

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА МНОГОСЛОЙНОЙ ЗВУКОИЗОЛЯЦИИ, ВКЛЮЧАЮЩЕЙ СЛОИ ВОЛОКНИСТОГО ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

© 2018 г. Л. Р. Яблоник

*Научно-производственное объединение по исследованию и проектированию энергетического оборудования
им. И.И. Ползунова*

191167 Санкт-Петербург, ул. Атаманская 3/6, Россия

e-mail: yablonik@gmail.com

Поступила в редакцию 07.03.2018 г.

Предлагаемый метод основывается на теории Био распространения волн в пористых насыщенных упругих средах. Для упрощения громоздкой процедуры полного расчета используется специфика типичных волокнистых пористых материалов: большая по сравнению с воздухом плотность и умеренная по сравнению с воздухом жесткость упругого каркаса. В этом случае передаточные свойства упругого пористого слоя представляются двумя матрицами второго порядка, которые характеризуют передачу звука воздушными и структурными волнами. В совокупности с граничными условиями такое представление в типовых схемах позволяет формировать единую передаточную матрицу слоя, рассматривая его как линейный четырехполюсник, связывающий давления и нормальные компоненты скорости во входном и выходном сечении. При расчете звукоизоляции многослойной структуры сформированная матрица упругого пористого слоя вводится сомножителем в цепочку передаточных матриц второго порядка, определяемых другими слоями. Приведены примеры и сравнительные расчеты, демонстрирующие высокую степень соответствия результатов применения метода данным полного расчета.

Ключевые слова: теория Био, воздушные и структурные волны, частичное разделение, матрица четырехполюсника

DOI: 10.1134/S0320791918050106

ВВЕДЕНИЕ

Звукоизолирующее действие слоя волокнистого пористого материала в составе многослойной звукоизоляции обусловлено физическими процессами, связанными в общем случае с формированием двух видов упругих колебаний. Первый из них – колебания воздушного объема, заполняющего поры материала; второй – колебания волокнистой структуры, формирующей собственно материал и, соответственно, пористый каркас слоя. Степень относительного влияния каждого из отмеченных видов колебаний существенно зависит как от физических свойств пористой среды слоя, так и от способа его включения в состав многослойной звукоизоляции.

Наиболее полное представление о волновых процессах, определяющих прохождение звука через упругий пористый слой, базируется на теоретических работах Био [1, 2], формулирующих основные законы динамического взаимодействия упругих колебаний пористого каркаса и насыщающей его жидкости. Теория Био, являющаяся одним из крупных направлений современной механики

сплошных сред, получила дальнейшее развитие в многочисленных статьях и монографиях [3].

Тем не менее, практическое применение теории наталкивается на определенные ограничения, связанные с высокой трудозатратностью требуемых расчетов. Данный фактор послужил причиной как предложений по переформулировке собственно модели Био [4, 5], так и упрощений [6, 7] в прикладных задачах расчетов звукоизоляции.

Предлагаемые в данной статье упрощения, относящиеся к слоям волокнистого пористого материала, позволяют свести ключевой этап расчета звукоизоляции с такими слоями к стандартной процедуре перемножения матриц второго порядка.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ БИО

Согласно работам Био [1, 2], механические свойства упругого пористого материала строятся путем синтеза двух моделей сплошной среды. Первая из этих моделей описывает параметры акустических волн, распространяющихся по заполняющей поры жидкой или газовой среде в не-

деформируемом каркасе с тождественными исходному материалу параметрами пористости. Вторая модель задает динамические упругие свойства каркаса без заполняющей поры среды, т.е. в вакууме.

Применительно к рассматриваемой задаче первая модель в рамках изотропного представления определяется двумя зависящими от частоты комплексными параметрами, в качестве которых могут служить динамическая плотность ρ_f и динамический модуль объемного сжатия K_f воздуха, насыщающего пористую среду. Другим вариантом, часто используемым при рассмотрении звукопоглощающих материалов, может быть задание частотных зависимостей волнового сопротивления (характеристического импеданса) и постоянной распространения воздушных волн, проходящих по порам недеформируемого каркаса.

Вторая модель сплошной среды определяется посредством задания частотной характеристики комплексного динамического модуля сдвига G_s (или какого-либо иного модуля упругости) в вакууме, а также коэффициента Пуассона ν_s и объемной плотности ρ_s изотропного каркаса.

Синтезированная модель представляется уравнением состояния, связывающим напряжения и деформации каркаса и насыщающей среды в [1, 2, 8]:

$$\sigma_{ij}^s = [(P - 2G_s)\theta^s + Q\theta^f] + 2G_s e_{ij}^s, \quad (1)$$

$$p^f = -(R\theta^f + Q\theta^s). \quad (2)$$

Здесь σ_{ij}^s , e_{ij}^s – соответственно тензоры напряжений и деформаций каркаса, p^f – давление насыщающей среды; θ^f, θ^s – относительные объемные расширения насыщающей среды и каркаса. Входящие в соотношения (1, 2) параметры P, Q, R зависят от пористости ϕ (равной отношению объема пор к общему объему материала) и параметров представленных моделей. Применительно к волокнистым материалам в воздушной среде, когда сжимаемость собственно волокон можно пренебречь, справедливы равенства

$$P = \rho_s (c_l^s)^2 + \frac{(1-\phi)^2}{\phi} K_f, \quad (3)$$

$$Q = (1-\phi) K_f, \quad (4)$$

$$R = \phi K_f. \quad (5)$$

Входящая в равенство (3) величина c_l^s представляет собой скорость распространения продольных волн по каркасу в вакууме, однозначным образом [9] связанную с характеристиками ρ_s, G_s и ν_s .

Решения линейных уравнений движения рассматриваемой среды представляются как супер-

позиции двух типов продольных волн (волн сжатия–расширения) и одной поперечной (сдвиговой) волны. Волны сжатия–расширения задаются вектором $[\Phi]$, компонентами которого служат скалярные потенциалы ϕ^s и ϕ^f связанных перемещений каркаса и заполняющей поры газовой среды. Соответствующее им волновое движение на частоте ω представляется уравнением

$$-\omega^2 [\rho][\Phi] = [M]\nabla^2 [\Phi], \quad (6)$$

в котором

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi^s \\ \phi^f \end{bmatrix},$$

а компоненты матриц

$$[\rho] = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix}$$

определяются формулами (3)–(5) и соотношениями

$$\rho_{11} = \rho_s + \phi(\rho_f - \rho_0),$$

$$\rho_{12} = -\phi(\rho_f - \rho_0), \quad \rho_{22} = \phi\rho_f,$$

где ρ_0 – плотность воздуха в свободном состоянии.

Поперечные волны представляются векторными потенциалами Ψ^s и Ψ^f . Соответствующее волновое движение каркаса задается уравнением

$$-\frac{\omega^2 \rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2}{G_s \rho_{22}} \Psi^s = \nabla^2 \Psi^s. \quad (7)$$

Волновые числа δ_1, δ_2 волн сжатия–расширения находятся в соответствии с (6) как корни квадратного уравнения

$$|\omega^2 [M]^{-1} [\rho] - \delta^2 [E]| = 0$$

(где $[E]$ – единичная матрица второго порядка), получающегося при решении стандартной задачи определения собственных значений матрицы $\omega^2 [M]^{-1} [\rho]$. Соответствующие собственные волновые векторы $[\Phi_{1,2}]$ характеризуются отношением $\mu_{1,2}$ компонент ϕ^f, ϕ^s , равным отношению скорости движения насыщающей газовой (воздушной) среды к скорости деформации каркаса:

$$\mu_n = \frac{\phi_n^f}{\phi_n^s} = \frac{P(\delta_n)^2 - \omega^2 \rho_{11}}{\omega^2 \rho_{12} - Q(\delta_n)^2} = \frac{Q(\delta_n)^2 - \omega^2 \rho_{12}}{\omega^2 \rho_{22} - R(\delta_n)^2} \quad (n = 1, 2).$$

Нетрудно убедиться, что значения μ_1 и μ_2 удовлетворяют равенствам

$$P + Q(\mu_1 + \mu_2) + R\mu_1\mu_2 = 0, \quad (8)$$

$$\rho_{11} + \rho_{12}(\mu_1 + \mu_2) + \rho_{22}\mu_1\mu_2 = 0, \quad (9)$$

и могут, следовательно, быть найдены непосредственно по компонентам матриц $[M]$ и $[\rho]$.

Заметим, что информация о значимых соотношениях (8, 9), первое из которых будет далее использовано, отсутствует в доступных нам источниках.

Волновое число δ_3 поперечных волн определяется равенством

$$\delta_3^2 = \frac{\omega^2 \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}{G_s \rho_{22}}, \quad (10)$$

непосредственно следующим из волнового уравнения (7).

ТЕОРИЯ БИО В РАСЧЕТАХ ЗВУКОИЗОЛЯЦИИ С УПРУГИМ ПОРИСТЫМ СЛОЕМ. ОБОСНОВАНИЕ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ

Вследствие существования отмеченных трех видов волн, прохождение звука через плоскопараллельный слой упругой пористой среды характеризуется в общем случае передаточной матрицей шестого порядка, связывающей значения трех пар динамических переменных — напряжений и скоростей — во входном и выходном сечении. При этом для расчета многослойной изоляции в целом приходится прибегать к довольно громоздкой процедуре [8] построения единой матрицы системы еще более высокого порядка. Так, расчет простейшей двухслойной системы “пористый слой—пластина” требует построения матрицы размера 10×11 , а расчет стандартной трехслойной системы “пластина—пористый слой—пластина” основывается на формировании матрицы размера 12×13 . Добавление какого-либо слоя вызывает необходимость перестроения всей матрицы многослойной структуры.

Требуемый при таком общем подходе объем детальных расчетов значительно отличается от простого алгоритма определения показателей эффективности многослойной изоляции в ситуации, когда многослойную структуру можно рассматривать как совокупность линейных четырехполюсников [10, 11]. В последнем случае каждый четырехполюсник характеризуется матрицей второго порядка, связывающей значения комплексных амплитуд давления и нормальной составляющей скорости во входном и выходном сечении соответствующего слоя, а передаточная матрица всей многослойной системы представляется как произведение передаточных матриц составляющих ее слоев.

С учетом отмеченных особенностей естественно попытаться упростить общую расчетную схему путем нахождения возможных вариантов четы-

рехполюсного представления слоя упругого волокнистого пористого материала в составе многослойной структуры. Такая возможность тем более востребована, что динамические свойства практически всех иных используемых в многослойной звукоизоляции типов слоев (экранов, защитных покрытий, воздушных зазоров и пр.) могут с той или иной степенью точности представляться четырехполюсниками.

Допустимость некоторого упрощения общих соотношений связана со спецификой рассматриваемой задачи. Вследствие того, что в волокнистых пористых материалах, используемых при звукоизоляции, плотность ρ_0 насыщающей среды (воздуха) на 1–2 порядка ниже плотности ρ_s каркаса, два представленных выше вида волн сжатия—расширения трактуются как воздушные (*air-borne*) и структурные (*frame-borne*) волны [8]. При этом в условиях, типичных для волокнистых пористых материалов, имеет место частичное разделение (*partial decoupling*) между волновым движением каркаса и воздуха, при котором воздушные волны весьма слабо связаны с колебаниями каркаса, тогда как структурные волны сжатия—расширения могут сопровождаться существенными колебаниями вовлекаемой в волновое движение газовой среды.

Поперечные волны, характеризуемые волновым числом (10), в данном случае весьма близки к поперечным волнам, распространяющимся по каркасу в вакууме. Поскольку модуль упругости каркаса для большинства используемых при звукоизоляции волокнистых пористых материалов [12] имеет тот же порядок, что и модуль упругости воздуха, это означает, что при $\rho_0 \ll \rho_s$ модуль волнового числа δ_3 из (10) значительно превышает волновое число падающей на многослойную изоляцию звуковой волны. Отсюда следует, что в широком диапазоне углов падения направления проходящих через пористую среду структурных волн сосредоточены вблизи к нормали к плоскости слоя. Так как при нормальном прохождении звука поперечные волны в пористом каркасе, очевидно, не генерируются, естественно ожидать, что в условиях малых углов прохождения их влиянием на рассматриваемые процессы можно пренебречь.

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ ПОРИСТОГО УПРУГОГО СЛОЯ

В предположении несущественности сдвиговых процессов одномерные уравнения, следующие из (1, 2), могут быть записаны в форме

$$p^s = -P \frac{\partial u^s}{\partial \xi} - Q \frac{\partial u^f}{\partial \xi} = -P \frac{\partial^2 \phi^s}{\partial \xi^2} - Q \frac{\partial^2 \phi^f}{\partial \xi^2}, \quad (11)$$

$$p^f = -R \frac{\partial u^f}{\partial \xi} - Q \frac{\partial u^s}{\partial \xi} = -R \frac{\partial^2 \varphi^f}{\partial \xi^2} - Q \frac{\partial^2 \varphi^s}{\partial \xi^2}, \quad (12)$$

где $p^s = -\sigma_{\xi\xi}^s$ – давление каркаса; ξ – направление волны. При этом нормальные к плоскости слоя компоненты скорости v^s, v^f каркаса и газовой (воздушной) среды выражаются в виде

$$v^s = i\omega \frac{\partial \varphi^s}{\partial x}, \quad (13)$$

$$v^f = i\omega \frac{\partial \varphi^f}{\partial x}. \quad (14)$$

Звуковое поле в слое представляется суперпозицией встречно направленных воздушных и структурных гармонических волн, так что

$$\varphi^s = \left[A_1 \exp(-i\delta_1^x x) + A_1' \exp(i\delta_1^x x) \right] + \left[A_2 \exp(-i\delta_2^x x) + A_2' \exp(i\delta_2^x x) \right], \quad (15)$$

$$\varphi^f = \mu_1 \left[A_1 \exp(-i\delta_1^x x) + A_1' \exp(i\delta_1^x x) \right] + \mu_2 \left[A_2 \exp(-i\delta_2^x x) + A_2' \exp(i\delta_2^x x) \right]. \quad (16)$$

Здесь δ_1^x, δ_2^x – проекции соответствующих волновых векторов на нормаль к плоскости слоя, так что

$$\delta_n^x = \sqrt{\delta_n^2 - k_y^2} \quad (n = 1, 2),$$

где k_y – проекция волнового вектора падающей волны на плоскость слоя, зависящая от угла падения волны.

Подстановка выражений (15), (16) в равенства (11)–(14) приводит к соотношениям для давлений и скоростей в слое, которые формулируются в матричной форме с учетом представлений о частичном разделении воздушных и структурных волн:

$$\begin{bmatrix} p^s \\ v^s \\ p^f \\ v^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \cos(\delta_1^x x) & -iD_1 \sin(\delta_1^x x) & D_2 \sin(\delta_2^x x) & -iD_2 \sin(\delta_2^x x) \\ -i\omega\delta_1 \sin(\delta_1^x x) & \omega\delta_1 \cos(\delta_1^x x) & -i\omega\delta_2 \sin(\delta_2^x x) & \omega\delta_2 \cos(\delta_2^x x) \\ E_1 \cos(\delta_1^x x) & -iE_1 \sin(\delta_1^x x) & 0 & 0 \\ -i\omega\mu_1\delta_1 \sin(\delta_1^x x) & \omega\mu_1\delta_1 \cos(\delta_1^x x) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 + A_1' \\ A_1 - A_1' \\ A_2 + A_2' \\ A_2 - A_2' \end{bmatrix}. \quad (17)$$

В последнем равенстве индекс “1” относится к воздушным, индекс “2” – к структурным волнам,

$$D_n = (P + Q\mu_n) \delta_n^2 \quad (n = 1, 2), \quad (18)$$

$$E_1 = (R\mu_1 + Q) \delta_1^2. \quad (19)$$

Соотношение (17) преобразуется к двум независимым системам

$$\begin{bmatrix} p^f \\ v^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \cos(\delta_1^x x) & -iE_1 \sin(\delta_1^x x) \\ -i\omega\mu_1\delta_1 \sin(\delta_1^x x) & \omega\mu_1\delta_1 \cos(\delta_1^x x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 + A_1' \\ A_1 - A_1' \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} p^{sf} \\ v^{sf} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2 \cos(\delta_2^x x) & -iD_2 \sin(\delta_2^x x) \\ -i\omega\delta_2 \sin(\delta_2^x x) & \omega\delta_2 \cos(\delta_2^x x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 + A_2' \\ A_2 - A_2' \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где, с учетом выражений (18), (19) и соотношения (8),

$$p^{sf} = p^s - \frac{D_1}{E_1} p^f = p^s + \mu_2 p^f,$$

$$v^{sf} = v^s - \frac{1}{\mu_1} v^f.$$

Из равенств (20), (21) стандартными преобразованиями получают выражения для передаточных матриц второго порядка $[T^f]$ и $[T^s]$, связывающих динамические параметры воздушных и структурных волн на входе (индекс “i”) и выходе (индекс “e”) слоя толщиной h :

$$\begin{bmatrix} p_i^f \\ v_i^f \end{bmatrix} = [T^f] \begin{bmatrix} p_e^f \\ v_e^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\delta_1^x h) & i \frac{E_1}{\omega\mu_1\delta_1} \sin(\delta_1^x h) \\ i \frac{\omega\mu_1\delta_1}{E_1} \sin(\delta_1^x h) & \cos(\delta_1^x h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_e^f \\ v_e^f \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_i^{sf} \\ v_i^{sf} \end{bmatrix} &= [\mathbf{T}^s] \begin{bmatrix} p_e^{sf} \\ v_e^{sf} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\delta_2^x h) & i \frac{D_2}{\omega \delta_2^x} \sin(\delta_2^x h) \\ i \frac{\omega \delta_2^x}{D_2} \sin(\delta_2^x h) & \cos(\delta_2^x h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_e^{sf} \\ v_e^{sf} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

При этом входящие в равенство (23) величины $p^{sf} = p^s + \mu_2 p^f$ и $v^{sf} = v^s - \frac{1}{\mu_1} v^f$ могут трактоваться как обобщенные давление и скорость, переносимые структурными волнами в присутствии насыщающей среды (воздуха). В предельном случае независимых колебаний каркаса и воздушной среды, когда $\mu_1 \rightarrow \infty$ и $\mu_2 \rightarrow 0$, эти параметры вырождаются в давление и нормальную компоненту скорости каркаса в вакууме.

Соотношения (22, 23), исходящие из общих зависимостей (1), (2), (6), основаны на двух допущениях. Первое из них – частичное разделение, связанное с соотношением плотностей воздуха и пористого материала; второе – несущественность сдвиговых напряжений, обусловленная относительно низкой скоростью распространения структурных волн. Использование полученных соотношений позволяет в ряде типичных ситуаций представить слой упругого волокнистого пористого материала в составе многослойной структуры передаточной матрицей второго порядка $[\mathbf{T}^p]$, связывающей давления p^p и нормальные скорости v^p во входном и выходном сечении. Специфика такого представления состоит в зависимости вида передаточной матрицы слоя от условий на его границах.

ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ МАТРИЦЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ УПРУГОГО ПОРИСТОГО СЛОЯ

Рассмотрим два примера.

В качестве первого примера рассмотрим пористый слой, ограниченный с двух сторон воздухо-непроницаемыми плоскими поверхностями. В качестве таковых могут быть границы с упругими пластинами, мембранами, защитными пленками и т.п. Условия на границах слоя в данном случае имеют вид

$$v_i^f = v_i^p, \quad v_i^s = v_i^p, \quad v_e^f = v_e^p, \quad v_e^s = v_e^p, \quad (24)$$

$$p_i^f + p_i^s = p_i^p, \quad p_e^f + p_e^s = p_e^p. \quad (25)$$

Для решения задачи используем матрицы импедансов $[\mathbf{Z}]$ [10], связывающие давления и скорости на границах слоя, так что

$$\begin{bmatrix} p_i \\ p_e \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}] \begin{bmatrix} v_i \\ v_e \end{bmatrix}.$$

Задание матрицы импедансов эквивалентно заданию передаточной матрицы $[\mathbf{T}]$, их компоненты связаны простыми соотношениями.

В терминах матриц импедансов соотношения (22), (23) представляются в форме

$$\begin{bmatrix} p_i^f \\ p_e^f \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}^f] \begin{bmatrix} v_i^f \\ v_e^f \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} p_i^s + \mu_2 p_i^f \\ p_e^s + \mu_2 p_e^f \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}^s] \begin{bmatrix} v_i^s - \frac{1}{\mu_1} v_i^f \\ v_e^s - \frac{1}{\mu_1} v_e^f \end{bmatrix}. \quad (27)$$

С учетом граничных условий (24) формулы (26), (27) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_i^f \\ p_e^f \end{bmatrix} &= [\mathbf{Z}^f] \begin{bmatrix} v_i^p \\ v_e^p \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} p_i^s \\ p_e^s \end{bmatrix} &= \left(1 - \frac{1}{\mu_1}\right) [\mathbf{Z}^s] \begin{bmatrix} v_i^p \\ v_e^p \end{bmatrix} - \mu_2 [\mathbf{Z}^f] \begin{bmatrix} v_i^p \\ v_e^p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Суммируя последние равенства, получаем, ввиду (25) весьма простое выражение

$$[\widetilde{\mathbf{Z}}^p] = (1 - \mu_2) [\mathbf{Z}^f] + \left(1 - \frac{1}{\mu_1}\right) [\mathbf{Z}^s] \quad (28)$$

для матрицы импедансов $[\widetilde{\mathbf{Z}}^p]$ упругого пористого слоя, заключенного между двумя воздухо-непроницаемыми плоскими поверхностями. Равенство (28) однозначно определяет передаточные свойства слоя в рассмотренной конфигурации.

Во втором примере рассмотрим пористый слой, с одной стороны граничащий с воздушной средой, а с другой – с воздухо-непроницаемой плоской поверхностью. Будем для определенности полагать, что звуковая волна распространяется со стороны воздушной среды. Граничные условия при этом записываются в форме

$$v_e^f = v_e^p, \quad v_e^s = v_e^p, \quad p_i^f = \phi p_i^p, \quad (29)$$

$$p_i^s = (1 - \phi) p_i^p,$$

$$(1 - \phi) v_i^s + \phi v_i^f = v_i^p, \quad p_e^f + p_e^s = p_e^p. \quad (30)$$

В данном случае для построения передаточной матрицы пористого слоя применим перекрестную матрицу $[\mathbf{X}]$, определяемую соотношением

$$\begin{bmatrix} p_e \\ v_i \end{bmatrix} = [\mathbf{X}] \begin{bmatrix} p_i \\ v_e \end{bmatrix}.$$

Так же, как и матрица импедансов, перекрестная матрица задает передаточные характеристики

слоя, ее компоненты однозначно взаимосвязаны с компонентами передаточной матрицы $[\mathbf{T}]$. При этом соотношения (22), (23) в терминах перекрестной матрицы с учетом равенств (29) принимают вид

$$\begin{bmatrix} p_e^f \\ v_i^f \end{bmatrix} = [\mathbf{X}^f] \begin{bmatrix} \phi p_i^p \\ v_e^p \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} p_e^s + \mu_2 p_e^f \\ v_i^s - \frac{1}{\mu_1} v_i^f \end{bmatrix} = [\mathbf{X}^s] \begin{bmatrix} (1 - \phi) p_i^p + \mu_2 \phi p_i^p \\ v_e^p - \frac{1}{\mu_1} v_e^p \end{bmatrix}.$$

Элементарные преобразования приводят последние зависимости к равенствам

$$\begin{bmatrix} p_e^f \\ v_i^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi X_{11}^f & X_{12}^f \\ \phi X_{21}^f & X_{22}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i^p \\ v_e^p \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p_e^s \\ v_i^s \end{bmatrix} = [\mathbf{X}\mathbf{1}] \begin{bmatrix} p_i^p \\ v_e^p \end{bmatrix},$$

содержащим вспомогательную матрицу

$$[\mathbf{X}\mathbf{1}] = \begin{bmatrix} (1 - \phi + \phi\mu_2) X_{11}^s & \left(1 - \frac{1}{\mu_1}\right) X_{12}^s \\ (1 - \phi + \phi\mu_2) X_{21}^s & \left(1 - \frac{1}{\mu_1}\right) X_{22}^s \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -\mu_2 \phi X_{11}^f & -\mu_2 X_{12}^f \\ \frac{1}{\mu_1} \phi X_{21}^f & \frac{1}{\mu_1} X_{22}^f \end{bmatrix}.$$

Отсюда непосредственно следуют соотношения

$$\begin{bmatrix} p_e^f \\ \phi v_i^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi X_{11}^f & X_{12}^f \\ \phi^2 X_{21}^f & \phi X_{22}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i^p \\ v_e^p \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} p_e^s \\ (1 - \phi) v_i^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}^s & X_{12}^s \\ (1 - \phi) X_{12}^s & (1 - \phi) X_{22}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i^p \\ v_e^p \end{bmatrix}.$$

Суммируя их, получаем с учетом (30) выражение для перекрестной матрицы $[\widetilde{\mathbf{X}}^p]$ рассматриваемого пористого слоя, односторонне присоединенного к воздухонепроницаемой поверхности:

$$[\widetilde{\mathbf{X}}^p] = \begin{bmatrix} \phi X_{11}^f & X_{12}^f \\ \phi^2 X_{21}^f & \phi X_{22}^f \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} X_{11}^s & X_{12}^s \\ (1 - \phi) X_{12}^s & (1 - \phi) X_{22}^s \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Последнее соотношение задает матрицу второго порядка, определяющую передаточную характеристику пористого слоя в рассматриваемом примере.

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИМЕНЕНИЯ УПРОЩЕННОГО МЕТОДА С ДАННЫМИ ПОЛНОГО РАСЧЕТА

Далее сравним результаты упрощенного расчета показателей звукоизоляции, основанные на полученных представлениях (28) и (31) упругого пористого слоя матрицами второго порядка, с результатами полного расчета, требующего построения единой матрицы многослойной системы.

В качестве первого объекта выберем двухслойную систему, состоящую из пористого волокнистого слоя толщиной 50 мм и алюминиевой пластины толщиной 1 мм. Результаты полного расчета такой системы приведены в [8].

Частотные зависимости динамической плотности ρ_f и модуля объемного сжатия K_f определялись в [8] моделями [13] и [14] соответственно. При этом значения характерных параметров при расчете ρ_f и K_f составили: пористость $\phi = 0.94$; извилистость $\alpha_\infty = 1.06$; характеристические длины $\Lambda = 56$ мкм, $\Lambda' = 56$ мкм; насыщающая среда – воздух в нормальных условиях; сопротивление продуванию – 4×10^4 Па с/м². Расчетная плотность пористого материала $\rho_s = 130$ кг/м³, динамический модуль сдвига $G_s = 2.2 \times 10^6 (1 + 0.1i)$ Па, коэффициент Пуассона $\nu_s = 0$.

Те же зависимости с теми же параметрами используются нами при расчете матрицы $[\widetilde{\mathbf{X}}^p]$ в (31). Кроме того, рассмотрен вариант использования простых эмпирических соотношений Делани–Базли [15], задающих частотные характеристики волнового сопротивления W_f и постоянной распространения γ_f , параметрически зависящие от сопротивления продуванию волокнистого пористого материала. В последнем случае динамическая плотность и модуль объемного сжатия определяются выражениями

$$K_f = i \frac{\omega}{\gamma_f} W_f, \quad \rho_f = -i \frac{\gamma_f}{\omega} W_f.$$

Передаточная матрица $[\widetilde{\mathbf{T}}]$ рассматриваемой двухслойной изоляции равна произведению

$$[\widetilde{\mathbf{T}}] = [\widetilde{\mathbf{T}}^p][\mathbf{T}^e],$$

в котором $[\widetilde{\mathbf{T}}^p]$ – передаточная матрица пористого слоя, рассчитываемая по перекрестной матрице $[\widetilde{\mathbf{X}}^p]$ из (31), а передаточная матрица пластины

$$[\mathbf{T}^e] = \begin{bmatrix} 1 & z^e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

определяется ее импедансом z^e , стандартным образом [10] зависящим от значений поверхностной плотности и изгибной жесткости пластины. При расчете матрицы $[T^e]$ приняты те же характеристики материала пластины, что и в [8]: плотность 2800 кг/м^3 , динамический модуль Юнга $7 \times 10^{10}(1 + 0.007i) \text{ Па}$, коэффициент Пуассона 0.3 .

Звукоизоляция (transmission loss coefficient) \tilde{D} , дБ, находится по компонентам матрицы $[\tilde{T}]$ посредством соотношения

$$\tilde{D} = 20 \lg \left\{ \frac{1}{2} \left[\tilde{T}_{11} + \tilde{T}_{22} + \tilde{T}_{12} \frac{\cos \theta}{\rho_0 c_0} + \tilde{T}_{21} \frac{\rho_0 c_0}{\cos \theta} \right] \right\}, \quad (33)$$

в котором θ – угол падения звуковой волны, c_0 – скорость звука в окружающей воздушной среде.

Сравнительные результаты выполненных расчетов рассматриваемой двухслойной звукоизоляции показаны на рис. 1. Частотный диапазон и форма представления результатов выбраны такими же, как на рис. 11.18 [8], где также приведены соответствующие данные полного расчета.

Сравнение кривых рис. 1 свидетельствует о том, что при использовании одинаковых моделей представления ρ_f и K_f упрощенный метод приводит практически к тем же результатам, что и полный расчет. При этом использование модели Делани–Базли весьма незначительно изменяет расчетные значения звукоизоляции.

Второй объект сравнения – трехслойная система, включающая в себя пористый слой толщиной 50 мм , ограниченный двумя упругими пластинами. Здесь расчетные параметры пористого материала составляют: плотность $\rho_s = 80 \text{ кг/м}^3$, динамический модуль сдвига $G_s = 5 \times 10^4 (1 + 0.2i) \text{ Па}$, пористость $\phi = 0.96$, сопротивление продуванию – $3 \times 10^4 \text{ Па с/м}^2$. Толщина первой по ходу распространения звука пластины равна 5 мм , второй – 1 мм . Остальные параметры пористой среды и характеристики материала пластин такие же, как в предыдущем примере.

Передачная матрица $[\tilde{T}]$ рассматриваемой трехслойной изоляции равна произведению

$$[\tilde{T}] = [T1^e][\tilde{T}^p][T2^e],$$

где $[\tilde{T}^p]$ – передачная матрица пористого слоя, рассчитываемая по матрице импедансов $[\tilde{Z}^p]$ из (28); $[T1^e]$, $[T2^e]$ – передачные матрицы соответственно первой и второй пластин, определяемые согласно формуле (32). Звукоизоляция \tilde{D} рассчитывается по соотношению (33) с заменой

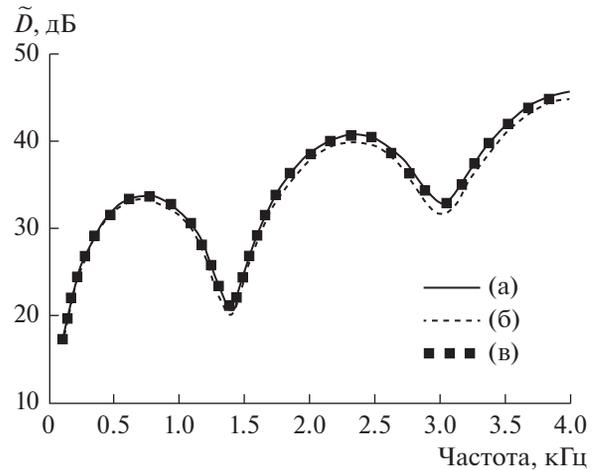


Рис. 1. Расчетная звукоизоляция системы “пористый слой–пластина”, $\theta = 0$. (а) Упрощенный расчет с заданием ρ_f и K_f по [13, 14], (б) упрощенный расчет с заданием ρ_f и K_f по [15], (в) полный расчет по [8].

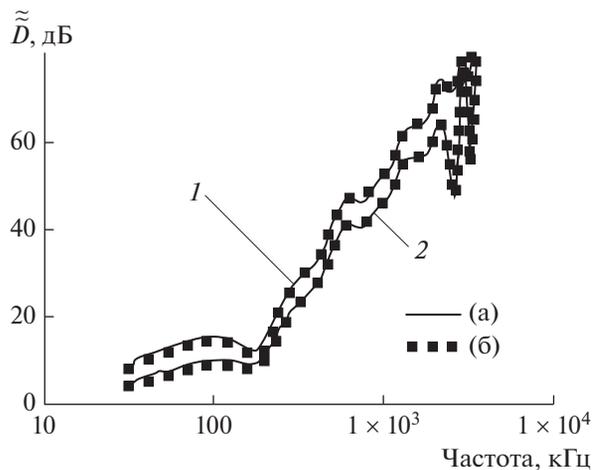


Рис. 2. Расчетная звукоизоляция системы “пластина–пористый слой–пластина”. 1 – $\theta = 60^\circ$, 2 – $\theta = 75^\circ$. (а) Упрощенный расчет, (б) полный расчет.

компонент матрицы \tilde{T} на соответствующие компоненты матрицы \tilde{T} .

Расчетные результаты оказались в данном случае практически не зависящими от выбора указанных выше моделей представления динамической плотности и модуля объемного сжатия. При этом, как свидетельствуют кривые рис. 2, результаты применения упрощенного и полного метода весьма близки при достаточно больших углах θ падения звуковой волны. Это подтверждает, в частности, приемлемость используемого в упрощенном методе представления о несущественно-

сти вклада поперечных волн в процессы звукопередачи через рассматриваемый пористый слой.

В завершение представленного анализа отметим, что предложенный приближенный подход к представлению свойств пористых волокнистых слоев применим также при решении текущих [16, 17] вопросов формулирования взаимосвязи структурных свойств звукопоглощающих покрытий с коэффициентами поглощения и отражения звука.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Материалы статьи показывают возможности и демонстрируют алгоритмы представления акустических свойств слоя волокнистого пористого материала в составе многослойной структуры передаточной матрицей линейного четырехполюсника, связывающего давления и нормальные компоненты скорости во входном и выходном сечении слоя. Специфика такого представления состоит в зависимости свойств матрицы от типа непосредственно примыкающих к нему слоев изоляции. Тем не менее, инвариантность этих свойств относительно характеристик остальных слоев структуры делает набор таких матриц достаточно универсальным инструментом, применимым при стандартном расчете многослойной звукоизоляции, все элементы которой характеризуются матрицами второго порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range, II. Higher frequency range // *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. V. 28. P. 168–191.
2. *Biot M.A., Willis D.G.* The elastic coefficients of the theory of consolidation // *J. Appl. Mech.* 1957. V. 24. P. 594–601.
3. *Князьков Н.Н., Шарфарец Б.П.* Акустика пористоупругих насыщенных жидкостью сред (обзор теории Био) // *Научное приборостроение.* 2016. Т. 26. № 1. С. 77–84.
4. *Atalla N., Panneton R., Debergue P.* A mixed displacement pressure formulation for poroelastic materials // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. V. 104. P. 1444–1452.
5. *Dazel O., Brouard B., Depollier C., Griffiths S.* An alternative Biot's displacement formulation for porous materials // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 121. P. 3509–3516.
6. *Lee J.H., Kim J.* Simplified method to solve sound transmission through structures lined with elastic porous material // *J. Acoust. Soc. Am.* 2001. V. 110. P. 2282–2294.
7. *Liu H., Finnveden S., Barbagallo M., Arteaga I.L.* Wave propagation in sandwich panels with a poroelastic core // *J. Acoust. Soc. Am.* 2014. V. 135. P. 2683–2693.
8. *Allard J.F., Atalla N.* Propagation of Sound in Porous Media: Modelling Sound Absorbing Materials. 2nd ed. Wiley, 2009. 358 p.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
10. *Кравчун П.Н.* Генерация и методы снижения шума и звуковой вибрации. М.: Изд. МГУ, 1991. 184 с.
11. *Яблоник Л.Р.* Акустический расчет многослойных теплозвукоизолирующих покрытий в присутствии соединительных элементов // *Труды ОАО "НПО ЦКТИ".* 2003. № 292. С. 104–113.
12. Звукоизоляция и звукопоглощение. Под ред. Осипова Л.Г. и Бобылева В.Н. М.: АСТ – Астрель, 2004. 450 с.
13. *Johnson D.L., Koplik J., Dashen R.* Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 176. P. 379–402.
14. *Champoux Y., Allard J.F.* Dynamic tortuosity and bulk modulus in air saturated porous media // *J. Appl. Phys.* 1991. V. 70. P. 1975–1979.
15. *Delany M.E., Bazley E.N.* Acoustical properties of fibrous absorbent materials // *Appl. Acoust.* 1970. V. 3. P. 105–116.
16. *Белоус А.А., Корольков А.И., Шанин А.В.* Экспериментальная оценка частотной зависимости коэффициента отражения звукопоглощающего материала при наклонном падении // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 2. С. 155–161.
17. *Liu Y., Liu X., Xu J., Hu X., Xia Z.* Inverse identification of the acoustic porous parameters of double-layered poroelastic structures by acoustic rigidity approximation // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 142. P. 72–83.