} . В работе [2] при помощи несложных алгебраических операций с решениями $Z^{\varepsilon}_{p\pm}$, p=0,...,k-1, и $Z^{\varepsilon}_{\uparrow}$ по устранению экспоненциального роста проверена ключевая для дальнейших выводов формула

$$s^{\varepsilon} = S_{\cdot \cdot}^{\varepsilon} - S_{\cdot \cdot}^{\varepsilon} (1 + S_{\cdot \cdot}^{\varepsilon})^{-1} S_{\cdot \cdot}^{\varepsilon}. \tag{21}$$

Она сохраняет силу и в случае

$$S_{++}^{\varepsilon} = -1, \tag{22}$$

так как строка (20) и столбец $S^{\varepsilon}_{,\uparrow}$ одновременно обращаются в нуль благодаря унитарности расширенной матрицы рассеяния, а именно,

$$\left|S_{\cdot\uparrow}^{\varepsilon}\right|^{2} + \left|S_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}\right|^{2} = 1, \quad \left|S_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|S_{\cdot\uparrow}^{\varepsilon}\right| = 0.$$
 (23)

Равенство (22) служит достаточным условием [15] (критерием для частной задачи (2), (3), но это обстоятельство не важно для дальнейшего), захваченной волны, которая согласно определению (12) и соотношению $S_{*+}^{\varepsilon} = 0$ принимает вид

$$Z_{\uparrow}^{\varepsilon}(x,y) = \sqrt{2}i\chi_{+}(x)w_{k-}^{\varepsilon}(x,y) + + \chi_{-}(x)T_{+\uparrow}^{\varepsilon}w_{k+}^{\varepsilon}(x,y) + \tilde{Z}_{+}^{\varepsilon}(x,y)$$
(24)

и содержит только экспоненциально затухающие при $x \to \pm \infty$ составляющие. Наконец, в случае (22) выводим из формул (21) и (23) равенство

$$s^{\varepsilon} = S_{\cdot \cdot \cdot}^{\varepsilon}. \tag{25}$$

АСИМПТОТИКА РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Формулы (7) и (11), различающиеся для нормирующих множителей $a_p^{\varepsilon} = O(1)$ при p = 0, ..., k-1 и $a_p^{\varepsilon} = O(\varepsilon^{-1/2})$ при p = k, предлагают следующие асимптотические анзацы для коэффициентов разложения решения (17) задачи (2), (3):

$$S^{\varepsilon}_{++} = S^{0}_{++} + \varepsilon S'_{++} + \tilde{S}^{\varepsilon}_{++}, \quad T^{\varepsilon}_{++} = T^{0}_{++} + \varepsilon T'_{++} + \tilde{T}^{\varepsilon}_{++}, \quad (26)$$

$$S^{\varepsilon}_{\cdot,\dagger} = \varepsilon^{1/2} \left(S^{0}_{\cdot,\dagger} + \varepsilon S^{\prime}_{\cdot,\dagger} + \tilde{S}^{\varepsilon}_{\cdot,\dagger} \right). \tag{27}$$

Само решение ищем в виде

$$Z_{+}^{\varepsilon}(x,y) = \varepsilon^{-1/2} Z_{+}^{0}(x,y) + \varepsilon^{1/2} Z_{+}^{\prime}(x,y) + \dots$$
 (28)

Здесь и далее многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого анализа. Поскольку $\lambda^{\varepsilon} = \lambda^0 + O(\varepsilon^2)$ в силу соотношения (5), функции Z_{\dagger}^0 и Z_{\dagger}^\prime удовлетворяют уравнению Гельмгольца в прямой полосе Π^0 с пороговым спектральным параметром $\lambda^0 = \pi^2 k^2$, причем для Z_{\dagger}^0 выполнены однородные условия Неймана на сторонах полосы. Снесем краевые условия (3) с искривленных стенок (1) на прямые $\Gamma_{\pm}^0 = \{(x,y): x \in \mathbb{R}, \ y=1/2\}$ при помощи формулы Тейлора относительно параметра ε и равенств (4) для нормальных производных. Имеем

$$\begin{split} \varepsilon^{1/2} (1 + \varepsilon^2 |\partial_x H_{\pm}(x)|^2)^{1/2} Z_{\dagger}^{\varepsilon} \left(x, \pm \frac{1}{2} \pm \varepsilon H_{\pm}(x) \right) &= \\ &= \pm \partial_y Z_{\dagger}^0 \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) + \varepsilon \left(\pm \partial_y Z_{\dagger}^{\prime} \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) - \\ &- (\partial_x H_{\pm}(x)) \partial_x Z_{\dagger}^0 \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) + H_{\pm}(x) \partial_y^2 Z_{\dagger}^0 \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) \right) + \dots. \end{split}$$

Таким образом, преобразуем последнее слагаемое при учете упоминавшегося уравнения для Z^0_{\dagger}

АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ том 64 № 5 2018

и сформируем следующую задачу для поправочного слагаемого в анзаце (28):

$$-\Delta Z'_{\dagger}(x,y) = \pi^2 k^2 Z'_{\dagger}(x,y), \quad (x,y) \in \Pi^0,$$
 (29)

$$\pm \partial_{y} Z_{\dagger}^{\prime} \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) = \partial_{x} \left(H_{\pm}(x) \partial_{x} Z_{\dagger}^{0} \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) \right) +$$

$$+ \pi^{2} k^{2} H_{\pm}(x) Z_{\dagger}^{0} \left(x, \pm \frac{1}{2} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$(30)$$

Применим метод сращиваемых асимптотических разложений [21, 22] в исполнении [2, 23], интерпретируя разложение (28) как внутреннее, пригодное в окрестности искривленных участков стенок $\Gamma_{\pm}^{\varepsilon}$. Внешние разложения, описывающие поведение решений при $x \to \pm \infty$, получаются подстановкой в представление (17) поля $Z_{\dagger}^{\varepsilon}$, формул (26), (27) для коэффициентов и (6), (7), (9)—(11) для волн, в частности, получается соотношение

$$w_{k\pm}^{\varepsilon}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\tau}} (1 + \varepsilon(\pm \tau x + a_k'(\tau)) + O\left(\varepsilon^2 (1 + |x|^2))\cos(\pi k \left(y + \frac{1}{2}\right)\right),$$

а также проистекающие от него выражения для линейных комбинаций (12). Выделив слагаемые порядков $\varepsilon^{-1/2}$ и $\varepsilon^{1/2}$, получаем

$$Z_{\uparrow}^{\varepsilon}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\tau}} (1+i+S_{\uparrow\uparrow}^{0}(1-i)) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\tau}} (1+i+S_{\uparrow\uparrow}^{0}(1-i)) + \frac{1}{\sqrt{2\tau}} S_{\uparrow\uparrow}^{0}(1-i) + \varepsilon(a_{k}'(\tau)(1+i+1)) + \varepsilon(a_{k}'(\tau)(1+i+1) + S_{\uparrow\uparrow}^{0}(1-i)) + \frac{1}{\sqrt{2\tau}} S_{\uparrow\uparrow}^{0}(1-i) \right) \cos\left(\pi k \left(y - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} S_{q+\uparrow}^{0} v_{q+}^{0}(x,y) + \dots, \quad x \to +\infty, \right)$$

$$Z_{\uparrow}^{\varepsilon}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} T_{\uparrow\uparrow}^{0} + \varepsilon \sqrt{\tau} x T_{\uparrow\uparrow}^{0} + \varepsilon \left(a_{k}'(\tau) T_{\uparrow\uparrow}^{0} + \frac{1}{\sqrt{\tau}} T_{\uparrow\uparrow}' \right) \right) \cos\left(\pi k \left(y - \frac{1}{2}\right) \right) + \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} S_{q-\uparrow}^{0} v_{q-}^{0}(x,y) + \dots, \quad x \to -\infty. \right)$$

$$(32)$$

Поскольку множителями при $\varepsilon^{-1/2}$ в формулах (31) и (32) служат выражения $C_{\pm}^0 \cos(\pi k(y-1/2))$, видим, что первые члены анзацев (28) и (26) подчинены соотношениям

$$Z_{\dagger}^{0}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} (1+i+S_{\dagger\dagger}^{0}(1-i)) \cos\left(\pi k \left(y-\frac{1}{2}\right)\right), (33)$$

$$1 + i + S_{\dagger\dagger}^0(1 - i) = \sqrt{2}T_{\dagger\dagger}^0. \tag{34}$$

Функция (33) не зависит от переменной x, а значит, первые слагаемые в правых частях краевых условий (30) обращаются в нуль.

Теперь извлечем из разложений (31) и (32) члены порядка $\varepsilon^{1/2}$ и припишем решению задачи (29) следующее поведение на бесконечности:

$$Z'_{\dagger}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\tau} x (1 - i + S^{0}_{\dagger \dagger} (1 + i)) + C'_{+}) \times \times \cos \left(\pi k \left(y - \frac{1}{2} \right) \right) + \sum_{q=0}^{k-1} S^{0}_{q+\dagger} v^{0}_{q+}(x,y) + ..., x \to +\infty, \quad Z'_{\dagger}(x,y) = (\sqrt{\tau} x T^{0}_{\dagger \dagger} + + C'_{-}) \cos \left(\pi k \left(y - \frac{1}{2} \right) \right) + \sum_{q=0}^{k-1} S^{0}_{q-\dagger} v^{0}_{q-}(x,y) + ..., x \to -\infty.$$
 (35)

При этом выделены используемые далее слагае-

мые, а остальные обозначены C'_{\pm} . Поскольку в условиях (35) допущен линейный рост, сформулированная задача имеет решение, однако не единственное, а произвол в его выборе — линейная комбинация функций (15) — не позволяет вы-

числить полностью коэффициенты $S_{\dagger\dagger}^0$, $T_{\dagger\dagger}^0$ и C_{\pm}^1 . Для обнаружения связей между указанными коэффициентами применим формулу Грина в длинном прямоугольнике $(-R,R)\times(-1/2,1/2)$ и выполним предельный переход $R\to+\infty$. Для па-

ры функций Z_{\dagger}' и w_k^0 получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\tau}}(1+i+S^{0}_{\uparrow\uparrow}(1-i))J_{k}(H) =
= \sum_{\pm} \pm \int_{-\ell}^{\ell} w_{k}^{0} \left(\pm \frac{1}{2}\right) \partial_{y} Z_{\uparrow}^{\prime} \left(x, \pm \frac{1}{2}\right) dx =
= \lim_{R \to +\infty} \sum_{\pm} \mp \int_{-1/2}^{1/2} w_{k}^{0}(y) \partial_{x} Z_{\uparrow}^{\prime}(\pm R, y) dy =
= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau}{2}} (1-i+S^{0}_{\uparrow\uparrow}(1+i)) + \frac{\sqrt{\tau}}{2} T^{0}_{\uparrow\uparrow}.$$
(36)

Величина $J_k(H)$ определена при учете равенства (33) и краевых условий (30), а именно,

$$J_k(H) = \pi^2 k^2 \int_{-\ell}^{\ell} (H_+(x) + H_-(x)) dx.$$
 (37)

При подстановке в формулу Грина пары функций Z_{\dagger}^{\prime} и w_{k}^{1} удается найти соотношение между коэффициентами C_{+}^{\prime} и C_{-}^{\prime} , которое далее не понадобится.

Аналогичные действия с функциями $v_{p\pm}^0$ и w_k^0 приводят к равенствам

$$\alpha_p^0 (2\tau)^{-1/2} (1 + i + S_{\dagger\dagger}^0 (1 - i)) J_{pk}^{\pm}(H) = \pm i S_{p\pm\dagger}^0, \quad (38)$$
The

$$J_{pk}^{\pm}(H) = \pi^2 k^2 \int_{-\ell}^{\ell} e^{\pm i\alpha_p^0 x} (H_+(x) + (-1)^{p+k} H_-(x)) dx.$$
 (39)

Теперь коэффициент $S_{\dagger\dagger}^0$ находим из системы уравнений (34) и (36):

$$S_{\dagger\dagger}^{0} = \frac{\tau - i(\tau - 2J_{k}(H))}{\tau - 2J_{k}(H) - i\tau}.$$
 (40)

Ясно, что $\left|S_{\dagger\dagger}^{0}\right|=1$ и

$$\tau = J_k(H) \Rightarrow S_{\dagger\dagger}^0 = -1. \tag{41}$$

Кроме того, в силу формул (38) и (40) имеем

$$S_{p\pm\uparrow}^{0} = \pm (1+i) \frac{2\sqrt{2\tau}\alpha_{p}^{0}}{\tau - 2J_{k}(H) - i\tau} J_{pk}^{\pm}(H). \tag{42}$$

Начальные члены анзацев (26) и (27) вычислены. Обоснование асимптотик элементов расширенной матрицы рассеяния проводится по стандартной схеме (см. работы [2, 16] и др.) при помощи техники весовых пространств с отделенной асимптотикой (см. книгу [20, гл. 5] и обзор [24]). Воспроизводить эту громоздкую процедуру в данной работе не будем. Укажем лишь используемую далее оценку

$$\left|\tilde{S}_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}\right| + \left|\tilde{T}_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}\right| + \left|\tilde{S}_{\bullet\uparrow}^{\varepsilon}\right| \le c\varepsilon^{2} \tag{43}$$

асимптотических остатков в представлениях (26) и (27). Такая же оценка верна и для остатка в разложении $(2k \times 2k)$ -блока матрицы (19), а именно,

$$S_{\cdot \cdot \cdot}^{\varepsilon} = S_{\cdot \cdot \cdot}^{0} + \varepsilon S_{\cdot \cdot \cdot}^{1} + \widetilde{S}_{\cdot \cdot \cdot}^{\varepsilon}, \quad S_{\cdot \cdot \cdot}^{0} = \operatorname{diag}\{\mathbb{J}, \dots, \mathbb{J}\},$$

$$\mathbb{J} = \operatorname{anti} \operatorname{diag}\{\mathbb{I}, \mathbb{I}\} := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}.$$
(44)

Появление в блочно-диагональной матрице S^0_{μ} инволюции \mathbb{J} обусловлено тем, что волна $v^0_{\rho\pm}$, приходящая из рукава Π^{\mp} , полностью удовлетворяет задаче Неймана для оператора Гельмгольца $\Delta + \pi^2 k^2$ в прямой полосе Π^0 и оказывается уходящей в рукаве Π^{\pm} . Упомянутая задача в прямой полосе Π^0 получается в результате изложенного выше асимптотического анализа. Поправочный член S^1_{μ} востребован далее не будет.

В принципе можно построить полные асимптотические ряды по степеням малого параметра є для коэффициентов в разложениях специальных

решений (17) и (16) задачи (2), (3) в волноводе с возмущенными стенками (1) (ср. монографию [25, §6.5, гл. 1]). Вместе с тем формулы становятся излишне громоздкими и потому малополезными, однако в очередных разделах все-таки будем привлекать выделенные в (26) и (27) асимптотические члены.

ПЕРВИЧНАЯ АНОМАЛИЯ ВУДА

По правилу (20) составим столбец $S_{\cdot \uparrow}^0 = S_{\cdot \uparrow}^0(\tau)$ и предположим, что фигурирующие в весовых интегралах (39) профили H_{\pm} стенок (1) не обращают все интегралы в нуль, т.е. согласно формуле (42) выполнено соотношение

$$S^0_{,\dagger}(\tau) \neq 0 \in \mathbb{C}^{2k}$$
 при $\tau = \tau_k := J_k(H)$. (45)

В этом разделе рассмотрим два случая,

$$J_k(H) > 0 \tag{46}$$

И

$$J_k(H) < 0, (47)$$

а случай

$$J_{\nu}(H) = 0 \tag{48}$$

разберем далее. Согласно определению (37) неравенство (46) реализуется, например, при увеличении объема волновода (рис. 16), а неравенство (47) — при уменьшении (рис. 1в).

При условии (47) и любом положительном τ (см. представление (5) спектрального параметра) коэффициент $S_{\dagger\dagger}^0(\tau)$, определенный формулой (40), отличен от -1, а значит, асимптотики (26) и (27) превращают соотношение (21) в такое:

$$s^{\varepsilon}(\tau) = S_{\cdot \cdot \cdot}^{0} + \varepsilon S_{\cdot \cdot \cdot}^{\prime}(\tau) - \varepsilon \frac{S_{\cdot \cdot \uparrow}^{0}(\tau) S_{\uparrow \cdot \cdot}^{0}(\tau)}{1 + S_{\cdot \cdot \uparrow}^{0}(\tau)} + O(\varepsilon^{2}).$$
 (49)

При этом матрица $s^{\epsilon}(\tau)$ гладко зависит от переменных τ и ϵ . Иными словами, аномалия Вуда не наблюдается.

В случае (46) асимптотика (49) разрушается по причине (41), (45): знаменатель дроби из правой части (49) обращается в нуль при $\tau_k = J_k(H)$, а $(2k \times 2k)$ -матрица из числителя той же дроби ненулевая в согласии с требованием (45). Для исправления ситуации введем "быструю" переменную

$$t = \varepsilon^{-1}(\tau - J_k(H)) \tag{50}$$

и заметим, что благодаря унитарности матрицы (19) верны соотношения

$$1 = \left| S_{\cdot \uparrow}^{\varepsilon}(\tau_{k}) \right|^{2} + \left| S_{\uparrow \uparrow}^{\varepsilon}(\tau_{k}) \right|^{2} =$$

$$= \varepsilon \left| S_{\cdot \uparrow}^{0}(\tau_{k}) \right|^{2} + O(\varepsilon^{2}) + 1 - 2\varepsilon \operatorname{Re} S_{\uparrow \uparrow}'(\tau_{k}) +$$

$$+ O(\varepsilon^{2}) \Rightarrow 2\operatorname{Re} S_{\uparrow \uparrow}'(\tau_{k}) = \left| S_{\cdot \uparrow}^{0}(\tau_{k}) \right|^{2} > 0.$$
(51)

В результате получаем, что

$$S_{\cdot \uparrow}^{\varepsilon}(\tau) = S_{\cdot \uparrow}^{\varepsilon}(\tau_{k}) + O(\varepsilon t), \quad S_{\cdot \uparrow}^{\varepsilon}(\tau_{k}) = \pm \sqrt{\tau_{k}} J_{pk}^{\pm}(H),$$
$$S_{\cdot + \iota}^{0}(\tau) = -1 + 2\varepsilon \tau_{k}^{-1} it + O(\varepsilon^{2} t^{2}),$$

и переписываем асимптотическое представление матрицы рассеяния следующим образом:

$$s^{\varepsilon}(\tau) = S_{\bullet\bullet}^{0} - \frac{S_{\bullet\uparrow}^{0}(\tau_{k})S_{\uparrow\bullet}^{0}(\tau_{k})}{2\tau_{k}^{-1}it + S_{\uparrow\uparrow}^{\prime}(\tau_{k})} + O(\varepsilon t).$$
 (52)

Подчеркнем, что благодаря требованиям (45) и (51) знаменатель дроби из (52) не обращается в нуль, и на любом заданном наперед промежутке $(-t_*, t_*)$ э t представление (52) сохраняет силу при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

В отличие от соотношения (49), справедливого при условии (47), в случае (46) главный член асимптотики (52) характеризуется быстрой изменяемостью в масштабе (50) вблизи точки

$$\lambda^0 - \varepsilon^2 \tau_k^2$$
, где $\lambda^0 = \lambda_k = \pi^2 k^2$, $\tau_k = J_k(H) > 0$. (53)

Иными словами, приращение спектрального параметра (53) на величину $O(\epsilon^3)$ приводит к кардинальной перестройке матрицы рассеяния согласно формуле (52). Именно в этом и состоит одно из проявлений аномалии Вуда.

УСТРАНЕНИЕ АНОМАЛИИ ПУТЕМ ОБРАЗОВАНИЯ СОБСТВЕННОГО ЧИСЛА

Для формирования собственного числа на интервале $(\pi^2(k-1)^2, \pi^2k^2)$ в непрерывном спектре задачи (2), (3) удобно, следуя работам [2, 16], переформулировать критерий (22) следующим образом:

$$\operatorname{Im} S_{\dagger\dagger}^{\varepsilon} = 0, \operatorname{Re}(e^{i\psi}S_{\bullet\dagger}^{\varepsilon}) = 0 \in \mathbb{R}^{2k}.$$
 (54)

Здесь фаза ψ должна быть зафиксирована так, чтобы величина $e^{2i\psi}$ не оказалась собственным числом матрицы S^0_{\bullet} , в силу соотношений (44) можно взять $\psi = \pi/4$. Воспроизведем простые вычисления из упомянутых работ [2, 16], проверяющие при учете асимптотических формул (26), (27) и (44) эквивалентность условий (22) и (54) в случае малых ε и $\tau - \tau_k$. Благодаря унитарности

матрицы $S^{\varepsilon}(\tau)$ ее столбцы ортогональны один другому, а значит, при учете симметрии блока $S^{\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot}(\tau)$ и обратимости матрицы $\mathbb{J} - e^{2i\psi}\mathbb{I}_{2k}$ имеем

$$\mathbb{C}^{2k} \ni 0 = e^{i\psi} S_{\cdot\cdot\cdot}^{\varepsilon}(\tau)^* S_{\cdot\uparrow}^{\varepsilon}(\tau) + e^{i\psi} S_{\uparrow\cdot\cdot}^{\varepsilon}(\tau)^* S_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}(\tau) =
= S_{\cdot\cdot\cdot}^{\varepsilon}(\tau)^* e^{i\psi} S_{\cdot\uparrow}^{\varepsilon}(\tau) + e^{2i\psi} (e^{i\psi} S_{\uparrow\cdot\cdot}^{\varepsilon}(\tau))^{\top} S_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}(\tau) =
= \left(\overline{S_{\cdot\cdot\cdot}^{\varepsilon}(\tau)} + e^{2i\psi} \mathbb{I}_{2k} S_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}(\tau)\right) e^{i\psi} S_{\cdot\uparrow}^{\varepsilon}(\tau) =
= \left(S_{\cdot\cdot\cdot}^{0} - e^{2i\psi} \mathbb{I}_{2k} + O(\varepsilon + |\tau - \tau_{k}|)\right) e^{i\psi} S_{\cdot\uparrow}^{\varepsilon}(\tau) \Rightarrow
\Rightarrow S_{\cdot\uparrow}^{\varepsilon}(\tau) = 0 \in \mathbb{C}^{2k} \Rightarrow \left|S_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}(\tau)\right| = 1 \Rightarrow
\Rightarrow S_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}(\tau) = -1 \text{ при малых } \varepsilon \text{ и } \tau - \tau_{k}.$$

Здесь * и \top — знаки сопряжения и транспонирования матриц. Кроме того, в преобразованиях (55) применены соотношения (44) для $S_{\cdot,\uparrow}^{\varepsilon}(\tau)$ и (54) для $S_{\cdot,\uparrow}^{\varepsilon}(\tau) = S_{\uparrow,\cdot}^{\varepsilon}(\tau)^{\top}$, а также (26), (40), (41) для $S_{\uparrow,\uparrow}^{\varepsilon}(\tau) = -1 + O(\varepsilon + |\tau - \tau_k|)$. Наконец, обратная импликация (22) \Leftarrow (54) очевидна в силу формулы (23).

Изменим определение профильных функций H_{\pm} для стенок (1), а именно, разрешим им зависеть от набора новых параметров $\beta_p^{(\pm)}$ и компонент $H_{\pm}^{(p+)}$, $H_{\pm}^{(p-)}$, ограничения на которые будут наложены далее:

$$H_{\pm}^{\beta}(x) = H_{\pm}^{0}(x) + \beta_{0}^{(+)}H_{\pm}^{(0+)}(x) + \beta_{0}^{(-)}H_{\pm}^{(0-)}(x) + \dots + \beta_{k-1}^{(+)}H_{\pm}^{(k-1+)}(x) + \beta_{k-1}^{(-)}H_{\pm}^{(k-1-)}(x).$$
(56)

Аналогично формуле (5) представим возмущенный спектральный параметр в виде

$$\lambda^{\varepsilon} = \lambda^{0} - \varepsilon^{2} \tau(\beta)^{2} = \lambda^{0} - \varepsilon^{2} (\tau_{k} + \beta_{\dagger})^{2}, \tag{57}$$

где поправка

$$\tau(\beta) = \tau_k + \beta_{\dagger} \tag{58}$$

содержит новую неизвестную β_{\dagger} . Образуем вектор

$$\beta = (\beta_{+}, \beta_{0}^{(+)}, \beta_{0}^{(-)}, \dots, \beta_{k-1}^{(+)}, \beta_{k-1}^{(-)}) \in \mathbb{R}^{1+2k}.$$
 (59)

Наконец, предположим, что слагаемые из правой части (56) подчинены соотнесенным с критерием (54) условиям ортогональности и нормировки

$$J_{k}(H^{(q\theta)}) = 0, \quad \text{Re}(e^{i\psi}J_{pk}^{\gamma}(H^{(q\theta)})) = \delta_{p,q}\delta_{\gamma,\theta},$$

$$J_{k}(H^{0}) = 0, \quad \text{Re}(e^{i\psi}J_{pk}^{\gamma}(H^{0})) = 0,$$

$$p,q = 0, \dots, k-1, \quad \gamma, \theta = \pm.$$
(60)

При учете требований (60) запишем первую асимптотическую формулу (26) с главным членом (40) следующим образом:

$$S_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}(\tau^{\beta}) = \frac{\tau^{\beta} - i(\tau^{\beta} - 2\tau_{k})}{\tau^{\beta} - 2\tau_{k} - i\tau^{\beta}} + \hat{S}_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}(\tau^{\beta}) =$$

$$= -\frac{(\tau_{k} - i\beta_{\uparrow})^{2}}{\tau_{k}^{2} + \beta_{\uparrow}^{2}} + \hat{S}_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}(\tau^{\beta}).$$
(61)

Остаток $\hat{S}^{\varepsilon}_{\dagger\dagger}$ допускает оценку

$$\left| \hat{S}_{\dagger\dagger}^{\varepsilon}(\tau^{\beta}) \right| \le c\varepsilon \quad \text{при} \quad \beta \in \mathbb{B}_{\rho},$$
 (62)

где $\mathbb{B}_{\rho} = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^{1+2k} : |\beta| \leq \rho \right\}$ — замкнутый шар радиусом $\rho > 0$, а множитель c может быть взят общим для всех $\epsilon \in (0,\epsilon_0]$ с некоторым $\epsilon_0 > 0$. Кроме того, поскольку "почти тождественный" диффеоморфизм, аналитически (рационально) зависящий от величин $\epsilon \in (0,\epsilon_0]$ и $\beta \in \mathbb{B}_{\rho}$, переводит искаженную полосу Π^{ϵ} в прямую полосу Π^{0} и придает малые возмущения дифференциальным операторам в задаче Неймана, остаток гладко (на самом деле вещественно аналитически; см., например, книгу [25, гл. 7]) зависит от указанных параметров. В итоге первое равенство в критерии (54) согласно представлению (61) принимает вид

$$\beta_{\dagger} = -\frac{\tau_k^2 + \beta_{\dagger}^2}{2\tau_k} \operatorname{Im} \hat{S}^{\varepsilon}_{\dagger\dagger}(\tau^{\beta})$$

и становится первой строкой системы нелинейных уравнений

$$\beta = \mathcal{R}^{\varepsilon}(\beta) \quad \mathbf{B} \quad \mathbb{B}_{\rho} \tag{63}$$

для определения вектора (59). Упомянутые свойства остатка $\hat{S}^{\varepsilon}_{\dagger\dagger}(\tau^{\beta})$ подсказывают, что $\mathcal{B}^{\varepsilon}$ — сжимающий (см. далее соотношения (66)) оператор на (2k+1)-мерном шаре \mathbb{B}_{ρ} с малым радиусом $\rho > 0$, т.е. по принципу Банаха сжимающих отображений уравнение (63) имеет единственное решение $\beta \in \mathbb{B}_{\rho}$.

Продолжим выполнение критерия (54). В соответствии с формулами (58) и (60) перепишем асимптотику столбца $S^{\varepsilon}_{+}(\tau)$ матрицы (19) следующим образом:

$$S_{p\pm\uparrow}^{\varepsilon}(\tau^{\beta}) = \mp \sqrt{\varepsilon} \frac{\sqrt{2(\tau_{k} + \beta_{\uparrow})}}{\tau_{k}^{2} + \beta_{\uparrow}^{2}} (\tau_{k} - i\beta_{\uparrow})\alpha_{p}^{0} J_{pk}^{\pm}(H^{\beta}) + \sqrt{\varepsilon} \hat{S}_{p+\uparrow}^{\varepsilon}(\tau^{\beta}).$$
(64)

При этом остаток $\hat{S}^{\varepsilon}_{p\pm\uparrow}(\tau^{\beta})$ (без множителя $\sqrt{\varepsilon}$) сохраняет свойства остатка в представлении (61), в частности оценку (62). В результате второе равен-

ство в критерии (54), записанное покомпонентно, принимает вид

$$\beta_{p}^{(\pm)} = -\frac{\beta_{\uparrow}}{\tau_{k}} \operatorname{Im}\left(e^{i\psi}J_{pk}^{\pm}(H^{\beta} - H^{0})\right) \pm \frac{\tau_{k}^{2} + \beta_{\uparrow}^{2}}{\sqrt{2(\tau_{k} + \beta_{\uparrow})}} \times \times \frac{1}{\tau_{k}\alpha_{p}^{0}} \operatorname{Re}\left(e^{i\psi}\hat{S}_{\bullet\uparrow}^{\epsilon}(\tau^{\beta})\right), \quad p = 0, \dots, k - 1.$$
(65)

Уравнения (65) в количестве 2k штук заканчивают формирование системы (63), а оценки (62) для остатков в представлениях (61) и (64) действительно показывают, что оператор $\mathfrak{B}^{\varepsilon}$ обладает всеми нужными свойствами:

$$\begin{split} & \left\| \mathscr{B}^{\varepsilon}(\beta^{j}); \, \mathbb{R}^{1+2k} \right\| \leq C_{k} \varepsilon, \\ & \left\| \mathscr{B}^{\varepsilon}(\beta^{1}) - \mathscr{B}^{\varepsilon}(\beta^{2}); \, \mathbb{R}^{1+2k} \right\| \leq c_{k} (\varepsilon + \\ & + \left\| \beta_{\dagger} \right\| \left\| \beta^{1} - \beta^{2}; \, \mathbb{R}^{1+2k} \right\| \, \text{при } \beta^{1}, \beta^{2} \in \mathbb{B}_{p}. \end{split}$$

Следовательно, можно уменьшить радиус шара до $\rho_0 \varepsilon$ и по-прежнему получить единственное решение (59) уравнения (63), подчиненное оценке

$$|\beta| \le \rho_0 \varepsilon.$$
 (67)

В итоге, как и в статьях [1—4], выполнен критерий (22) существования собственного числа (57) задачи (2), (3) в волноводе Π^{ϵ} с профилями (56) стенок (1). Соответствующая захваченная волна задана формулой (24) и экспоненциально затухает на бесконечности, т.е. описывает локализованные колебания акустической среды. При этом в силу неравенства (67) и формулы (58) собственное число (57) принимает вид (5), где точка $\tau = \tau_k$ задана соотношениями (53) и (37).

Благодаря совпадению (25) матриц $s^{\varepsilon}(\tau)$ и $S^{\varepsilon}_{..}(\tau)$ первая из них также гладко зависит от параметра τ при прохождении через точку (58). Следовательно, малое, размером ε , но тщательно подобранное дополнительное возмущение стенок позволяет устранить аномалию Вуда около порога $\lambda^0 = \lambda_k$. Подчеркнем, что функции $H^{(p\gamma)}$ с индексами $p=0,\ldots,k-1$ и $\gamma=\pm$ в определении (56) нужно подчинить только конечному семейству ограничений (60), т.е. эти функции могут быть зафиксированы многочисленными способами.

ОБОСТРЕНИЕ АНОМАЛИИ ВУДА

Образование собственного числа на непрерывном спектре σ_c требует точной настройки параметров $\beta_p^{(\pm)}$ в представлении (56) профилей возмущения стенок (1) посредством решения нелинейного уравнения (63). Если не осуществлять такую настройку, то аномалия Вуда сохраняется —

получим асимптотические формулы для матрицы рассеяния в случае профилей

$$H_{+}^{\varepsilon}(x) = H_{+}^{0}(x) + \varepsilon H_{+}'(x),$$
 (68)

которые в противоположность прежнему ограничению (45) удовлетворяют соотношениям

$$J_{pk}^{\pm}(H^0) = 0, p = 0, ..., k - 1, \Rightarrow S_{\bullet, \dagger}^0 = 0 \in \mathbb{R}^{2k}.$$
 (69)

В силу представления (68) компоненты поправочного столбца $S_{,\uparrow}^{+}$ в анзаце (27) содержат слагаемые $J_{pk}^{\pm}(H')$, а значит, подбором функций H_{\pm}' можно соблюсти требование

$$S'_{\bullet \uparrow} \neq 0 \in \mathbb{R}^{2k}. \tag{70}$$

Кроме того, замена $H_{\pm} \mapsto H_{\pm}^0 + \varepsilon H_{\pm}'$ в формуле (40) для главного члена разложения (26) и представление

$$\begin{split} \frac{\tau_k - i(\tau_k - 2J_k(H^0) - \varepsilon 2J_k(H^0))}{\tau_k - 2(J_k(H^0) + \varepsilon J_k(H^0)) - i\tau_k} &= \\ &= -\frac{1 + 2i\varepsilon\tau_k^{-1}(1 - i)J_k(H^0)}{1 + 2\varepsilon\tau_k^{-1}(1 - i)J_k(H^0)} &= \\ &= -1 + \frac{2\varepsilon i}{\tau_k}J_k(H^0) + O(\varepsilon^2) \end{split}$$

при $\tau_k = J_k(H^0) > 0$ показывают, что в выражение $S'_{\dagger\dagger}(\tau_k)$ попадает слагаемое $2i\tau_k^{-1}J_k(H'_{\pm})$. Таким образом, возможно зафиксировать профильные функции H'_{\pm} так, чтобы выполнялось равенство

$$Im S'_{++}(\tau_k) = 0.$$
 (71)

Теперь аналогично выкладке (51) формулы (69)— (71) и унитарность матрицы (19) приводят к соотношениям

$$1 = \left| S_{\bullet\uparrow}^{\varepsilon}(\tau_{k}) \right|^{2} + \left| S_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}(\tau_{k}) \right|^{2} = \varepsilon^{3} \left| S_{\bullet\uparrow}'(\tau_{k}) \right|^{2} + O(\varepsilon^{4}) +$$

$$+ 1 - 2\varepsilon \operatorname{Re} S_{\uparrow\uparrow}'(\tau_{k}) - 2\varepsilon^{2} \operatorname{Re} S_{\uparrow\uparrow}''(\tau_{k}) -$$

$$- \varepsilon^{2} \left(\operatorname{Re} S_{\uparrow\uparrow}'(\tau_{k}) \right)^{2} - 2\varepsilon^{3} \operatorname{Re} S_{\uparrow\uparrow}''(\tau_{k}) + O(\varepsilon^{4}) \Rightarrow$$
 (72)
$$\Rightarrow \operatorname{Re} S_{\uparrow\uparrow}'(\tau_{k}) = 0,$$

$$\operatorname{Re} S_{\dagger\dagger}^{"}(\tau_k) = 0, \quad 2\operatorname{Re} S_{\dagger\dagger}^{""}(\tau_k) = \left|S_{\bullet\dagger}^{"}(\tau_k)\right|^2 > 0.$$

Введем "сверхбыструю" переменную

$$T = \varepsilon^{-3} \left(\tau - \tau_k - \varepsilon^2 \operatorname{Im} S_{\dagger\dagger}^{"}(\tau_k) \right)$$
 (73)

и заметим, что

$$\operatorname{Im} S_{\dagger\dagger}^{0}(\tau) = -1 + 2\varepsilon^{3} \tau_{k}^{-1} iT + O(\varepsilon^{4} T),$$

$$\varepsilon S_{\dagger\dagger}'(\tau) = 0 + O(\varepsilon^{4} T), \quad \varepsilon^{2} \operatorname{Re} S_{\dagger\dagger}''(\tau) = 0 + O(\varepsilon^{5} T).$$

В результате формула (21) для матрицы рассеяния приобретает вид

$$s^{\varepsilon} = S_{\cdot \cdot \cdot}^{0} - \frac{S'_{\cdot \uparrow}(\tau_{k})S'_{\uparrow \cdot \cdot}(\tau_{k})}{2\tau_{\cdot}^{-1}iT + S'''_{+ +}(\tau_{k})} + O(\varepsilon T).$$
 (74)

Знаменатель дроби из (74) не обращается в нуль в силу последнего неравенства (72). Появление в нем переменной (73), которая изменяется при $\varepsilon \to +0$ значительно более быстро, чем прежняя переменная (50), следует интерпретировать как обострение аномалии Вуда. В самом деле, в условиях (46), (45) и (46), (68)—(71) производная

$$\frac{ds^{\varepsilon}}{d\lambda}(\tau) = -\frac{1}{2\tau} \frac{1}{\varepsilon^{2}} \frac{ds^{\varepsilon}}{d\tau}(\tau)$$

приобретает около точки $\lambda^0 - \epsilon^2 \tau_k^2$ порядки ϵ^{-3} и ϵ^{-5} соответственно.

ТОЧКИ КОМПЛЕКСНОГО РЕЗОНАНСА

Помимо расширенной матрицы рассеяния S^{ε} часто используется увеличенная матрица рассеяния 2 \mathbf{s}^{ε} (ср., например, публикации [15] и [5]). Последняя теряет свойство унитарности и в усеченном варианте (см. комментарий ниже) обретает аналогичное (19) строение

$$\mathbf{s}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{\bullet}^{\varepsilon} & \mathbf{s}_{\bullet\uparrow}^{\varepsilon} \\ \mathbf{s}_{\uparrow}^{\varepsilon} & \mathbf{s}_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon} \end{pmatrix}. \tag{75}$$

Приведем пояснения. Столбец $s_{,\uparrow}^{\epsilon}$ и скаляр $s_{\uparrow\uparrow}^{\epsilon}$ в матрице (75) суть коэффициенты следующего решения задачи (2),(3):

$$\mathbf{Z}_{\uparrow}^{\varepsilon}(x,y) = \chi_{+}(x)w_{k+}^{\varepsilon}(x,y) +$$

$$+ \sum_{\gamma=\pm} \sum_{q=0}^{k-1} \chi_{\gamma}(x)\mathbf{s}_{q\gamma\uparrow}^{\varepsilon}v_{q\gamma}^{\varepsilon}(x,y) + \chi_{+}(x)\mathbf{s}_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}w_{k-}^{\varepsilon}(x,y) +$$

$$+ \chi_{-}(x)\mathbf{t}_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}w_{k+}^{\varepsilon}(x,y) + \tilde{\mathbf{Z}}_{\uparrow}^{\varepsilon}(x,y).$$

$$(76)$$

Это решение инициировано экспоненциально растущей в рукаве Π^+ волной $w_{k+}^\varepsilon(x,y)$ и содержит в разложении помимо осциллирующих волн (6) медленно (см. показатель (9)) затухающие в рукавах Π^\mp волны $w_{k\pm}^\varepsilon(x,y)$, т.е. остаток $\tilde{\mathbf{Z}}_{\uparrow}^\varepsilon(x,y)$ исчезает на бесконечности с быстрой (см. показатель (18)) скоростью $O(e^{-\alpha_{k+1}^\varepsilon|z|})$. Как и при определении решений (16) и (17), для удобства анализа рукава Π^+ и Π^- сделаны неравноправными: экспоненциально растущая в Π^- волна w_{k-}^ε не принимается во

² Augmented and extended scattering matrices в английской терминологии.

внимание, т.е. обе матрицы (19) и (75) приобретают одинаковые размеры.

Сравнивая правые части (17) и (38) при учете определения (17), видим, что

$$\mathbf{Z}_{\dagger}^{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{1 + S_{++}^{\varepsilon}} Z_{\dagger}^{\varepsilon},\tag{77}$$

а значит, в отличие от Z_{\dagger}^{ϵ} , решение $\mathbf{Z}_{\dagger}^{\epsilon}$ не существует в случае (22), т.е. при наличии собственного числа $\lambda^{\epsilon} \in \mathbb{R}$ и порожденной им захваченной волны, когда резольвента оператора задачи (2), (3) имеет полюс в точке λ^{ϵ} . Вместе с тем функцию (77) можно определить при комплексных "частотах" $\kappa_{\epsilon} \in \mathbb{C}_{-} = \left\{ \kappa \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \kappa < 0 \right\}$ (физический лист). В самом деле, сделаем разрез $\Sigma_{k} = [-\pi k, \pi k]$ на вещественной оси комплексной плоскости \mathbb{C} и зададим квадратный корень $\sqrt{\kappa^{2} - \pi^{2}k^{2}}$ положительным при вещественном $\kappa > \pi k$. Тогда $\operatorname{Im} \sqrt{\kappa^{2} - \pi^{2}k^{2}} < 0$ на нижнем береге Σ_{k}^{ϵ} разреза Σ_{k} . Кроме того, при $\kappa_{\epsilon} \in \mathbb{C}_{-}$ функции

$$v_{p+}^{\varepsilon}(x,y) = a_p^{\varepsilon} e^{+i\sqrt{\kappa_{\varepsilon}^2 - \pi^2 p^2} y} \cos\left(\pi p \left(y + \frac{1}{2}\right)\right),$$

$$p = 0, \dots, k-1,$$

затухают в рукаве Π^+ и превращаются в уходящие волны (6) при $\kappa_{\epsilon} \in \Sigma_k^-$. Таким образом, резольвента $R_{\epsilon}(\kappa)$ оператора Гельмгольца $\Delta + \kappa_{\epsilon}^2$ в волноводе Π^{ϵ} с условиями Неймана на искаженных стенках $\partial \Pi^{\epsilon}$ — аналитическая оператор-функция переменной $\kappa \in \mathbb{C}_+$, которая допускает мероморфное продолжение через отрезок Σ_k на верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+ = \{\kappa \in \mathbb{C} : \text{Im } \kappa > 0\}$ (нефизический лист). Как уже упоминалось выше, полюсы резольвенты на \mathbb{C}_+ и Σ_k — соответственно комплексные резонансы и собственные числа. Кроме того, согласно одному из результатов статьи [5] интересующий нас комплексный резонанс совпадает с полюсом усеченной увеличенной матрицы рассеяния (75).

Сравнивая решения (76) и (17) при $\kappa_{\epsilon} \in (\pi(k-1), \pi k)$, в силу формул (12) обнаруживаем такие связи между правыми столбцами матриц (75) и (19):

$$\mathbf{s}_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}(\kappa_{\varepsilon}) = i \frac{1 - S_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}(\kappa_{\varepsilon})}{1 + S_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}(\kappa_{\varepsilon})}, \quad \mathbf{s}_{\uparrow}^{\varepsilon}.(\kappa_{\varepsilon}) = \frac{S_{\uparrow}^{\varepsilon}.(\kappa_{\varepsilon})}{1 + S_{\uparrow\uparrow}^{\varepsilon}(\kappa_{\varepsilon})}. \tag{78}$$

Обращаем внимание на то, что знаменатели обеих дробей (78), а также дроби (77) обращаются в нуль при прежнем условии (22). Поскольку мероморфная функция полностью определена своими значениями на отрезке положительной длины, асимптотические формулы (26), (40) позволяют вычислить координаты точки $\kappa_{\epsilon}^{\#}$ комплексного резонанса. Именно, решим уравнение

$$S_{++}^{\varepsilon}(\kappa_{\varepsilon}) = -1 \tag{79}$$

относительно комплексной неизвестной κ_{ϵ} в верхней полуплоскости \mathbb{C}_{+} . При учете связи $\kappa_{\epsilon}^{2} = \pi^{2}k^{2} - \epsilon^{2}\tau^{2} + O(\epsilon^{3})$ (ср. представления (40) и (57)) и выражений (26), (42) для левой части (79) сохраняем главные асимптотические члены и получаем, что в случае (46) выполнено соотношение

Im
$$\kappa_{\varepsilon}^{\#} = \varepsilon^{3} \frac{\tau_{k}^{2}}{\pi k} \operatorname{Re} S'_{\dagger\dagger}(\tau_{k}) + O(\varepsilon^{4}).$$
 (80)

Итак, мнимая часть (80) точки комплексного резонанса $\kappa_{\epsilon}^{\sharp}$ — бесконечно малая при $\epsilon \to +0$. Иными словами, полюс увеличенной матрицы рассеяния (75) располагается на расстоянии $O(\epsilon^3)$ от вещественной оси, что и предопределяет быструю изменяемость матрицы $\mathbf{s}^{\epsilon}(\kappa)$ и ее блока $\mathbf{s}_{\cdot\cdot\cdot}^{\epsilon}(\kappa)$, совпадающего с классической матрицей рассеяния при вещественных значениях параметра κ . Таким образом, объяснением аномалии Вуда может служить полюс резольвенты $R_{\epsilon}(\kappa)$ в непосредственной близости от вещественной оси. Подчеркнем, что расширенная матрица рассеяния $S^{\epsilon}(\kappa)$ не имеет полюсов, а их образование у матриц $\mathbf{s}^{\epsilon}(\kappa)$ и $\mathbf{s}^{\epsilon}(\kappa)$ объясняется формулами (21) и (77), содержащими знаменатель $\mathbf{1} + S_{++}(\kappa)$.

УСТРАНЕНИЕ АНОМАЛИИ ПУТЕМ СОХРАНЕНИЯ ПОРОГОВОГО РЕЗОНАНСА

В прямом волноводе Π^0 отсутствуют собственные числа и точки комплексного резонанса, однако имеет место пороговый резонанс (см. статьи [7–9] и др.), порожденный волной $w_k^0(y)$ из списка (15), не зависящим от продольной координаты, в частности, стабилизирующимся при $x \to \pm \infty$ решением следующей задачи при $\varepsilon = 0$, т.е. в прямой полосе $(-\infty, +\infty) \times (-1/2, 1/2)$:

$$-\Delta u^{\varepsilon}(x,y) = \pi^{2} k^{2} u^{\varepsilon}(x,y), (x,y) \in \Pi^{\varepsilon},$$

$$\partial_{-\varepsilon} u^{\varepsilon}(x,y) = 0, (x,y) \in \Gamma^{\varepsilon}_{+}.$$
(81)

Согласно одному из результатов работы [2, п. 7] именно пороговый резонанс провоцирует появление околопорогового собственного числа при "точной настройке" параметров профиля (56) возмущения стенок (1) или, как установлено в данной работе, возникновение разнообразных аномалий Вуда в случае уклонения от требуемой настройки. Отметим еще, что пороговый резо-

544 HA3APOB

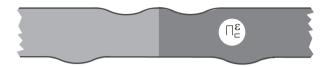


Рис. 2. Симметричный волновод Π^{ε} и его половина $\partial \Pi^{\varepsilon}_{-}$ (тонирована).

нанс позволяет обеспечить "невидимость" искажения стенки на заданной частоте (ср. статью [26]). Покажем, что пороговый резонанс можно сохранить и в возмущенном волноводе Π^{ϵ} путем "точной настройки" профилей стенок (1). Соответствующая процедура в значительной степени повторяет изложенную выше процедуру [1, 2, 16] построения собственного числа (57) в непрерывном спектре, но использует иные вспомогательные объекты — линейные комбинации волн (15)

$$v_{k+}^{0}(x, y) = (x \mp i)w_{k}^{0}(y) = w_{k}^{1}(y) \mp iw_{k}^{0}(y)$$
 (82)

и пороговую матрицу рассеяния [27, 28], которая приобретает размер $2(k+1) \times 2(k+1)$ и предоставляет аналогичный [15, 16] критерий возникновения порогового резонанса (см. теоремы 1 и 3.2 в работах [27] и [28] соответственно), который однако оперирует ее (2×2) -блоком и потому становится трудным для применения (именно для упрощения вычислений рукава Π^{\pm} были ранее сделаны неравноценными при рассмотрении расширенной и увеличенной матриц рассеяния). Для облегчения выкладок и рассуждений предположим в данном разделе, что при возмущении (1) стенок волновод Π^{ϵ} остается симметричным относительно продольной координаты x, т.е. $\Pi^{\varepsilon} = \{(x, y) : (-x, y) \in \Pi^{\varepsilon}\},$ а задачу (81) сузим на его половину $\Pi^{\varepsilon}_{\sqsubset} - \{(x,y) \in \Pi^{\varepsilon} : x>0\}$ и дополним искусственным условием Неймана

$$-\Delta u_{\square}^{\varepsilon}(x,y) = \pi^{2} k^{2} u_{\square}^{\varepsilon}(x,y), (x,y) \in \Pi_{\square}^{\varepsilon},$$

$$\partial_{n_{\pm}^{\varepsilon}} u_{\square}^{\varepsilon}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Gamma_{\pm \square}^{\varepsilon},$$

$$-\partial_{x} u_{\square}^{\varepsilon}(0,y) = 0, \quad y \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$
(83)

При этом считаем, что $H_{\pm}(0)=0$, т.е. торец $\partial \Pi_{\Box}^{\epsilon} \setminus \partial \Pi^{\epsilon}$ усеченного волновода Π_{\Box}^{ϵ} не претерпевает возмущений (ср. рис. 2). Наконец, четное относительно переменной x продолжение u^{ϵ} решения u^{ϵ}_{\Box} вспомогательной задачи (83) удовлетворяет исходной задаче (81).

Распространяющиеся волны (5) при $\varepsilon = 0$ и вновь введенные волны (82) подчинены условиям ортогональности и нормировки (14). В результате

пороговая матрица рассеяния S^{ε} , имеющая размер $(k+1)\times(k+1)$ и составленная из коэффициентов разложений

$$\mathbf{Z}_{p}^{\varepsilon}(x,y) = v_{p-}^{0}(x,y) + \sum_{q=0}^{k} \mathbf{S}_{qp}^{\varepsilon} v_{q+}^{0}(x,y) +$$

$$+ \tilde{\mathbf{Z}}_{p}^{\varepsilon}(x,y), \quad p = 0, \dots, k,$$
(84)

решений задачи (83), является унитарной и симметричной по прежним причинам (см. комментарии к формулам (8) и (19)). Остаток $\tilde{\mathbf{Z}}_p^{\varepsilon}(x,y)$ затухает на бесконечности со скоростью $O(z^{\sqrt{2k+1}})$. Проверка существования решений (84) и свойств матрицы \mathbf{S}^{ε} осуществляется по той же схеме [20, гл. 5], [2], что для решений (16), (17) и матрицы (19). Представим матрицу в виде

$$\mathbf{S}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{\#\#}^{\varepsilon} & \mathbf{S}_{\#k}^{\varepsilon} \\ \mathbf{S}_{k\#}^{\varepsilon} & \mathbf{S}_{kk}^{\varepsilon} \end{pmatrix}$$
(85)

со скаляром $\mathbf{S}_{kk}^{\varepsilon}$ и $(k \times k)$ -блоком $\mathbf{S}_{\#\#}^{\varepsilon}$. Если

$$\mathbf{S}_{\nu\nu}^{\varepsilon} = -1,\tag{86}$$

то согласно формуле (82) и равенству $\left|\mathbf{S}_{\#k}^{\varepsilon}\right|=0$ для столбца матрицы (85), проверяемому подобной (23) выкладкой, решение (84) при p=k приобретает вид

$$\mathbf{Z}_{k}^{\varepsilon}(x,y) = 2iw_{k}^{0}(y) + \tilde{\mathbf{Z}}_{k}^{\varepsilon}(x,y)$$
 (87)

и становится стабилизирующимся при $z \to +\infty$, т.е. обеспечивает пороговый резонанс.

Построим асимптотики

$$\mathbf{Z}_{k}^{\varepsilon}(x,y) = \mathbf{Z}_{k}^{0}(x,y) + \varepsilon \mathbf{Z}_{k}'(x,y) + \tilde{\mathbf{Z}}_{k}^{\varepsilon}(x,y), \quad (88)$$

$$\mathbf{S}_{kk}^{\varepsilon} = \mathbf{S}_{kk}^{0} + \varepsilon \mathbf{S}_{kk}' + \tilde{\mathbf{S}}_{kk}^{\varepsilon}, \quad \mathbf{S}_{\#k}^{\varepsilon} = \mathbf{S}_{\#k}^{0} + \varepsilon \mathbf{S}_{\#k}' + \tilde{\mathbf{S}}_{\#k}^{\varepsilon}$$
(89)

решения задачи (83) и соответствующих элементов пороговой матрицы рассеяния. Главные члены анзацев (89) имеют вид

$$\mathbf{S}_{kk}^{0} = -1, \ \mathbf{S}_{\#\#}^{0} = \mathbb{I}_{2h} = \text{diag}\{1, ..., 1\},$$
 (90)

так как решениями задачи (83) в полуполосе $\Pi^0_{\sqsubset} = (0, +\infty) \times (-1/2, 1/2)$ служат функции

$$\mathbf{Z}_{p}^{0}(x,y) = v_{p-}^{0}(x,y) + v_{p+}^{0}(x,y), \quad p = 0,...,k-1,$$

$$\mathbf{Z}_{k}^{0}(x,y) = v_{k-}^{0}(x,y) + v_{k+}^{0}(x,y) = 2iw_{k}^{0}(x,y).$$
(91)

При помощи аналогичных (55) преобразований переформулируем критерий (86) порогового резонанса (ср. работы [27, 28]) как соотношения

$$\operatorname{Im} \mathbf{S}_{kk}^{\varepsilon} = 0, \operatorname{Re}(e^{i\psi} \mathbf{S}_{\#k}^{\varepsilon}) = 0 \in \mathbb{R}^{k},$$
 (92)

в которых, например, $\psi = \pi$, т.е. множитель $e^{i\psi} = -1$ не является собственным числом единичной матрицы $\mathbf{S}^0_{\#\#}$ из списка (90).

Аналогично формулам (29), (30) поправочный член в представлении (88) — решение задачи

$$\begin{split} -\Delta \mathbf{Z}_k'(x,y) &= \pi^2 k^2 \mathbf{Z}_k'(x,y), \quad (x,y) \in \Pi_{\square}^0, \\ &\pm \partial_y \mathbf{Z}_k'\left(x,\pm \frac{1}{2}\right) = 2i\pi^2 k^2 H_{\pm}(x) w_k^0 \left(\pm \frac{1}{2}\right), \\ x &\in (0,+\infty), \quad -\partial_x \mathbf{Z}_k'(0,y) = 0, \quad y \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \end{split}$$

причем в силу формул (89) и (91) должны быть выполнены условия излучения

$$\mathbf{Z}'_{k}(x,y) = \sum_{q=0}^{k} \mathbf{S}'_{qk} v_{q+}^{0}(x,y) + \tilde{\mathbf{Z}}'_{p}(x,y)$$
(93)

с экспоненциально затухающим остатком. Подставим решения (91) и (93) в формулу Грина на прямоугольнике $(0,R)\times(-1/2,1/2)$ и устремим размер R к бесконечности. В результате получим содержащие интегралы (37) и (39) равенства

$$\mathbf{S}'_{k} = 2iJ_{k}(H), \quad \mathbf{S}'_{pk} = 2(J^{+}_{pk}(H) + J^{-}_{pk}(H)),$$

$$p = 0, \dots, k - 1.$$
(94)

Отметим, что спектральный параметр $\pi^2 k^2$ зафиксирован, и поэтому обоснование асимптотических формул (89), (88), в частности оценки $\left| \tilde{\mathbf{S}}_{mk}^{\varepsilon} \right| \leq c \varepsilon^2$ остатков (ср. неравенство (43)) и проверка гладкой зависимости последних от малого параметра ε , не вызывают осложнений.

Для обеспечения критерия (92) осталось повторить изложенную выше процедуру "точной настройки" параметров

$$\beta = (\beta_0, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$$
 (95)

в представлении

$$H_{\pm}^{\beta}(x) = H_{\pm}^{\#}(x) + \beta_0 H_{\pm}^{0}(x) + \dots + \beta_k H_{\pm}^{k}(x), \quad x > 0,$$
(96)

профилей возмущенных стенок (1) с нетривиальными начальными членами $H_{\pm}^{\#}$. Именно, подчинив компоненты представления (96) — нетривиальные гладкие функции с носителями на отрезке $(0,\ell)$ — условиям ортогональности и нормировки

$$J_{k}(H^{\#}) = 0, \quad J_{pk}^{+}(H^{\#}) + J_{pk}^{-}(H^{\#}) = 0,$$

$$J_{k}(H^{q}) = 0, \quad \text{Re}(J_{pk}^{+}(H^{q}) + J_{pk}^{-}(H^{q})) = \delta_{p,q}, \quad (97)$$

$$p, q = 0, \dots, k - 1,$$

на основе асимптотических формул (89), (90), (94) образуем аналогичную (63) систему уравне-

ний со сжимающим оператором $\mathfrak{B}^{\varepsilon}$ на (k+1)мерном шаре $\mathbb{B}_{\scriptscriptstyle \mathsf{D}}$ и найдем единственное ее решение β, подчиненное оценке (67) и полностью определяющее функции (96). Итак, формула (96) дает профили $H_{\pm}^{\beta}(x) = H_{\pm}^{\#}(x) + O(\epsilon)$ возмущений стенок (1) волновода Π^{ϵ} , в котором существует стабилизирующееся при $x \to \pm \infty$ решение как четное продолжение по переменой х функции (87) и тем самым обеспечен пороговый резонанс, благодаря которому в Π^{ε} действительно отсутствует аномалия Вуда. Подчеркнем, что околопороговое собственное число (57) заведомо отсутствует, однако, поскольку явный вид вектора коэффициентов (95) недоступен, осталось неясным, выполнено или нет ограничение (47), при котором матрица рассеяния (49) также характеризуется гладкой зависимостью от спектрального параметра. При этом, если последняя компонента β_{ν} решения (95) неотрицательна, то согласно соотношениям (96) и (97) справедливо неравенство $J_k(H^{\beta}) = \beta_k \ge 0$, т.е. выполнено одно из условий (46) или (48), допускающих возникновение аномалии при "неправильном" выборе профильных функций.

ФИНАЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Аномалия Вуда, возникающая при деформации стенок волновода, характеризуется зависимостью матрицы рассеяния s^{ε} от быстрой переменной (50) на околопороговых частотах и точкой $\tau_{\#}^{\epsilon}$ комплексного резонанса на малом расстоянии (80) от вещественной оси. При определенных профилях возмущения (1) мнимая часть $\operatorname{Im}_{\pi}^{\varepsilon}$ уменьшается и матрица s^{ε} приобретает зависимость от "сверхбыстрой" переменной (73), однако в случае $\mathrm{Im} \tau_{\scriptscriptstyle \#}^{\scriptscriptstyle \epsilon} = 0$ точка $\tau_{\scriptscriptstyle \#}^{\scriptscriptstyle \epsilon}$ становится собственным числом и аномалия исчезает полностью. Последнее может быть достигнуто путем "точной настройки" параметров $\beta \in \mathbb{R}^{4k-3}$ профилей (56), однако соответствующая процедура не дает устойчивого результата: сколь угодно малое дополнительное возмущение стенки возвращает аномалию Вуда. Другой неустойчивый способ устранения аномалии посредством подбора функций (96) — обеспечение порогового резонанса в возмущенном волноводе, возможное при "почти полном" сохранении объема волновода и требующее подбора профилей (96), т.е. образование у задачи на пороге непрерывного спектра ограниченного решения, стабилизирующегося при $x \to \pm \infty$. Единственный случай искажения стенки, не вызывающий аномалию Вуда и невосприимчивый к дополнительным малым возмущениям, — выполнение требования (47) к интегралу (37), гарантированного, в частности, уменьшением объема волновода.

Работа выполнена в рамках проекта 17-11-01003 Российского научного фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Назаров С.А.* Собственные числа оператора Лапласа с условиями Неймана на регулярно возмущенных стенках волновода // Проблемы матем. анализа. 2011. Вып. 53. Новосибирск. С. 104—119.
- 2. *Назаров С.А.* Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода // Теоретическая и математическая физика. 2011. Т. 167. № 2. С. 239—262.
- 3. *Назаров С.А.* Захваченные волны в коленчатом волноводе с жесткими стенками // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 6. С. 746—754.
- 4. *Назаров С.А.* Волны, захваченные тонким искривленным экраном в волноводе с жесткими стенками // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 6. С. 683—691.
- Aslanyan A., Parnovski L., Vassiliev D. Complex resonances in acoustic waveguides // Q. J. Mech. Appl. Math. 2000. V. 53. P. 429–447.
- 6. *Linton C.M.*, *McIver P.* Embedded trapped modes in water waves and acoustics // Wave Motion. 2007. V. 45. № 1–2. P. 16–29.
- 7. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
- 8. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № 3. P. 718—752.
- 9. *Pankrashkin K*. Eigenvalue inequalities and absence of threshold resomamnees for waveguide junctions // J. of Math. Anal. and Appl. 2017. V. 449. № 1. P. 907–925.
- 10. *Wood R*. On the remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum // Proc. Phys. Soc. London. 1902. V. 18. P. 269–275.
- 11. *Seabrook W.* Doctor Wood, Modern Wizard of the Laboratory. New York: Harcourt Brace, 1941.
- 12. *Hessel A.*, *Oliner A.A.* A new theory of Wood's anomalies on optical gratings // Appl. Optics. 1965. V. 4. № 10. P. 1275–1297.
- 13. *Назаров С.А.* Асимптотика собственного числа волновода с тонким экранирующим препятствием и аномалии Вуда // Записки научн. семинаров петербург. отделения матем. института РАН. 2010. Т. 385. С. 98—134.

- Wilcox C.H. Scattering Theory for Diffraction Gratings. Applied Mathematical Sciences Series V. 46. Singapore: Springer, 1997.
- 15. *Камоцкий И.В.*, *Назаров С.А*. Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области // Записки научн. семинаров петербург. отделения матем. института РАН. 2000. Т. 264. С. 66—82.
- 16. *Назаров С.А.* Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // Функциональный анализ и его приложения. 2013. Т. 47. № 3. С. 37—53.
- 17. Умов Н.А. Уравнения движения энергии в телах. Одесса: Типогр. Ульриха и Шульце, 1874. 56 с.
- Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. Сб. трудов. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1947.
- Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- 20. *Nazarov S.A.*, *Plamenevsky B.A*. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
- 21. *Ван Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.
- Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
- 23. *Назаров С.А.* Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра // Сибирск. матем. журнал. 2010. Т. 51. № 5. С. 1086—1101.
- 24. *Nazarov S.A.* Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domains // Sobolev Spaces in Mathematics. V. II (Maz'ya V., Ed.) International Mathematical Series. V. 9. New York: Springer, 2008. P. 261–309.
- 25. *Като Т*. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- 26. *Боннэ-Бен Диа А.-С., Назаров С.А.* Препятствия в акустическом волноводе, становящиеся "невидимыми" на заданных частотах // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 6. С. 685–692.
- 27. *Назаров С.А.* Ограниченные решения в Т-образном волноводе и спектральные свойства лестницы Дирихле // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 8. С. 1299—1318.
- 28. *Назаров С.А.* Почти стоячие волны в периодическом волноводе с резонатором и околопороговые собственные числа // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28. № 3. С. 111-160.