

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ  
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3:534.1

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВОЛН ПОХГАММЕРА–КРИ:  
АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ МОДЫ

© 2018 г. С. В. Кузнецов<sup>а, \*</sup>, А. В. Ильяшенко<sup>а, б, \*\*</sup>

<sup>а</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлунского РАН  
Россия, 119526 Москва, пр. Вернадского 101, корп. 1а

<sup>б</sup>Московский Государственный Строительный Университет  
Россия, 129337 Москва, Ярославское ш. 26

\*e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

\*\*e-mail: avi\_56@mail.ru

Поступила в редакцию 11.09.2017 г.

Анализируются точные решения уравнения Похгаммера–Кри, описывающего распространение гармонических волн в упругом цилиндрическом стержне. Для продольных аксиально симметричных мод впервые проведен спектральный анализ матрицы дисперсионного уравнения. Получены аналитические выражения для поляризации волн. На поверхности стержня для фундаментальной продольной аксиально симметричной моды определены коэффициенты поляризации соответствующих волн и проведен анализ вариации этих коэффициентов в зависимости от частоты. Обнаружено, что при фазовой скорости фундаментальной аксиально симметричной продольной моды, совпадающей со скоростью поперечной волны, происходит одновременное обращение в нуль всех компонент перемещений на боковой поверхности стержня, что представляется исключительно важным для проектирования акустических волноводов.

*Ключевые слова:* волны Похгаммера–Кри, поляризация, дисперсия, спектральный анализ

**DOI:** 10.1134/S0320791918060084

1. ВВЕДЕНИЕ

Впервые дисперсионные уравнения, описывающие распространение гармонических волн в цилиндрическом стержне, называемых волнами Похгаммера–Кри, получены в [1, 2]. Однако решения этих уравнений, связывающие фазовую (или групповую) скорость с частотой, оставались практически неизученными вплоть до середины прошлого века, когда с помощью численного анализа дисперсионных уравнений были найдены первые ветви дисперсионных кривых [3, 4]. Надо отметить, что в [3, 4] исследовались продольные аксиально симметричные моды, тогда как в [5–8] рассматривались также изгибные и крутильные моды.

С помощью асимптотических методов в [3, 4] были найдены длинноволновой и коротковолновой пределы для фазовой скорости фундаментальной продольной аксиально симметричной моды. При этом коротковолновой предел ( $c_{1,\text{lim}}$ ) фазовой скорости при  $\omega \rightarrow \infty$

$$c_{1,\text{lim}} = c_R \tag{1}$$

совпал со скоростью волны Рэлея  $c_R$ , а длинноволновой предел при  $\omega \rightarrow 0$  дал следующее значение фазовой скорости  $c_{2,\text{lim}}$ :

$$c_{2,\text{lim}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{2}$$

где  $E$  – модуль упругости, а  $\rho$  – плотность материала стержня. В [3] для скорости  $c_{2,\text{lim}}$  предложено наименование “стержневая” скорость.

Помимо собственно дисперсионных кривых в [4] численно исследовалось распределение по сечению стержня амплитуд компонент перемещений для первых трех продольных аксиально симметричных мод.

Одна из интересных особенностей дисперсионных кривых незатухающих высших продольных мод волн Похгаммера–Кри ( $L(0, m)$ ,  $m > 1$ ) появляется при переходе к пределу по волновому числу  $\gamma$  в выражении

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} = 0. \tag{3}$$

Фактически, условие (3) означает наличие в высших модах горизонтальной асимптоты в диспер-

сионной зависимости  $\omega(\gamma)$  при стремлении волнового числа  $\gamma$  к нулю, или фазовой скорости  $c \rightarrow \infty$  (при конечной частоте). Здесь обнаруживается связь с незатухающими высшими модами соответствующих дисперсионных кривых волн Лэмба и Лява [9, 10], для которых также выполняется соотношение (3).

Интересные обобщения продольных аксиально симметричных мод волн Похгаммера–Кри на случай нецелых значений коэффициентов при угловой координате в потенциалах, с помощью которых строятся решения волнового уравнения, описаны в работах [11–13]. Эти решения отвечают спиральным волнам Похгаммера–Кри.

В [14–16] рассматривались вопросы применения волн Похгаммера–Кри в неразрушающей диагностике как в микро и наномасштабах [14, 15], так и при исследовании геологических образцов [16]. В исследованиях [17–22] рассмотрены приложения к определению дефектов в трубах с помощью регистрации отраженных от дефектов сигналов, а также с помощью анализа затухания сигналов за счет рассеяния волн на распределенных дефектах (в том числе коррозионных). В [23] дано описание численного метода для решения задач идентификации дефектов с помощью анализа дисперсии, возникающей при распространении ангармонических импульсов. В [24, 25] в задачах неразрушающей диагностики наряду с продольными волнами Похгаммера–Кри исследовались крутильные волны, в [26] рассматривались вопросы построения акустического тракта волноводного метода контроля с использованием многократных отражений, в [27] исследовалось распространение продольных волн в упруго анизотропных (цилиндрически анизотропных) стержнях.

Ниже с помощью спектрального анализа матричного дисперсионного уравнения построено поле смещений для продольных аксиально симметричных волн Похгаммера–Кри. Впервые определены соотношения между коэффициентами, входящими в компоненты поля смещений, – это позволило исследовать вариацию компонент смещений в зависимости от изменения коэффициента Пуассона и фазовой скорости. Доказано, что для продольной фундаментальной моды матрица дисперсионного уравнения полупростая, с однократным вырождением при любых допустимых значениях коэффициента Пуассона и любой частоте  $0 \leq \omega < \infty$ . Обнаружено, что в окрестности фазовой скорости, совпадающей со скоростью поперечной объемной волны, происходит одновременное обращение в нуль всех компонент перемещений на боковой поверхности стержня.

Надо отметить, что теоретические исследования по волнам Похгаммера–Кри в основном посвящены исследованию дисперсионных соотно-

шений. Анализ детальных полей смещений посвящено лишь несколько работ (см. [3, 4]), в которых компоненты поля перемещений определены при некоторых значениях фазовой скорости (или некоторых значениях круговой частоты). В этой связи настоящая работа восполняет известный пробел – ниже получены аналитические выражения для амплитуд перемещений и проведены исследования вариации амплитуд перемещений в зависимости от изменения фазовой скорости.

## 2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Уравнения движения для изотропного упругого тела в отсутствии массовых сил представимы в виде

$$c_1^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{u}$  – поле перемещений,  $c_1, c_2$  – скорости продольной и поперечной объемных волн в среде, причем

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (5)$$

В (5)  $\lambda, \mu$  – константы Ламе,  $\rho$  – плотность среды.

Далее для векторного поля  $\mathbf{u}$  применяется представление Гельмгольца

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi + \operatorname{rot} \Psi, \quad (6)$$

где  $\Phi$  и  $\Psi$  соответственно скалярный и векторный потенциалы. Для гармонической волны, распространяющейся в направлении оси стержня  $z$ , потенциалы (6) представимы в виде

$$\Phi = \Phi_0(\mathbf{x}') e^{i\gamma(z-ct)}, \quad \Psi = \Psi_0(\mathbf{x}') e^{i\gamma(z-ct)}, \quad (7)$$

где  $\gamma$  – волновое число, связанное с фазовой скоростью  $c$  и круговой частотой  $\omega$  соотношением

$$\gamma = \frac{\omega}{c}. \quad (8)$$

В (7)  $\mathbf{x}'$  – координата в поперечном сечении ( $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n}$ ),  $\mathbf{n}$  – волновой вектор,  $z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$ ,  $t$  – время.

Векторное поле, отвечающее распространению продольной аксиально симметричной гармонической незатухающей волны в цилиндрическом стержне, представимо в виде [4]

$$\begin{aligned} u_r &= -[q_1(C_1 J_1(q_1 r) + C_2 Y_1(q_1 r)) + \\ &+ i\gamma(C_3 J_1(q_2 r) + C_4 Y_1(q_2 r))] e^{i\gamma(z-ct)}, \\ u_\theta &= 0, \quad u_z = [i\gamma(C_1 J_0(q_1 r) + C_2 Y_0(q_1 r)) + \\ &+ q_2(C_3 J_0(q_2 r) + C_4 Y_0(q_2 r))] e^{i\gamma(z-ct)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$q_k^2 = \left( \frac{c^2}{c_k^2} - 1 \right) \gamma^2, \quad k = 1, 2. \quad (10)$$

С учетом необходимой ограниченности поля перемещений на оси  $r = 0$  и неограниченности при  $r \rightarrow 0$  бесселевых функций второго рода из (9) следует [4]

$$\begin{aligned} u_r &= -[q_1 C_1 J_1(q_1 r) + i\gamma C_2 J_1(q_2 r)] e^{i\gamma(z-cr)}, \\ u_\theta &= 0, \\ u_z &= [i\gamma C_1 J_0(q_1 r) + q_2 C_2 J_0(q_2 r)] e^{i\gamma(z-cr)}. \end{aligned} \quad (11)$$

При получении (11) из (9) константа  $C_3$  обозначена как  $C_2$ .

Выражения (11) показывают, что на оси стержня при  $r = 0$  выполняется естественное условие  $u_r = 0$ , поскольку  $J_1(0) = 0$ . В то же время, поскольку  $J_0(0) = 1$ , компонента  $u_z$  при  $r = 0$  принимает вид

$$u_z = [i\gamma C_1 + q_2 C_2] e^{i\gamma(z-cr)}. \quad (12)$$

Выражение (12) показывает, что для обращения в нуль компоненты  $u_z$  при  $r = 0$  необходимо выполнение соотношения

$$i\gamma C_1 = -q_2 C_2. \quad (13)$$

Далее будет показано, что соотношение (13) выполняется, в частности, в том случае, когда фазовая скорость волны  $c$  совпадает со скоростью  $c_2$ , а матрица дисперсионного уравнения простая.

### 3. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Условие равенства нулю поверхностных усилий на боковой поверхности цилиндра при  $r = R$  представимо в виде

$$\mathbf{t}_v \equiv (\lambda(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{v} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{v})|_{r=R} = 0, \quad (14)$$

где  $\mathbf{v}$  – вектор единичной внешней нормали к боковой поверхности.

Подстановка поля перемещений (11) в условия (14) позволяет записать искомое дисперсионное уравнение, записываемое в виде

$$\det \mathbf{A} = 0, \quad (15)$$

где  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица второго порядка с комплексными коэффициентами

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\left( (q_1^2 + \gamma^2) \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2\gamma^2 \right) J_0(q_1 R) + \frac{2q_1}{R} J_1(q_1 R), \\ A_{12} &= -\frac{2i\gamma}{R} (q_2 R J_0(q_2 R) - J_1(q_2 R)), \\ A_{21} &= -2i\gamma q_1 J_1(q_1 R), \quad A_{22} = -(q_2^2 - \gamma^2) J_1(q_2 R). \end{aligned} \quad (16)$$

Двумерные и, вообще говоря, комплексные собственные векторы, отвечающие нулевым собственным числам матрицы (15), определяют поляризацию соответствующих волн.

Надо отметить, что дисперсионное уравнение (15) может иметь как действительные, так и мнимые и комплексные корни [6]. Действительным корням отвечают распространяющиеся моды (незатухающие в направлении оси  $z$ ) с действительной фазовой скоростью, а мнимым и комплексным корням соответствуют нераспространяющиеся моды, затухающие в направлении оси  $z$ . Решения, отвечающие нераспространяющимся модам, необходимы для удовлетворения граничных условий на торцах стержня при решении краевой задачи для ограниченного или полуограниченного стержня.

Подстановка компонент (16) в уравнение (15) позволяет представить дисперсионное уравнение в виде

$$\begin{aligned} &4\gamma^2 q_1 q_2 J_0(q_2 R) J_1(q_1 R) - \frac{2q_1}{R} (q_2^2 + \gamma^2) \times \\ &\quad \times J_1(q_1 R) J_1(q_2 R) + (q_2^2 - \gamma^2) \times \\ &\quad \times \left( (q_1^2 + \gamma^2) \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2\gamma^2 \right) J_0(q_1 R) J_1(q_2 R) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

## 4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ (15)

Спектральный анализ матрицы  $\mathbf{A}$ , определяющей дисперсионное уравнение (15), распадается на два случая.

### 4.1. Матрица $\mathbf{A}$ полупростая

Спектральное разложение матрицы  $\mathbf{A}$  дает

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \leftrightarrow \lambda_1, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \leftrightarrow \lambda_2, \quad (18)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – собственные числа матрицы  $\mathbf{A}$ , а  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$  – двухкомпонентные собственные векторы, причем

$$\lambda_{1,2} = s \pm d, \quad (19)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} s &= \frac{A_{11} + A_{22}}{2}, \quad d = \sqrt{f^2 + A_{12} A_{21}}, \\ f &= \frac{A_{11} - A_{22}}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Коэффициенты  $A_{ij}$  в (20) определены выражениями (16).

Соответствующие нормированные собственные векторы имеют вид

$$\alpha_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{f \pm d}{\sqrt{|A_{21}|^2 + |f \pm d|^2}} \\ A_{21} \\ \frac{A_{21}}{\sqrt{|A_{21}|^2 + |f \pm d|^2}} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Анализ выражений (21) для собственных векторов и выражений (19) для собственных чисел показывает, что необходимым и достаточным условием полупростоты матрицы  $\mathbf{A}$  является условие отличия от нуля дискриминанта  $d$ , определенного по (20). Кроме того, условие вырождения матрицы  $\mathbf{A}$  (необходимо простой при однократном вырождении) имеет вид

$$A_{11}A_{22} = A_{12}A_{21}. \quad (22)$$

Непосредственный анализ показывает, что условие (22), вытекающее из (19), (20), эквивалентно дисперсионному уравнению (15).

#### 4.2. Матрица $\mathbf{A}$ неполупротая

В этом случае

$$d = 0, \quad (23)$$

и спектральное разложение матрицы  $\mathbf{A}$  принимает вид

$$\begin{pmatrix} \frac{f}{\sqrt{|A_{21}|^2 + |f|^2}} \\ A_{21} \\ \frac{A_{21}}{\sqrt{|A_{21}|^2 + |f|^2}} \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_{1,2} = s. \quad (24)$$

Двукратное вырождение для неполупротой матрицы эквивалентно выполнению условия

$$s = 0, \quad (25)$$

откуда, принимая во внимание (20), следует, что необходимым и достаточным условием неполупрототы матрицы  $\mathbf{A}$  является выполнение условия

$$f^2 = -A_{12}A_{21}. \quad (26)$$

Кроме того, при выполнении (26) условие двукратного вырождения неполупротой матрицы  $\mathbf{A}$  принимает вид

$$A_{11} = -A_{22}. \quad (27)$$

Для случая двукратного вырождения соответствующее дисперсионное уравнение, отвечающее условиям (26), (27), при использовании (16), представимо в виде

$$\begin{aligned} (q_2^2 - \gamma^2)^2 (J_1(q_2R))^2 - \gamma^2 q_1 q_2 J_0(q_2R) J_1(q_1R) + \\ + \frac{\gamma^2 q_1}{R} J_1(q_2R) J_1(q_1R) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

## 5. ПОЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Компоненты корневых собственных векторов (21), (24), отвечающих нулевым собственным числам, являются коэффициентами  $C_1, C_2$  в выражениях (11) для компонент поля перемещений.

### 5.1. Матрица $\mathbf{A}$ полупростая

Подстановка в (11) компонент корневого собственного вектора (21), отвечающего нулевому собственному числу (19) при выполнении условия вырождения (22), дает

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{-[q_1(f \pm d)J_1(q_1r) + i\gamma A_{21}J_1(q_2r)]}{\sqrt{|A_{21}|^2 + |f \pm d|^2}} e^{i\gamma(z-ct)}, \\ u_z &= \frac{[i\gamma(f \pm d)J_0(q_1r) + q_2 A_{21}J_0(q_2r)]}{\sqrt{|A_{21}|^2 + |f \pm d|^2}} e^{i\gamma(z-ct)}, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $f, d$  определены выражениями (20), коэффициенты  $A_j$  матрицы  $\mathbf{A}$  определены по (16). В (29) и далее нулевая компонента  $u_\theta$  отдельно не указывается. Анализ выражений (29) показывает, что в случае полупростой матрицы  $\mathbf{A}$  амплитуда компоненты  $u_z$  на оси стержня ( $r = 0$ ) обращается в нуль при  $c = c_2$ .

### 5.2. Матрица $\mathbf{A}$ неполупротая

Подстановка в (11) компонент корневого собственного вектора (24), отвечающего нулевому собственному числу (19) при выполнении условия вырождения (26), (27), дает

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{-[q_1 f J_1(q_1r) + i\gamma A_{21} J_1(q_2r)]}{\sqrt{|A_{21}|^2 + |f|^2}} e^{i\gamma(z-ct)}, \\ u_z &= \frac{[i\gamma J_0(q_1r) + q_2 A_{21} J_0(q_2r)]}{\sqrt{|A_{21}|^2 + |f|^2}} e^{i\gamma(z-ct)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Из (30) следует, что в случае неполупротой матрицы  $\mathbf{A}$  амплитуда компоненты  $u_z$  на оси стержня ( $r = 0$ ) обращается в нуль при фазовой скорости  $c$ , совпадающей со скоростью поперечной волны  $c_2$ .

### 5.3. Амплитуды перемещений на боковой поверхности

При определении поляризации волны особый интерес представляют нормализованные (по модифицированной  $l^1$ -норме) амплитуды  $U_r, U_z$  компонент перемещений (29), (30) на боковой поверхности стержня:

$$U_r \equiv \frac{|u_r|}{|u_r| + |u_z| + 1} \Big|_{r=R}, \quad U_z \equiv \frac{|u_z|}{|u_r| + |u_z| + 1} \Big|_{r=R}. \quad (31)$$

Надо отметить, что, вообще говоря, амплитудные значения компонент смещений  $|u_r|$  и  $|u_z|$  для рассматриваемой установившейся гармонической волны при каком-либо значении радиуса  $r$  и, в частности, при  $r = R$ , могут одновременно обратиться в нуль (для учета этого введена единица в знаменатель в (31)). Таким образом, при некоторых значениях параметров в аксиально симметричных продольных модах гипотетически возможна ситуация, когда одновременно  $U_r = U_z = 0$ .

### 6. АМПЛИТУДЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МОДЫ

Далее определялись амплитуды  $U_r, U_z$  на боковой поверхности цилиндрического стержня – по уравнениям (29) для случая полупростой матрицы  $\mathbf{A}$  и уравнениям (30) для неполупростой матрицы с помощью (31). Амплитуды определялись при различных значениях коэффициента Пуассона в диапазоне  $\nu \in [0, 0.4]$ .

Для этих значений коэффициента Пуассона по дисперсионному уравнению (15) определены нижние ветви дисперсионных кривых, отвечающие фундаментальной аксиально симметричной моде (рис. 1). Кривые на рис. 1. отвечают различным значениям коэффициента Пуассона  $\nu$  (значения коэффициента Пуассона указаны на графике).

На рис. 2, 3 приведены графики изменения амплитуд  $U_r, U_z$  для фундаментальной аксиально симметричной моды в зависимости от изменения относительной фазовой скорости  $c/c_{2,lim}$ . На рис. 2, 3 для всех исследованных значений коэффициента Пуассона обращает на себя внимание убывание до нуля обеих амплитуд  $U_r, U_z$  при вариации фазовой скорости в диапазоне от  $c_{1,lim}$  до  $c_2$ . Далее, при фазовых скоростях  $c > c_2$ , компонента  $U_r$  возрастает и вновь убывает до нуля уже в окрестности скорости  $c_{2,lim}$ .

Вариация компоненты  $U_z$  оказывается более сложной (рис. 3): в окрестности фазовой скорости

$$c_k \approx \frac{c_{2,lim}}{a + b\nu}, \quad a = 1.0126, \quad b = 0.8889 \quad (32)$$

наблюдается еще одно падение до нуля, далее при увеличении фазовой скорости  $c > c_k$  компонента  $U_z$  возрастает, далее вновь происходит еще одно падение до нуля в окрестности скорости  $c_{2,lim}$ . Константы  $a, b$  в дробно-рациональном выражении (32) найдены с помощью регрессионного анализа.

На рис. 4 точками отмечены значения фазовой скорости, отвечающей второму нулю компоненты  $U_z$ ; пунктирная линия отвечает расчетам по

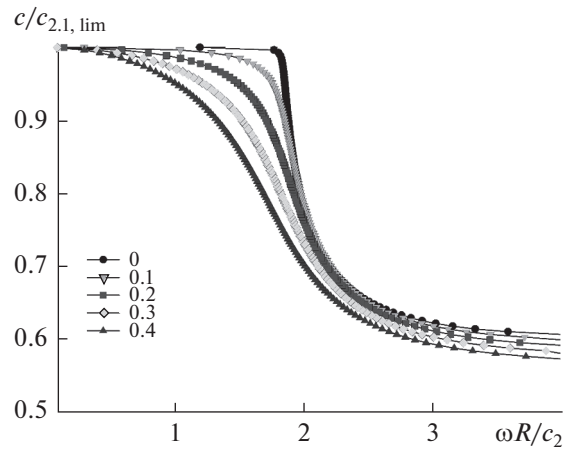


Рис. 1. Дисперсионные кривые, соответствующие аксиально симметричной фундаментальной моде для различных значений коэффициента Пуассона.

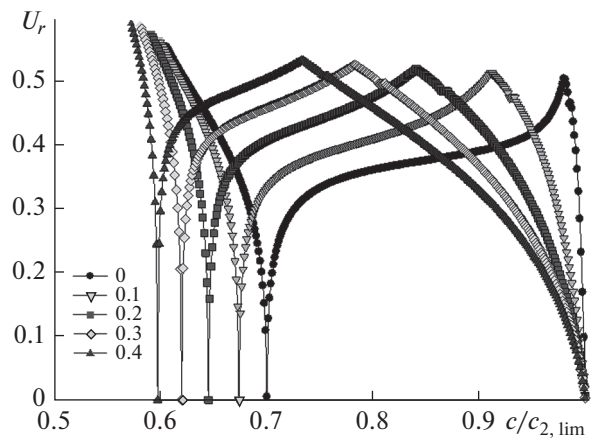


Рис. 2. Изменение компоненты  $U_r$  при вариации фазовой скорости.

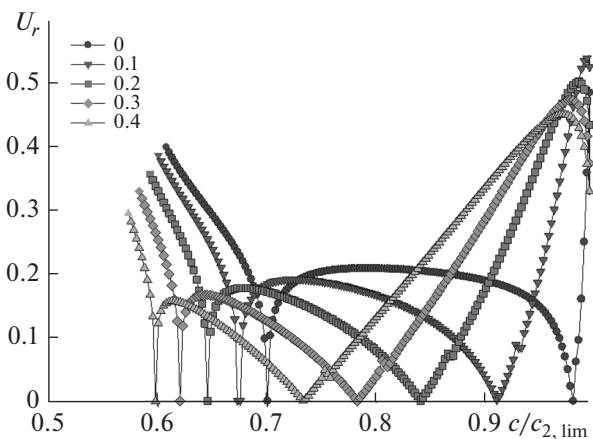


Рис. 3. Изменение компоненты  $U_z$  при вариации фазовой скорости.

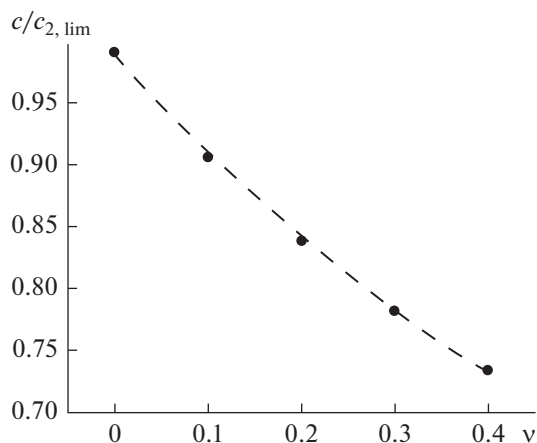


Рис. 4. Вариация безразмерной фазовой скорости  $c_k/c_{2,lim}$  при вариации коэффициента Пуассона.

приближенной формуле (32). Значения параметров  $a, b$  уравнения (32) обеспечивают приближение к определенным по (31) значениям фазовой скорости, при которой наблюдается второй нуль компоненты  $U_z$ , с относительной ошибкой менее 0.1% в диапазоне  $\nu \in (0, 0.4]$ .

Подстановка фазовой скорости  $c = c_2$  в выражения (16) показывает, что при этой скорости матрица  $\mathbf{A}$  является простой с единственным корневым собственным вектором

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda = 0. \quad (33)$$

Корневой собственный вектор (33) соответствует коэффициентам  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 1$  в представлении (11). Далее, непосредственный анализ выражений (29), (31) для случая полупростой матрицы  $\mathbf{A}$  показывает, что, действительно, при  $c = c_2$  на боковой поверхности  $U_r = U_z = 0$ , причем это явление наблюдается для всех продольных аксиально симметричных мод (как фундаментальной, так и высших). Именно поэтому на рис. 2 и 3 вариация компонент фундаментальной моды  $U_r, U_z$  показана в терминах вариации относительной фазовой скорости.

## 7. ВЫВОДЫ

Для продольных аксиально симметричных волн Похгаммера–Кри впервые осуществлен спектральный анализ соответствующего дисперсионного уравнения. На основе спектрального анализа получены аналитические выражения для поля перемещений аксиально симметричных продольных волн Похгаммера–Кри.

Доказано, что для продольной фундаментальной моды матрица дисперсионного уравнения

полупростая, с однократным вырождением при любых допустимых значениях коэффициента Пуассона и любой частоте  $0 \leq \omega < \infty$  (в случае высших мод матрица может быть неполупростой с двукратным вырождением).

На поверхности стержня для фундаментальной продольной аксиально симметричной моды определены амплитуды смещений волн Похгаммера–Кри и проведен анализ вариации амплитуд в зависимости от фазовой скорости и коэффициента Пуассона. Обнаружено, что при фазовой скорости, совпадающей со скоростью поперечной волны, происходит одновременное обращение в нуль всех компонент перемещений на боковой поверхности стержня, что может представлять интерес для проектирования акустических волноводов.

Здесь следует отметить, что возбуждение гармонической аксиально симметричной продольной моды, распространяющейся с заданной фазовой скоростью, можно осуществлять с помощью соответствующих дисперсионных кривых, см. рис. 1. Для требуемой фазовой скорости по дисперсионной кривой определяется необходимая частота, а затем с помощью какого-либо метода (продольная торцевая нагрузка в стержне Хопкинсона, поверхностные трансдюсеры на основе пьезоэлектрических или магнитоакустических преобразователей и др.) возбуждается продольная гармоническая волна Похгаммера–Кри с частотой, отвечающей заданной фазовой скорости. В заключение надо отметить, что авторам статьи неизвестны способы возбуждения волн с боковой поверхности при фазовых скоростях, соответствующих обращению в нуль всех компонент перемещений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pochhammer L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // J. Reine Angew. Math. 1876. V. 81. S. 324–336.
2. Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar // Quart. J. Pure Appl. Math. 1886. V. 21. P. 287–298.
3. Kolsky H. Stress waves in solids // J. Sound Vibr. 1964. V. 1. P. 88–110.
4. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // J. Acoust. Soc. Am. 1972. V. 51. P. 265–283.
5. Thurston R.N. Elastic waves in rods and clad rods // J. Acoust. Soc. Am. 1978. V. 64. P. 1–37.
6. Pao Y.-H., Mindlin R.D. Dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinder // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1960. V. 27. P. 513–520.
7. Valsamos G., Casadei F., Solomos G. A numerical study of wave dispersion curves in cylindrical rods with circular cross-section // Appl. Comput. Mech. 2013. V. 7. P. 99–114.

8. *Муравьева О.В., Леньков С.В., Мурашов С.А.* Крутильные волны, возбуждаемые электромагнитно-акустическими преобразователями, при акустическом волноводном контроле трубопроводов // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 1. С. 117–124.
9. *Кузнецов С.В.* Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор) // Акуст. журн. 2014. Т. 60. С. 90–100.
10. *Kuznetsov S.V.* Love waves in nondestructive diagnostics of layered composites. Survey // Acoust. Phys. 2010. V. 56. № 6. P. 877–892.
11. *Тютюкин В.В., Бойко А.И.* Спирально-винтовые нормальные волны вблизи цилиндрической полости в упругой среде // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 162–165.
12. *Тютюкин В.В.* Спирально-винтовые волны в упругой цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 4. С. 517–521.
13. *Тютюкин В.В.* О свойствах круговых и спирально-винтовых волн цилиндрического волновода // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 1. С. 18–19.
14. *Morris C., Cormack J.M., Hamilton M.F., Haberman M.R., Seepersad C.C.* Determining the complex Young's modulus of polymer materials fabricated with microstereolithography // Proceedings of the 28th Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium. 2017. University of Texas at Austin. 2017. P. 426–433.
15. *Chi-Kuang Sun, Yi-Chun Tsai, Yi-Jan E. Chen, Tzu-Ming Liu, Hui-Yuan Chen, Han-Ching Wang, Chu-Fang Lo.* Resonant dipolar coupling of microwaves with confined acoustic vibrations in a rod-shaped virus // Scientific Reports. 2017. V. 7. № 4611.
16. *Zwiessler R., Kenkmann T., Poelchau M.H., Nau S., Hess S.* On the use of a split Hopkinson pressure bar in structural geology: High strain rate deformation of Seeburger sandstone and Carrara marble under uniaxial compression // Journal of Structural Geology. 2017. V. 97. P. 227–236.
17. *Egerton J.S., Lowe M.J.S., Huthwaite P.* Ultrasonic attenuation and phase velocity of high-density polyethylene pipe material // J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 141. P. 1535–1545.
18. *Haith M.I., Ewert U., Hohendorf S., Bellon C., Deresch A., Huthwaite P., Lowe M.J.S., Zscherpel U.* Radiographic modelling for NDE of subsea pipelines // NDT & E International. 2017. V. 86. P. 113–122.
19. *Heinlein S., Cawley P., Vogt T.K.* Reflection of torsional T(0,1) guided waves from defects in pipe bends // NDT & E International. 2018. V. 93. P. 57–63.
20. *Dobson J., Cawley P.* The scattering of torsional guided waves from Gaussian rough surfaces in pipework // J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 141. P. 1852–1861.
21. *Jarvis R., Cawley P., Nagy P.B.* Current deflection NDE for the inspection and monitoring of pipes // NDT & E International. 2016. V. 81. P. 46–59.
22. *Leinov E., Lowe M.J.S., Cawley P.* Ultrasonic isolation of buried pipes // J. Sound Vibr. 2016. V. 363. P. 225–239.
23. *Egerton J.S., Lowe M.J.S., Huthwaite P., Halai H.V.* A multiband approach for accurate numerical simulation of frequency dependent ultrasonic wave propagation in the time domain // J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 142. P. 1270–1280.
24. *Буденков Г.А., Недзвецкая О.В., Злобин Д.В., Лебедева Т.Н.* Эффективность использования стержневых и крутильных волн для контроля пруткового проката // Дефектоскопия. 2004. № 3. С. 3–9.
25. *Муравьева О.В., Леньков С.В., Муравьев В.В., Мышкин Ю.В., Мурашов С.А.* Факторы, влияющие на эффективность возбуждения крутильных волн при волноводном контроле труб // Дефектоскопия. 2016. № 2. С. 33–41.
26. *Муравьева О.В., Злобин Д.В.* Акустический тракт метода многократных отображений при дефектоскопии линейно-протяженных объектов // Дефектоскопия. 2013. № 2. С. 43–51.
27. *Углов А.Л., Хлыбов А.А.* О контроле напряженного состояния газопроводов из анизотропной стали методом акустоупругости // Дефектоскопия. 2015. № 4. С. 31–41.