

---

---

**КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ  
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН**

---

---

УДК 539.3

**АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ**

© 2018 г. А. О. Ватульян<sup>а</sup>, \*, В. О. Юров<sup>а</sup>, \*\*

<sup>а</sup>Южный федеральный университет

Россия, 344006 Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая 105/42

\*e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

\*\*e-mail: vitja.jurov@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.05.2018 г.

Исследован процесс распространения волн в неоднородном по радиальной координате предварительно напряженном цилиндрическом волноводе, вызванный сосредоточенной в кольцевой области и периодической по времени радиальной нагрузкой. С помощью интегрального преобразования Фурье задача сведена к анализу операторного пучка, зависящего от двух параметров. Изучены особенности строения дисперсионного множества, на основе теории вычетов и анализа вспомогательной спектральной задачи найдены компоненты перемещения.

*Ключевые слова:* цилиндрический волновод, неоднородность, предварительные напряжения, дисперсионные соотношения, поля в дальней зоне

**DOI:** 10.1134/S0320791919010143

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи о колебаниях однородных [1] и неоднородных [2] (при наличии неоднородных характеристик и переменных предварительных напряжений) упругих волноводов достаточно давно привлекают внимание исследователей. Если задачи о свободных колебаниях сводятся к анализу дисперсионного соотношения, то построение решений в задачах о вынужденных колебаниях требует использования интегральных преобразований. Обзор методов и закономерностей распространения волн при постоянных предварительных напряжениях (ПН) достаточно подробно изложен в [3–6].

Для задач о вынужденных колебаниях однородного (в том числе преднапряженного [7]) волновода под действием локализованной поверхностной нагрузки с помощью интегрального преобразования Фурье построены интегральные представления решений, причем анализ полей в дальней относительно источника зоне осуществлен на основе учета лишь распространяющихся мод, которым отвечают вещественные корни дисперсионного уравнения [8].

В работе [9] изучено дисперсионное множество вязкоупругого предварительно напряженного волновода с использованием полуаналитического метода конечных элементов для двух типов поперечного сечения: труба и железнодорожный рельс. В качестве источника предварительных на-

пряжений в трубе принимается внутреннее давление. Представлены дисперсионные зависимости фазовых скоростей и затухания от частоты.

В работе [10] изучаются волноводы различного поперечного сечения: круглое, квадратное, двутавровый профиль. Анализ выполняется гибридным методом, совмещающим в себе методы конечных и граничных элементов, что позволяет изучать распространение волн и утечку их энергии в волноводах, погруженных во внешнюю упругую или вязкоупругую среду.

В статье [11] приводятся результаты исследований, посвященных испытаниям на прочность и устойчивость к коррозии над отрезком трубы с внутренним керамическим слоем. Найдены пределы прочности на растяжение и сдвиг.

В [12] представлена упрощенная теория, позволяющая рассчитать волновые поля в слоистой среде из чередующихся материалов.

Для волновода с произвольным законом неоднородности (функционально-градиентные волноводы, волноводы с внешним или внутренним градиентным покрытием, в том числе и при наличии предварительных напряжений) невозможно получить аналитическое представление для полей перемещений и напряжений, однако возможно анализировать дисперсионное уравнение задачи и находить его корни численно [13, 14], строить асимптотические представления в некоторых

областях изменения параметров. Знание вещественных корней дисперсионного уравнения на выбранной частоте (их количество конечно) позволяет получить решение задачи о вынужденных колебаниях под действием нагрузки в дальней зоне. Для получения решения необходимо вычислять интеграл от мероморфной функции по некоторому бесконечному контуру в комплексной плоскости, выбираемому в соответствии с условиями излучения, причем в дальней зоне на основе теории вычетов можно получить приближенное представление поля в виде суперпозиции конечного числа распространяющихся мод – для этого достаточно учета конечного числа вещественных полюсов. Главная проблема состоит в нахождении вычетов для мероморфной функции, когда эта функция не выписывается в явном виде.

В настоящей работе это осуществлено с помощью анализа некоторых вспомогательных спектральных задач и метода пристрелки [15], причем такая вычислительная схема позволяет находить вычеты как в вещественных, так и в комплексных полюсах с достаточно высокой точностью.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим осесимметричные волны в неоднородном по толщине цилиндрическом ПН-волноводе с кольцевым поперечным сечением  $a \leq r \leq b$ ,  $-\infty \leq z \leq \infty$ . Пусть внутренняя и внешняя границы волновода свободны от напряжений, а в сечении  $z = 0$  на внешней границе волновода  $r = b$  действует периодическая во времени с частотой  $\omega$  сосредоточенная нормальная нагрузка  $q_0 \delta(z) \exp(-i\omega t)$ . Будем отыскивать установившийся режим колебаний в осесимметричном случае, считая, что компоненты физических полей не зависят от  $\phi$ :

$$f(r, \phi, z, t) = f(r, z) \exp(-i\omega t), \tag{1}$$

где  $r, \phi, z$  – координаты цилиндрической системы координат,  $t$  – время.

Уравнения осесимметричных продольно-радиальных колебаний после отделения временно-го множителя для предварительно напряженного тела имеют вид [14]

$$\begin{cases} \frac{\partial t_r}{\partial r} + \frac{\partial t_{zr}}{\partial z} + \frac{t_r - t_\phi}{r} = -\rho \omega^2 u_r, \\ \frac{\partial t_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial t_z}{\partial z} + \frac{t_{rz}}{r} = -\rho \omega^2 u_z. \end{cases} \tag{2}$$

Определяющие соотношения для изотропного ПН-тела могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} t_r &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_r^0 \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ t_\phi &= \lambda \theta + 2\mu \frac{u_r}{r} + \sigma_\phi^0 \frac{u_r}{r}, \\ t_z &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \sigma_z^0 \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ t_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \sigma_r^0 \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ t_{zr} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \sigma_z^0 \frac{\partial u_r}{\partial z}, \\ \theta &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} t_r(a, z) = t_{rz}(a, z) = t_{rz}(b, z) = 0, \\ t_r(b, z) = q_0 \delta(z). \end{aligned} \tag{4}$$

В уравнениях (2), (3) использованы следующие обозначения:  $u_r, u_z$  – компоненты вектора перемещений;  $t_r, t_\phi, t_z, t_{rz}, t_{zr}$  – ненулевые компоненты добавочного тензора напряжений Пиолы [16, 17];  $\sigma_r^0(r), \sigma_\phi^0(r), \sigma_z^0(r)$  – компоненты тензора ПН, которые являются самоуравновешенными;  $\lambda = \lambda(r), \mu = \mu(r)$  – параметры Ламе, которые зависят от радиальной координаты;  $\rho(r)$  – функция изменения плотности.

Замыкает постановку задачи условие излучения на бесконечности, при формулировке которого использован принцип предельного поглощения [2].

В силу линейности задачи решение пропорционально  $q_0$ , поэтому в дальнейшем положим  $q_0 = \mu_0$ , где  $\mu_0 = (b-a)^{-1} \int_a^b \mu(r) dr$ ;  $\rho_0 = (b-a)^{-1} \times \int_a^b \rho(r) dr$ . Введем безразмерные параметры и функции по следующим формулам  $u_r = bX_1$ ,  $u_z = ibX_2$ ,  $t_r = \mu_0 X_3$ ,  $t_{rz} = i\mu_0 X_4$ ,  $\lambda = \mu_0 g_1$ ,  $\mu = \mu_0 g_2$ ,  $g_1 + 2g_2 = G_1$ ,  $\sigma_r^0 = \mu_0 S_1$ ,  $\sigma_\phi^0 = \mu_0 S_2$ ,  $\sigma_z^0 = \mu_0 S_3$ ,  $r = xb, z = yb, \xi_0 = a/b, \kappa^2 = \rho_0 \omega^2 b^2 / \mu_0$ .

Применим к краевой задаче (2)–(4) интегральное преобразование Фурье по координате  $y$ , вводя следующие трансформанты:

$$\tilde{X}_n(x, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} X_n(x, y) \exp(i\alpha y) dy, \quad n = 1 \dots 4. \tag{5}$$

Тогда относительно трансформант имеем операторный пучок с двумя  $(\kappa, \alpha)$  спектральными параметрами следующего вида:

$$\tilde{\mathbf{X}}' = (\mathbf{A}_0 - \kappa^2 \mathbf{A}_{01} + \alpha \mathbf{A}_1 + \alpha^2 \mathbf{A}_2) \tilde{\mathbf{X}}, \quad (6)$$

где  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{X}_4)$ , а штрих означает производную по координате  $x$ .

Матрицы  $\mathbf{A}_s$ , порождающие пучок, имеют четвертый порядок, их элементы  $a_{ij}^s$  зависят от координаты  $x$ . Приведем лишь их ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0: a_{11}^0 &= -\frac{g_1}{x(G_1 + S_1)}, \quad a_{13}^0 = \frac{1}{G_1 + S_1}, \\ a_{24}^0 &= \frac{1}{g_2 + S_1}, \quad a_{31}^0 = \frac{G_1 + S_2}{x^2} - \frac{g_1^2}{x^2(G_1 + S_1)}, \\ a_{33}^0 &= -\frac{2g_2 + S_1}{x(G_1 + S_1)}, \quad a_{44}^0 = -\frac{1}{x}. \\ \mathbf{A}_{01}: a_{31}^{01} &= a_{42}^{01} = p(x). \\ \mathbf{A}_1: a_{12}^1 &= -\frac{g_1}{G_1 + S_1}, \quad a_{21}^1 = \frac{g_2}{g_2 + S_1}, \\ a_{32}^1 &= \frac{g_1(2g_2 + S_1)}{x(G_1 + S_1)}, \quad a_{34}^1 = -\frac{g_2}{g_2 + S_1}, \\ a_{41}^1 &= \frac{g_1(2g_2 + S_1)}{x(G_1 + S_1)}, \quad a_{43}^1 = \frac{g_1}{G_1 + S_1}. \\ \mathbf{A}_2: a_{31}^2 &= S_3 + \frac{S_1 g_2}{g_2 + S_1}, \quad a_{42}^2 = G_1 + S_3 - \frac{g_1^2}{G_1 + S_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Будем отыскивать решение (6), удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$\tilde{X}_k(\xi_0) = 0, \quad \tilde{X}_k(1) = \delta_{3k}, \quad k = 3, 4. \quad (8)$$

Эта краевая задача всегда имеет решение для любого сочетания спектральных параметров, за исключением точек ее дисперсионного множества, которое достаточно подробно изучено для различных законов неоднородности в работе [13] на основе анализа суперпозиции решений вспомогательных задач Коши.

### 3. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для отыскания решений краевой задачи (6)–(8) с комплексным параметром  $\alpha$  и вещественным параметром  $\kappa$  при произвольном законе неоднородности используем метод пристрелки. Для этого сформируем две линейно независимые задачи Коши для определения векторов  $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}^{(2)}$ , которые являются решениями уравнения (6) при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^{(1)}(\xi_0) &= 1, \quad \tilde{X}_2^{(1)}(\xi_0) = 0, \quad \tilde{X}_3^{(1)}(\xi_0) = 0, \\ \tilde{X}_4^{(1)}(\xi_0) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^{(2)}(\xi_0) &= 0, \quad \tilde{X}_2^{(2)}(\xi_0) = 1, \quad \tilde{X}_3^{(2)}(\xi_0) = 0, \\ \tilde{X}_4^{(2)}(\xi_0) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Эти решения строятся методом Рунге–Кутты 4-го порядка и автоматически удовлетворяют условиям (8) при  $x = \xi_0$ . Отыскивая решение задачи (6), (8) в виде линейной комбинации  $\tilde{\mathbf{X}} = c_1 \tilde{\mathbf{X}}^{(1)} + c_2 \tilde{\mathbf{X}}^{(2)}$  и удовлетворяя граничным условиям на внешней границе  $x = 1$ , получим линейную алгебраическую систему

$$\begin{aligned} c_1 \tilde{X}_3^{(1)}(1) + c_2 \tilde{X}_3^{(2)}(1) &= 1, \\ c_1 \tilde{X}_4^{(1)}(1) + c_2 \tilde{X}_4^{(2)}(1) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Если определитель системы (11)  $d = \tilde{X}_3^{(1)}(1) \tilde{X}_4^{(2)}(1) - \tilde{X}_3^{(2)}(1) \tilde{X}_4^{(1)}(1) \neq 0$ , то однозначно находятся коэффициенты  $c_1, c_2$  и соответствующие трансформанты искомого решения. Если  $d = 0$ , то соответствующая пара  $(\kappa, \alpha)$  принадлежит дисперсионному множеству. Предложенный способ построения дисперсионного множества апробирован в случае постоянных характеристик материала, для которого дисперсионное уравнение строится явно через цилиндрические функции. Сравнительные результаты вычислительных экспериментов показали высокую точность предлагаемого подхода. Осуществлен анализ точек дисперсионного множества для различных видов неоднородности и вида ПН.

Остается лишь найти обратное преобразование Фурье по формуле

$$X_j(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \tilde{X}_j(x, \alpha) \exp(-i\alpha y) d\alpha, \quad (12)$$

$$j = 1, 2, 3, 4,$$

где интегрирование ведется по контуру  $\gamma$ , который совпадает с вещественной осью всюду за исключением вещественных полюсов трансформант и огибает их в соответствии с принципом предельного поглощения [2]; в регулярном случае положительные полюса огибаются снизу, а отрицательные сверху; в нерегулярном случае наименьший по модулю полюс огибается противоположным образом.

### 4. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА ОБРАЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Вычислим обратное интегральное преобразование Фурье для всех компонент волнового поля, считая, что  $y > 0$ . Подынтегральные функции  $\tilde{X}_j(x, \alpha)$  являются мероморфными, имеют особенности типа полюсов, которые определяются дисперсионным уравнением и могут быть найдены численно с помощью описанной выше схемы.

Для любого положительного  $k$  имеется конечное число вещественных и чисто мнимых полюсов, а также счетное множество комплексных полюсов. Отметим также, что при росте  $\alpha$  решение краевой задачи (6)–(8) начинает обладать погранслошной структурой, и погрешность решения, найденного методом Рунге–Кутты, растет.

Найдем (12), применяя теорию вычетов. Рассмотрим следующий контурный интеграл:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_L \tilde{X}_j(x, \alpha) \exp(-i\alpha y) d\alpha = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{L_0} \tilde{X}_j(x, \alpha) \exp(-i\alpha y) d\alpha + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{L_R} \tilde{X}_j(x, \alpha) \exp(-i\alpha y) d\alpha. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь  $L$  – замкнутый контур в комплексной плоскости параметра  $\alpha$ , состоящий из двух частей  $L = L_0 \cup L_R$ , где  $L_0$  – дуга полуокружности ( $\text{Im } \alpha \leq 0$ ) с радиусом  $R$  и центром в точке  $\alpha = 0$ ,  $L_R$  – часть контура  $\gamma$ , которая ограничена отрезком  $[-R, R]$ .

Применяя теорию вычетов для интеграла по контуру  $L$ , получим на границе волновода  $x = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_L \tilde{X}_j(x, \alpha) \exp(-i\alpha y) d\alpha = \\ & = -i \sum_{n=1}^N \text{Выч}(\tilde{X}_j(1, \alpha_n) \exp(-i\alpha_n y)), \quad j = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \tag{14}$$

где  $\alpha_n$  – полюса первого порядка, находящиеся внутри контура  $L$ , а  $N$  – их количество.

В соответствии с леммой Жордана при  $R \rightarrow \infty$  интеграл по контуру  $L_0$  стремится к нулю, интеграл по  $L_R$  стремится к интегралу (12) по контуру  $\gamma$ ,  $N \rightarrow \infty$ . Следовательно, интеграл по контуру  $L$  также стремится к интегралу по контуру  $\gamma$ . Таким образом, в соответствии с (14) в регулярном случае необходимо просуммировать вычеты по всем отрицательным вещественным полюсам и по всем комплексным полюсам с отрицательной мнимой частью.

Для нахождения вычета в полюсе  $\alpha_n$  используем следующую схему. Представим трансформанту вектора решения на внешней границе  $\tilde{X}_j(1, \alpha)$  в виде разложения в ряд Лорана в окрестности простого полюса  $\alpha_n$ . С этой целью представим систему (11) в матричном виде:

$$\mathbf{B}(1, \alpha) \mathbf{C}(\alpha) = \mathbf{F}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \text{где } \mathbf{B}(1, \alpha) &= \begin{pmatrix} \tilde{X}_3^{(1)}(1, \alpha) & \tilde{X}_3^{(2)}(1, \alpha) \\ \tilde{X}_4^{(1)}(1, \alpha) & \tilde{X}_4^{(2)}(1, \alpha) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(\alpha) = \\ &= \begin{pmatrix} c_1(\alpha) \\ c_2(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Выполним разложение вектор-функции  $\mathbf{C}(\alpha)$  и матричной-функции  $\mathbf{B}(1, \alpha)$  в ряд Лорана в окрестности полюса  $\alpha_n$ :

$$\mathbf{C}(\alpha) = \mathbf{C}_{-1} \frac{1}{\alpha - \alpha_n} + \mathbf{C}_0 + \dots, \tag{16}$$

$$\mathbf{B}(1, \alpha) = \mathbf{B}_0(1, \alpha_n) + \mathbf{B}_1(1, \alpha_n)(\alpha - \alpha_n) + \dots,$$

$$\text{где } \mathbf{B}_1(1, \alpha_n) = \left. \frac{\partial \mathbf{B}(1, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_n}.$$

В соответствии с введенными разложениями решение задачи (6)–(8) можно также представить в виде ряда Лорана. Коэффициент ряда Лорана при  $(\alpha - \alpha_n)^{-1}$ :  $[c_{-1}^1 \tilde{X}_j^{(1)}(1, \alpha_n) + c_{-1}^2 \tilde{X}_j^{(2)}(1, \alpha_n)]$  определяет вычет в полюсе первого порядка и позволяет перейти от (14) к следующей формуле:

$$\begin{aligned} X_j(1, y) &= -i \sum_{n=1}^{\infty} [c_{-1}^1(\alpha_n) \tilde{X}_j^{(1)}(1, \alpha_n) + \\ &+ c_{-1}^2(\alpha_n) \tilde{X}_j^{(2)}(1, \alpha_n)] \exp(-i\alpha_n y), \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{17}$$

Для нахождения коэффициентов  $c_{-1}^1(\alpha_n)$  и  $c_{-1}^2(\alpha_n)$ , используемых в (17), воспользуемся представлениями (15), (16) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях разложения аналогично [15]:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_0(1, \alpha_n) \mathbf{C}_{-1} = 0, \\ \mathbf{B}_0(1, \alpha_n) \mathbf{C}_0 + \mathbf{B}_1(1, \alpha_n) \mathbf{C}_{-1} = \mathbf{F}. \end{cases} \tag{18}$$

Для нахождения неизвестных компонент матрицы  $\mathbf{B}_1(1, \alpha_n)$  сформируем две вспомогательные линейно независимые задачи Коши:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{X}}' = (\mathbf{A}_0 - \kappa^2 \mathbf{A}_{01} + \alpha \mathbf{A}_1 + \alpha^2 \mathbf{A}_2) \tilde{\mathbf{X}}, \\ \mathbf{W}' = (\mathbf{A}_0 - \kappa^2 \mathbf{A}_{01} + \alpha \mathbf{A}_1 + \alpha^2 \mathbf{A}_2) \mathbf{W} + \\ + (\mathbf{A}_1 + 2\alpha \mathbf{A}_2) \tilde{\mathbf{X}}, \end{cases} \tag{19}$$

$$\text{где } \mathbf{W} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}}{\partial \alpha};$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^{(1)}(\xi_0) &= 1, \quad \tilde{X}_2^{(1)}(\xi_0) = 0, \quad \tilde{X}_3^{(1)}(\xi_0) = \\ &= \tilde{X}_4^{(1)}(\xi_0) = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

$$W_1^{(1)}(\xi_0) = W_2^{(1)}(\xi_0) = W_3^{(1)}(\xi_0) = W_4^{(1)}(\xi_0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^{(2)}(\xi_0) = 0, \quad \tilde{X}_2^{(2)}(\xi_0) = 1, \\ \tilde{X}_3^{(2)}(\xi_0) = \tilde{X}_4^{(2)}(\xi_0) = 0, \\ W_1^{(2)}(\xi_0) = W_2^{(2)}(\xi_0) = W_3^{(2)}(\xi_0) = W_4^{(2)}(\xi_0) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Введем в рассмотрение вектор-функции  $Z^{(j)} = (\tilde{X}_1^{(j)}, \tilde{X}_2^{(j)}, \tilde{X}_3^{(j)}, \tilde{X}_4^{(j)}, W_1^{(j)}, W_2^{(j)}, W_3^{(j)}, W_4^{(j)})$ ,  $j = 1, 2$ , которые являются решениями задач (19)–(20) и (19)–(21), а элементы искомой матрицы строятся следующим образом:

$$\mathbf{B}_1(1, \alpha_n) = \begin{pmatrix} W_3^{(1)}(1, \alpha_n) & W_3^{(2)}(1, \alpha_n) \\ W_4^{(1)}(1, \alpha_n) & W_4^{(2)}(1, \alpha_n) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что вектора  $Z^{(1)}(\xi_0)$  и  $Z^{(2)}(\xi_0)$  ортогональны; в силу известных свойств решений задач Коши для систем линейных дифференциальных уравнений  $Z^{(1)}(1)$  и  $Z^{(2)}(1)$  линейно независимы. В силу этого свойства определитель  $\mathbf{B}_1(1, \alpha_n)$  не равен нулю. Найдем  $c_{-1}^1(\alpha_n)$  и  $c_{-1}^2(\alpha_n)$  с точностью до постоянного множителя из первого уравнения системы (18). Это уравнение является однородным и определяет собственный вектор вида:  $\mathbf{C}_{-1} = q\mathbf{M}_0$ , где  $\mathbf{M}_0$  – единичный собственный вектор матрицы  $\mathbf{B}_0(1, \alpha_n)$ . Подставим это решение во второе уравнение и найдем константу  $q$ . Для этого умножим второе уравнение из (18) на вектор  $\bar{\mathbf{M}}_0$ , который является собственным вектором сопряженной матрицы  $\bar{\mathbf{B}}_0(1, \alpha_n)$ :

$$(\mathbf{B}_0\mathbf{C}_0, \bar{\mathbf{M}}_0) + q(\mathbf{B}_1\mathbf{M}_0, \bar{\mathbf{M}}_0) = (\mathbf{F}, \bar{\mathbf{M}}_0). \quad (22)$$

Первое слагаемое в левой части (22) по свойству собственного вектора обращается в нуль и для неизвестного коэффициента имеем

$$q = (\mathbf{F}, \bar{\mathbf{M}}_0) / (\mathbf{B}_1\mathbf{M}_0, \bar{\mathbf{M}}_0).$$

При этом знаменатель в последней формуле отличен от нуля в силу невырожденности матрицы  $\mathbf{B}_1(1, \alpha_n)$ .

Для получения решения, обладающего высокой точностью в дальней зоне, достаточно в бесконечном ряде (17) ограничиться вычетами по вещественным полюсам. Чтобы решение (17) описывало поле перемещений в ближней зоне, необходимо учитывать вычеты в комплексных полюсах, причем чем дальше полюс находится от вещественной прямой на плоскости комплексного  $\alpha$ , тем сильнее затухает решение, и его вклад значим лишь в малой окрестности начала координат.

### 5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В работе [14] проведено исследование возмущений точек дисперсионного множества, вызванных действием полей предварительных на-

пряжений двух типов (раздувание внутренним давлением и предварительное растяжение–сжатие), которое показало, что предварительное растяжение–сжатие не оказывает влияния на положение точек радиальных резонансов (значения  $\kappa$ , при которых существует нулевой полюс), так как задача (6)–(8) при  $\alpha = 0$  не содержит компоненты  $S_3$  и при этом разделяется на две подзадачи. Одна из них зависит только от  $S_1$ , другая – от  $S_1$  и  $S_2$ .

Для нахождения компонент тензора ПН, отвечающих раздуванию неоднородного цилиндра внутренним давлением (задача Ламе) требуется найти решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} S_1' = \frac{4g_2(g_1 + g_2)}{x^2(g_1 + 2g_2)}U - \frac{2g_2}{x(g_1 + 2g_2)}S_1, \\ U' = \frac{1}{g_1 + 2g_2}S_1 - \frac{g_1}{x(g_1 + 2g_2)}U, \\ S_1(\xi_0) = -\varepsilon, \quad S_1(1) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где компоненты тензора ПН, не вошедшие в (23), вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{g_1}{g_1 + 2g_2}S_1 + \frac{4g_2(g_1 + g_2)}{x(g_1 + 2g_2)}U, \\ S_3 &= \frac{g_1}{g_1 + 2g_2}S_1 + \frac{2g_1g_2}{x(g_1 + 2g_2)}U. \end{aligned}$$

Для однородного полого цилиндра ненулевые компоненты тензора ПН имеют вид [14]

$$\begin{aligned} S_1 &= \tilde{\varepsilon}(1 - x^{-2}), \quad S_2 = \tilde{\varepsilon}(1 + x^{-2}), \\ S_3 &= \tilde{\varepsilon}g_1(g_1 + g_2)^{-1}, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon\xi_0^2(1 - \xi_0^2)^{-1}, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon$  – интенсивность ПН, которая обычно лежит в интервале  $|\varepsilon| \in [10^{-5}, 10^{-3}]$ , причем далее при расчетах принято  $\varepsilon = 10^{-3}$ . В случае неоднородного цилиндра задача Ламе решается численно методом пристрелки.

При наличии предварительного растяжения цилиндра тензор ПН имеет единственную ненулевую компоненту  $S_3 = \varepsilon$ .

Определенный интерес среди функционально-градиентных волноводов представляют трубопроводы с внутренним керамическим слоем, нанесенным с помощью реакции самораспространяющегося высокотемпературного синтеза [11, 18]. Их особенность заключается в том, что толщина покрытия может превышать толщину металлической трубы, а также в наличии третьего промежуточного слоя, образующегося в результате технологического процесса.

В рамках описанной выше схемы исследованы два закона неоднородности, моделирующие двухслойный цилиндр с четкой границей слоев и с гладким градиентным переходом характеристик материалов.

Таблица 1.  $\kappa = 15.898$ , второй тип неоднородности

| Без ПН                | $G_1(\alpha_n)$ | $G_2(\alpha_n)$ | с ПН                  | $G_1(\alpha_n)$ | $G_2(\alpha_n)$ |
|-----------------------|-----------------|-----------------|-----------------------|-----------------|-----------------|
| $\alpha_1 = -19.4037$ | 0.25365         | -0.12938        | $\alpha_1 = -19.395$  | 0.2534          | -0.12925        |
| $\alpha_2 = -10.5303$ | 0.08447         | 0.07552         | $\alpha_2 = -10.5293$ | 0.08451         | 0.07515         |
| $\alpha_3 = -6.2346$  | 0.01816         | 0.04755         | $\alpha_3 = -6.2356$  | 0.01816         | 0.04753         |

$$\begin{aligned} \text{Неоднородность 1: } g_2(x) &= b_1 \begin{cases} g_{21}, & \xi_0 \leq x \leq \xi_1, \\ g_{22}, & \xi_1 < x \leq 1, \end{cases} \quad p(x) = b_2 \begin{cases} p_1, & \xi_0 \leq x \leq \xi_1, \\ p_2, & \xi_1 < x \leq 1; \end{cases} \\ \text{неоднородность 2: } g_2(x) &= b_1 \begin{cases} g_{21}, & \xi_0 \leq x \leq \xi_1, \\ g_{23}, & \xi_1 < x \leq \xi_1 + h, \\ g_{22}, & \xi_1 + h < x \leq 1, \end{cases} \quad p(x) = b_2 \begin{cases} p_1, & \xi_0 \leq x \leq \xi_1, \\ p_3, & \xi_1 < x \leq \xi_1 + h, \\ p_2, & \xi_1 + h < x \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

где введены следующие вспомогательные функции:

$$\begin{aligned} K(t) &= t - \sin(t) \cos(t), \quad g_{23} = g_{21} + (g_{22} - g_{21}) \times \\ &\quad \times K((x - \xi_1)h^{-1})\pi^{-1}, \\ p_3 &= p_1 + (p_2 - p_1)K((x - \xi_1)h^{-1})\pi^{-1}, \end{aligned}$$

которые обеспечивают достаточную гладкость сопряжения функций неоднородности второго набора (функции  $g_2(x)$ ,  $p(x)$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми).

Параметры  $b_j$  выбираются из условий  $\int_{\xi_0}^1 g_2(x) dx = 1 - \xi_0$ ,  $\int_{\xi_0}^1 p(x) dx = 1 - \xi_0$ , примененных для первого типа неоднородности. Для второго типа выбираются такие же значения параметров, что приводит к получению законов неоднородности, отличающихся только в области промежуточного слоя с безразмерной толщиной  $h$ .

Геометрические размеры и параметры материала подобраны для описания металлической трубы с толстым внутренним керамическим покрытием  $\xi_0 = 0.75$ ,  $\xi_1 = 0.9$ ,  $h = 0.04$ . Выбран постоянный коэффициент Пуассона  $\nu = 1/4$ , при котором  $g_1(x) = g_2(x)$ . Расчеты производились для следующих значений параметров:  $\rho_1 = 2900$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu_1 = 40$  ГПа и  $\rho_2 = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu_2 = 80$  ГПа, которым соответствуют безразмерные значения параметров  $g_{21} = 4$ ,  $p_1 = 2.9$ ,  $g_{22} = 8$ ,  $p_2 = 7.8$ .

Воспользуемся формулой (17) для получения решений  $X_1(1, y)$  и  $X_2(1, y)$ . Введем обозначение для вычета  $G_j(\alpha_n) = c_{-1}^1(\alpha_n) \tilde{X}_j^{(1)}(x, \alpha_n) + c_{-1}^2(\alpha_n) \tilde{X}_j^{(2)}(x, \alpha_n)$ ,  $j = 1, 2$ .

Проведена серия расчетов для различных соотношений между параметрами задачи, которая показала, что на частотах, отличных от значений радиальных резонансов, дисперсионное множе-

ство и волновые поля при наличии и отсутствии ПН отличаются на величину, значение которой не превосходит порядка интенсивности ПН  $\epsilon$ , что соответствует результатам, представленным в [6] для скоростей в бесконечной ПН-среде. Расчеты, проведенные в окрестности частот радиальных резонансов для ПН, соответствующих растяжению, показали также небольшое изменение значений полюсов и вычетов в них.

В табл. 1 приведены компоненты решения в регулярном случае (случай интегрирования по полюсам, взятым в областях нормальной дисперсии) для ПН, отвечающих раздуванию. Значение  $\kappa = 15.898$  равноудалено от двух ближайших частот радиальных резонансов. Содержание таблицы иллюстрирует малое отличие полюсов и вычетов в них, однако с ростом продольной координаты разность этих решений изменяется с определенной периодичностью, что связано с разным периодом их колебаний и делает возможным оценку ПН.

На рис. 1 изображена область дисперсионного множества между третьим и четвертым радиальными резонансами, здесь же изображены два варианта выбора вещественных полюсов (в регулярном и нерегулярном случаях).

Проанализируем решение исследуемой задачи при значениях  $\kappa$ , близких к радиальным резонансам для случаев наличия и отсутствия ПН-раздувания с целью обнаружения околорезонансных эффектов.

Найдены частоты радиальных резонансов для волновода без ПН и с ПН (всюду далее – раздувание) для неоднородности второго типа:

$$\begin{aligned} \kappa &= 11.6488 \text{ без ПН, } \kappa = 11.6459 \text{ с ПН,} \\ \kappa &= 20.1494 \text{ без ПН, } \kappa = 20.1479 \text{ с ПН.} \end{aligned}$$

Выполним расчеты на промежуточных частотах, чтобы при отсутствии ПН находиться в области до третьего резонанса, а при наличии ПН – в области после третьего резонанса. Таким обра-

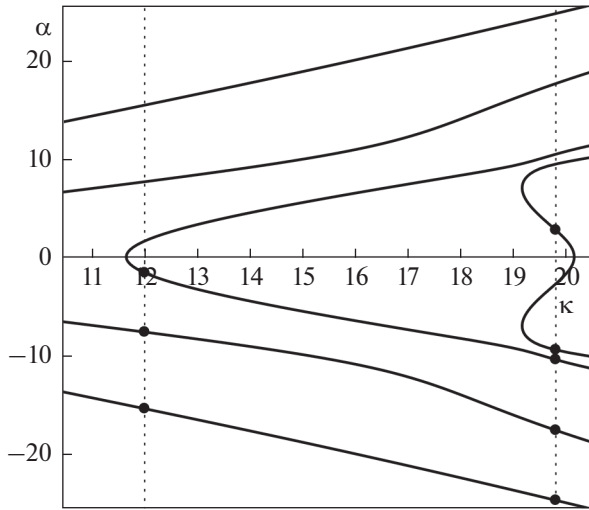


Рис. 1. Вещественная часть дисперсионного множества.

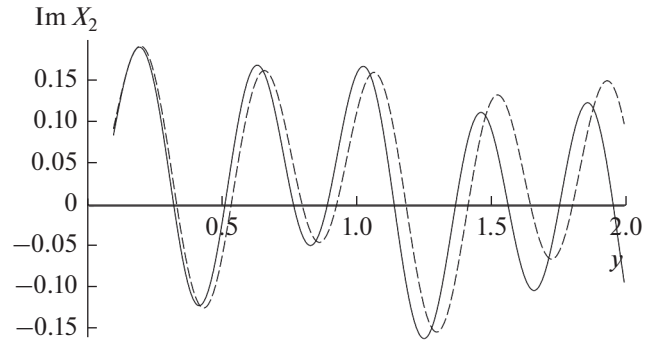


Рис. 2. Сравнение двух типов неоднородности.

зом, для неоднородности второго типа проведем вычисления при  $\kappa = 11.6473$  и  $20.1486$  (при отсутствии ПН – нерегулярный случай).

В табл. 2 и 3 представлены расчеты для регулярного и нерегулярного случаев. Главным образом, различие решений задач с ПН и без ПН определяется разным количеством вещественных полюсов (пять вещественных или четыре вещественных и один чисто мнимый). Первый столбец табл. 3, как и рис. 1, иллюстрирует иной способ обхода полюсов в нерегулярной ситуации.

На рис. 2 изображено перемещение  $\text{Im } X_2(y)$  при отсутствии ПН для первого (сплошная линия) и второго (пунктирная линия) типов неоднородности, посчитанное на частоте  $\kappa = 11.5$ , которая равноудалена от частот третьих радиальных

резонансов обоих типов неоднородности. Наблюдается существенное различие в решениях, вызванное заметным различием полюсов и вычетов в них.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе разработан численный метод, позволяющий находить поля перемещений в дальней от источника колебаний зоне для волновода с радиальной неоднородностью и ПН. В ходе проведения вычислительных экспериментов выявлено, что неоднородность материала сильнее влияет на дисперсионное множество, чем наличие поля ПН (порядок отношения компонент ПН к упругим модулям равен  $\epsilon$ ). Кроме того, установлено, что в частотных областях, близких к радиальным резонансам, и на границах областей нормальной и аномальной дисперсии проявляется повышенная чувствительность к наличию или отсутствию ПН. Поэтому для практического поиска наличия ПН и оценки его порядка рекомендуется регистрация волновых полей в этих областях. При переходе

Таблица 2.  $\kappa = 11.6473$ , второй тип неоднородности

| Без ПН                | $G_1(\alpha_n)$ | $G_2(\alpha_n)$ | с ПН                  | $G_1(\alpha_n)$ | $G_2(\alpha_n)$ |
|-----------------------|-----------------|-----------------|-----------------------|-----------------|-----------------|
| $\alpha_1 = -0.1004i$ | $-0.0007i$      | $-0.07791$      | $\alpha_1 = -0.0979$  | $-0.00068$      | $-0.07789$      |
| $\alpha_2 = -7.213$   | $-0.01729$      | $-0.04972$      | $\alpha_2 = -7.2121$  | $-0.01729$      | $-0.04972$      |
| $\alpha_3 = -14.6619$ | $-0.24554$      | $0.12529$       | $\alpha_3 = -14.6555$ | $-0.24534$      | $0.12519$       |

Таблица 3.  $\kappa = 20.1486$ , второй тип неоднородности

| Без ПН                | $G_1(\alpha_n)$ | $G_2(\alpha_n)$ | с ПН                  | $G_1(\alpha_n)$ | $G_2(\alpha_n)$ |
|-----------------------|-----------------|-----------------|-----------------------|-----------------|-----------------|
| $\alpha_1 = -24.5618$ | $-0.28112$      | $0.14577$       | $\alpha_1 = -24.55$   | $-0.28086$      | $0.14563$       |
| $\alpha_2 = -17.7941$ | $-0.12838$      | $0.02628$       | $\alpha_2 = -17.7903$ | $-0.12833$      | $0.02628$       |
| $\alpha_3 = -10.6597$ | $-0.01650$      | $0.07032$       | $\alpha_3 = -10.6601$ | $-0.01645$      | $0.07018$       |
| $\alpha_4 = -9.576$   | $-0.07219$      | $0.00117$       | $\alpha_4 = -9.5765$  | $-0.07203$      | $0.00109$       |
| $\alpha_5 = 0.1165$   | $-10.5895$      | $-0.16661$      | $\alpha_5 = -0.1104i$ | $-11.14116i$    | $-0.16636$      |

через частоты радиальных резонансов меняется структура функций перемещения границ, которая связана с превращением чисто мнимого полюса в вещественный и наоборот в зависимости от частоты, а в нерегулярном случае изменяется и его знак. Отметим, что в расчетах учитывались вещественные и мнимые полюсы, а комплексные полюсы не учитывались в силу их малого вклада в поле смещений в дальней зоне. Также отметим, что неучет вклада чисто мнимых полюсов приводит к значительной погрешности построения решения в случае близости соответствующего  $\alpha_n$  к началу координат.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 18-11-00069).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. М.: Наука, 1981. 282 с.
2. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустоупругость. Киев: Наукова думка, 1977. 162 с.
4. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А. С. К., 2004. 672 с.
5. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. М.: Наука, 2009. 280 с.
6. Никитина Н.Е. Акустоупругость. Опыт практического применения. Н. Новгород: ТАЛАН, 2005. 208 с.
7. Калинин В.В., Полякова И.Б. О возбуждении преднапряженного цилиндра // ПММ. 1981. Т. 45. № 2. С. 384–389.
8. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
9. Mazzotti M., Marzani A., Bartoli I., Viola E. Guided waves dispersion analysis for prestressed viscoelastic waveguides by means of the SAFE method // Intern. J. Solids & Struct. 2012. № 49. P. 2359–2372.
10. Mazzotti M., Marzani A., Bartoli I., Viola E. A coupled SAFE-2.5D BEM approach for the dispersion analysis of damped leaky guided waves in embedded waveguides of arbitrary cross-section // Ultrasonics. 2013. № 53. P. 1227–1241.
11. Jian An, Xiaohan Yan, Xiaoxia Lv, Zi Wen. Microstructure, mechanical properties and corrosion of ceramic-lined composite steel pipe prepared by centrifugal-SHS process // Science of Sintering. 2017. № 49. P. 359–372.
12. Mercer B., Mandadapu K.K., Papadopoulos P. Homogenization of high-frequency wave propagation in linearly elastic layered media using a continuum Irving–Kirkwood theory // Intern. J. Solids & Struct. 2016. P. 1–11.
13. Ватульян А.О., Моргунова А.В. Исследование дисперсионных свойств цилиндрических волноводов с переменными свойствами // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 3. С. 295–301.
14. Ватульян А.О., Юров В.О. Волновые процессы в полой цилиндрической среде с неоднородными предварительными напряжениями // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 4. С. 182–191.
15. Gusakov D., Vatul'yan A. Dispersion properties of inhomogeneous poroelastic layer // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2018. V. 98. № 4. P. 532–541.
16. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. 206 с.
17. Trefftz E. Zur theorie der stabilität des elastischen gleichgewichts // ZAMM. 1933. V. 12. № 2. P. 160–165.
18. Садыков Р.А., Потапов В.И., Ермоленко А.А., Трофимов Е.А. Теплофизическое моделирование процесса нанесения внутритрубного покрытия методом центробежного СВС // Вестник ЮУрГУ. Серия “Металлургия”. 2013. Т. 13. № 2 С. 85–89.