

УДК 534.222

РЕЛАКСИРУЮЩАЯ СРЕДА С “ЛИНЕЙНО СЛАБЕЮЩЕЙ ПАМЯТЬЮ”: ЭВОЛЮЦИЯ ИНТЕНСИВНЫХ ИМПУЛЬСОВ

© 2019 г. О. А. Васильева^{a, b, *}, О. В. Руденко^{c, d, e, **}

^aМосковский государственный строительный университет, Ярославское ш. 26, Москва, 129337 Россия

^bРоссийский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева, Миусская пл. 9, Москва, 125047 Россия

^cФизический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, ГСП-1, Москва, 119991 Россия

^dИнститут общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

^eИнститут физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Б. Грузинская ул. 10, стр. 1, Москва, 123242 Россия

*e-mail: vasilievaoa@mgsu.ru

**e-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 10.06.2019 г.

После доработки 10.06.2019 г.

Принята к публикации 09.07.2019 г.

Изучена эволюция импульсных сигналов в квадратично нелинейной среде со специальным законом релаксации. Считается, что “память среды” ослабевает по линейному закону и обращается в ноль за конечное время. Вместо стандартных интегро-дифференциальных уравнений с экспоненциальными или дробно-степенными ядрами здесь использована модель среды с конечным “временем памяти”. Для этой модели анализ сложных интегро-дифференциальных уравнений сводится к решению дифференциально-разностного уравнения; при этом объем вычислений заметно сокращается. Описаны процессы, сопровождающие эволюцию импульсов – формирование ударных фронтов, нелинейное затухание, уширение сигналов во времени. Выяснено влияние времени релаксации на протекание указанных процессов

Ключевые слова: ударный фронт, нелинейность, время релаксации, интегро-дифференциальное уравнение, дифференциально-разностное уравнение

DOI: 10.1134/S0320791919060169

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в среде с дисперсией эволюция плоских нелинейных волн описывается интегро-дифференциальным уравнением следующего вида:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int_0^\infty K(s) V(\theta - s) ds = 0. \quad (1)$$

Здесь $K(s)$ – ядро интегрального члена уравнения (1), конкретная форма которого определяет линейные частотно-зависимые свойства (дисперсию и диссипацию) среды. Смысл обозначений таков: V – акустическое давление, нормированное на характерную величину (исходную амплитуду волны), θ – время в сопровождающей системе координат, нормированное на исходную частоту сигнала, z – пройденное волной расстояние, отнесенное к характерной нелинейной длине.

Для вырожденных ядер $K(s)$, представляющих собой линейную комбинацию дельта-функции и ее производных, из (1) получаются простые

дифференциальные уравнения типа Хопфа, Бюргера и аналогичные эволюционные уравнения с высшими производными. Дифференциальные уравнения следуют из (1) и для некоторых других ядер [2]. Наиболее известны уравнения с экспоненциальным ядром (рис. 1, кривая L):

$$K(s) = D \exp\left(-\frac{s}{\theta_{rel}}\right). \quad (2)$$

Ядро (2) предсказывается релаксационной моделью Мандельштама–Леонтовича [3]. В этом случае из общего уравнения (1) получается:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\theta_{rel}} \left[\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] = D \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (3)$$

Это уравнение в дифференциальной форме (3) получено в работе [4]; его интегральная форма приведена в работе [5].

Разнообразные формы ядер, полезные для приложений, обсуждаются в статье [6]. В частности, степенные зависимости коэффициента затухания

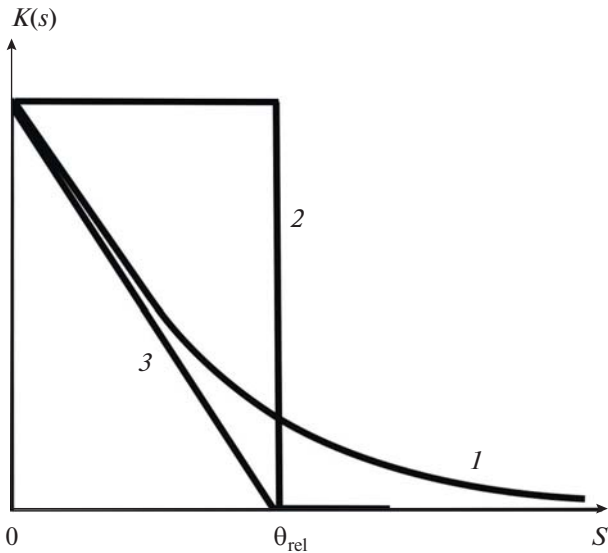


Рис. 1. Три формы ядер в интегральном члене уравнения (1): кривая 1 – экспоненциальное ядро (2), кривая 2 – ядро, соответствующее мгновенно исчезающей “памяти среды” (4), 3 – ядро, отвечающее линейно слабеющей памяти (6).

хания волны от частоты с дробными показателями степени, типичные для биологических тканей и геофизических структур, принципиально требуют интегро-дифференциального описания. Это же относится к средам со сложной внутренней динамикой релаксационного типа.

Кратко напомним схему нахождения ядра $K(s)$ в каждом конкретном случае. Частотные зависимости дисперсии и поглощения, которые даются действительной и мнимой частями $k'(\omega), k''(\omega)$ волнового числа, измеряются или определяются из физической модели типа Мандельштама–Леонтовича. Затем решается обратная задача и ядро реконструируется стандартными методами, использующими принцип причинности и соотношения типа Крамерса–Кронига [7].

Известно, например, что показатель степени в частотной зависимости затухания ультразвука в биологических тканях является дробным. Он изменяется от 2.1 (кости черепа) до 1.1 (скелет) и 0.6 (кожа) [8]. Чаше всего в диапазоне нескольких МГц (медицинский ультразвук) $k'' \sim \omega^{2-\nu}$, $0 < \nu < 1$. Для такой зависимости ядро имеет вид $K(s) \sim s^{\nu-1}$. Особенность функции $K(s)$ в точке $s = 0$ часто оказывается несущественной, поскольку уравнение содержит “свертку” сингулярного ядра с осциллирующей функцией, описывающей поле волны.

Если интересоваться волнами не в конкретной релаксирующей среде, а общими свойствами нелинейных волн, удобен прием, сводящий инте-

гро-дифференциальное уравнение к дифференциально-разностной модели или даже к простому отображению. Этот переход [6, 7] эффективен для ядер, отличных от нуля на конечном интервале. Простейший случай соответствует среде с постоянной “памятью” [9], для которой

$$K(s) = D \begin{cases} 1, & 0 < s < \theta_{rel}, \\ 0, & s < 0, s > \theta_{rel}. \end{cases} \quad (4)$$

Ядро (4) означает, что в течение промежутка времени $0 < s < \theta_{rel}$ среда “все помнит”, а в момент $s = \theta_{rel}$ “все забывает” (рис. 1, кривая 2). При наличии такого ядра уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = D \frac{\partial}{\partial \theta} [V(z, \theta) - V(z, \theta - \theta_{rel})]. \quad (5)$$

Распространение импульсных сигналов в релаксирующей среде с ядром (4) для трех типов нелинейности (модульной, квадратичной и квадратично-кубической) изучено в работе [9].

Еще одна упрощенная модель получается с использованием ядра со следующей линейно убывающей “памятью” (рис. 1, кривая 3):

$$K(s) = D \begin{cases} \left(1 - \frac{s}{\theta_{rel}}\right), & 0 < s < \theta_{rel}, \\ 0, & s < 0, s > \theta_{rel}. \end{cases} \quad (6)$$

При этом вместо (5) получается такое дифференциально-разностное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} - D \frac{\partial V}{\partial \theta} = \\ = -\frac{D}{\theta_{rel}} [V(z, \theta) - V(z, \theta - \theta_{rel})]. \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы найти закон дисперсии, “занулим” нелинейный член и будем искать решение в виде

$$V = A(z) \exp(-i\omega\theta). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$\begin{aligned} V = A_0 \exp \left\{ -i\omega \left[\theta + D \left(1 + \frac{\sin(\omega\theta_{rel})}{(\omega\theta_{rel})} \right) z \right] - \right. \\ \left. - \frac{2D}{\theta_{rel}} \sin^2 \left(\frac{1}{2} \omega\theta_{rel} \right) z \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

В показателе экспоненты (9) присутствуют два дополнительных члена, пропорциональных коэффициенту D (“силе” релаксации). Мнимый член есть добавка к скорости распространения волны, зависящая от частоты. Действительная часть показателя описывает затухание – амплитуда волны экспоненциально уменьшается с ростом пройденного расстояния z .

ЭВОЛЮЦИЯ ФОРМЫ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

Пусть на границе $z = 0$ исходная форма сигнала дается функцией $V(z = 0, \theta) = \sin \theta$, отличной от нуля в области $0 < \theta < \pi$. Иными словами, рассматриваемый положительный однополярный импульс представляет собой отрезок синусоиды, содержащий половину ее периода.

Процесс эволюции такого импульса показан на рис. 2 для значений параметров $D = 0.1$, $\theta_{\text{rel}} = 5$. Профили импульса построены для четырех значений пройденного волной расстояния, равных $z = 0, 1, 2, 5$. Наблюдается формирование ударных фронтов сжатия. Задний фронт затянута сильнее, чем в отсутствие релаксации (см. [10–12]).

Для того чтобы выяснить роль релаксационных явлений, эволюционный процесс, иллюстрированный на рис. 2, был рассчитан для $D = 0.1$ и различных значений времени релаксации $\theta_{\text{rel}} = 1, 2.5, 5$. Результаты изображены на рис. 3.

Видно, что при $\theta_{\text{rel}} = 1$ форма импульса качественно такая же, как в нелинейной диссипативной среде в отсутствие релаксации. Передний фронт – крутой, но имеет конечную ширину из-за диссипации, вносимой релаксационным процессом (см. (9)). Задний фронт затянута и заметно сдвинута относительно точки $\theta = \pi$. При увеличении времени релаксации форма ударного фронта изменяется незначительно, в то время как задний фронт затягивается сильнее и даже становится осциллирующим.

Процесс эволюции импульса отрицательной полярности изображен на рис. 4 для значений параметров $D = 0.1$, $\theta_{\text{rel}} = 5$. Профили импульса построены для четырех значений пройденного волной расстояния, равных $z = 0, 1, 2, 5$. Сравнивая кривые рис. 4 с соответствующими кривыми на рис. 2, построенными для тех же значений параметров, но для положительного импульса, видим заметные различия. Действительно, ударные фронты сжатия смещаются в другую сторону и имеют несколько иную форму. Различия в форме как фронта, так и гладких участков профиля связаны с отсутствием инвариантности уравнения (7) относительно преобразования $V(z, -\theta) = -V(z, \theta)$. Такая симметрия, как известно, имеется в уравнении Бюргера (см. [10–13]).

На рис. 5 изображено поведение двуполярного импульса – отрезка синусоиды $V(z = 0, \theta) = \sin \theta$, содержащего один период $-\pi < \theta < \pi$. Расчет проведен для значений параметров $D = 0.1$, $\theta_{\text{rel}} = 5$ на расстояниях $z = 0, 1, 2, 5$.

Импульсный сигнал, в котором за отрицательной фазой (область разрежения) движется фаза

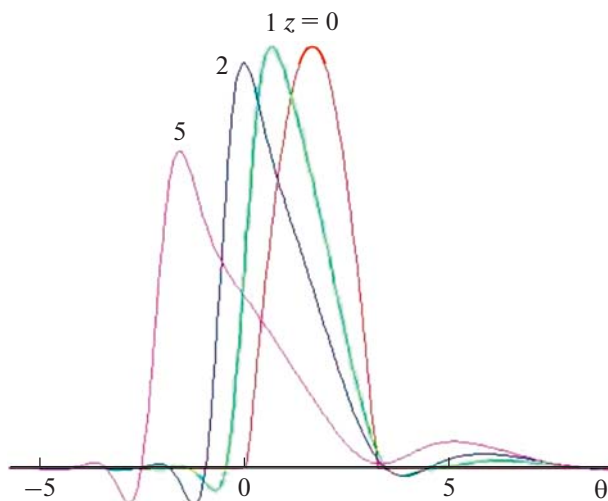


Рис. 2. Искажение формы положительного однополярного импульса в релаксирующей среде с ядром (6). Параметром кривых является пройденное волной расстояние z .

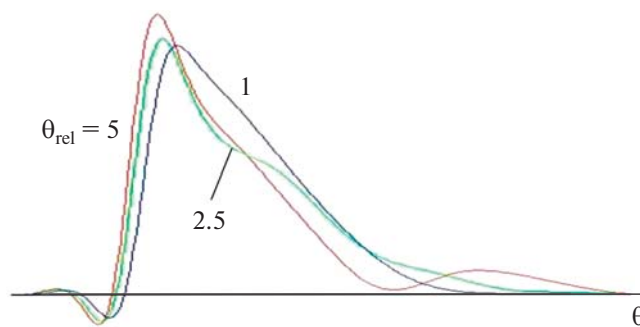


Рис. 3. Формы положительного однополярного импульса, рассчитанные на расстоянии $z = 5$ для сред с различными временами релаксации, указанными при каждой кривой.

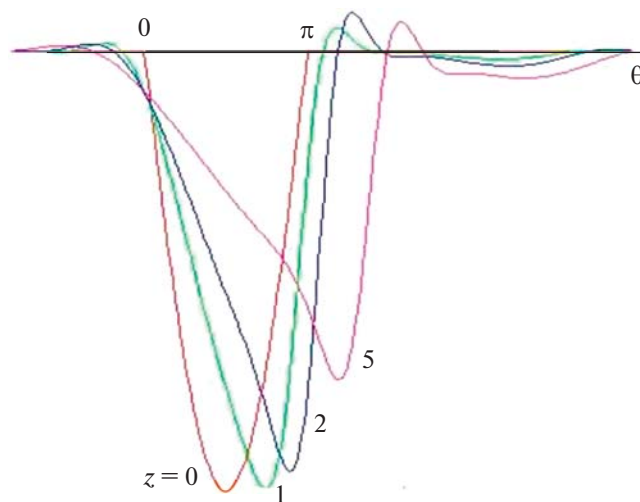


Рис. 4. Искажение формы отрицательного однополярного импульса в релаксирующей среде с ядром (6). Параметром кривых является пройденное волной расстояние z .

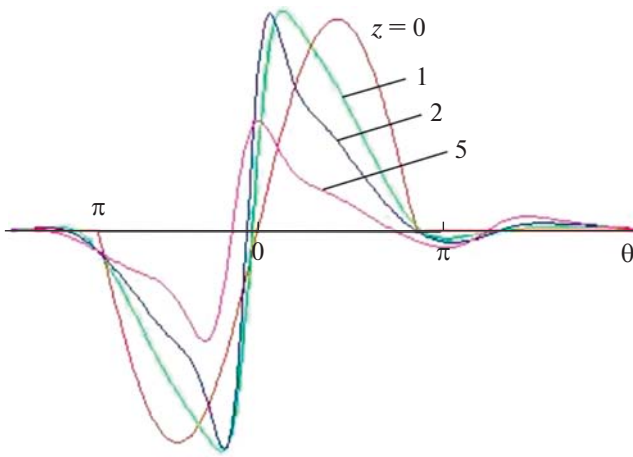


Рис. 5. Искажение формы двуполярного импульса в релаксирующей среде; пройденное волной расстояние z указано при каждой кривой.

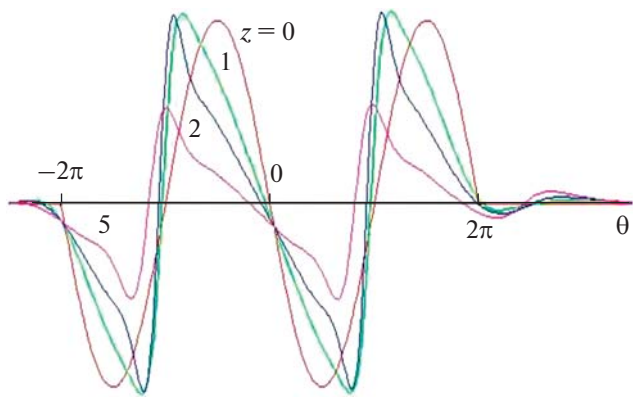


Рис. 6. Искажение формы двойной S -волны в релаксирующей среде; пройденное волной расстояние z указано при каждой кривой.

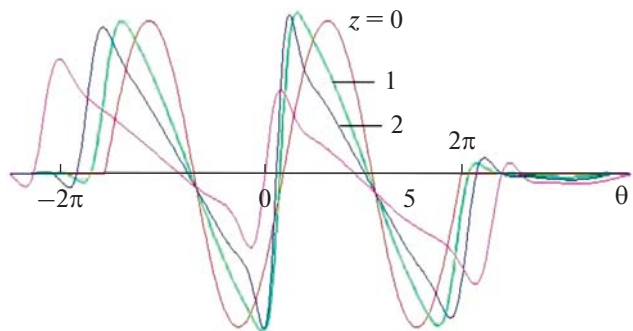


Рис. 7. Искажение формы двойной N -волны в релаксирующей среде; пройденное волной расстояние z указано при каждой кривой.

положительного давления (область сжатия), обычно называют S -волной. В такой волне образуется один ударный фронт, разделяющий две указанные области. Если бы релаксационные процессы отсутствовали, интенсивный сигнал при больших значениях акустического числа Рей-

нольдса оставался бы полностью внутри области $-\pi < \theta < \pi$. Как видно из рис. 5, релаксация в среде приводит к заметному “просачиванию” сигнала как в область $\theta < -\pi$, так и в положительную область $\theta > \pi$.

На рис. 6 изображено поведение сложного двойного двуполярного импульса $V(z=0, \theta) = -\sin \theta$, заданного в области $-2\pi < \theta < 2\pi$. Как и прежде, расчет проведен для значений параметров $D = 0.1$, $\theta_{rel} = 5$ на расстояниях $z = 0, 1, 2, 5$. Исходный профиль этого импульса представляет собой двукратное продолжение S -формы на рис. 5. Здесь образуются два ударных фронта, поведение каждого из которых аналогично поведению единственного фронта на рис. 5. Однако стыковка гладких участков профиля в окрестности точки $\theta = 0$ происходит таким образом, что релаксационное “затягивание” исчезает. Образуется узел, в котором пересекаются все кривые, изображающие профиль волны на различных расстояниях z . На образование такого узла было указано еще в монографии [12] при анализе волновых профилей в среде с экспоненциальной релаксацией (2).

На рис. 7 изображено поведение сложного двойного двуполярного импульса $V(z=0, \theta) = \sin \theta$, заданного в области $-2\pi < \theta < 2\pi$. Здесь иной порядок следования областей сжатия и разрежения по сравнению с профилями на рис. 5 и рис. 6. Именно, первой идет фаза сжатия, за ней – фаза разрежения. Затем области разных знаков чередуются. Такие импульсные сигналы называют волнами N -типа. Они эволюционируют иначе по сравнению с S -волнами. В частности, сравнивая рис. 7 и рис. 6, видим, что формируются не два, а три ударных фронта.

Видно, что “головная” и “хвостовая” ударные волны движутся относительно сопровождающей системы координат в противоположные стороны. В целом импульс уширяется как из-за “разбега” ударных фронтов, занимавших исходное положение в точках $\theta = \pm 2\pi$, так и в результате действия релаксационных процессов, приводящих к дополнительному сглаживанию профиля. Третья ударная волна, образовавшаяся в окрестности точки $\theta = 0$, ведет себя по типу фронта S -волны (см. рис. 5) и уменьшается по амплитуде быстрее, чем два других фронта. Эти процессы приводят на больших расстояниях к превращению исходного сигнала в универсальный двуполярный импульс N -типа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Укажем, что проведенный анализ процессов эволюции импульсов различной формы в квадратично нелинейной релаксирующей среде дает основу для дальнейших исследований. Во-первых,

нам удалось показать, что модельный вид релаксационного ядра, отвечающий “линейно слабеющей памяти” среды, позволяет значительно упростить используемые алгоритмы и снизить трудоемкость вычислений. Во-вторых, мы планируем использовать развитые методы для решения связанных задач по распространению импульсных сигналов в средах с модульной и квадратично-кубичной нелинейностями. Такие нелинейности представляют интерес, поскольку реализуются в ряде искусственных метаматериалов, имеющих перспективы для практического использования. Аналогичные задачи для среды с ядром иного вида (4) решены в работе [9].

При численном исследовании сформулированных в этой статье задач мы использовали различные схемы третьего порядка точности сквозного расчета разрывов, аналогичные описанным нами в работах [12, 14].

Отметим также, что помимо метаматериалов [15–18], экзотические ядра встречаются в сложно структурированных средах, например, в полимерных материалах [19]. Обычно говорят о материалах с несколькими временами экспоненциальной релаксации или же о спектре времен такой релаксации. Нетрудно видеть, что, например, ядро (6) может быть представлено в виде

$$K(s) = D \left(1 - \frac{s}{\theta_{\text{rel}}}\right) = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{s}{\theta_{\text{rel}}}\right) W(\theta_{\text{rel}}) d\theta_{\text{rel}}.$$

Здесь ядро (6) отлично от нуля в области $0 < s < \theta_{\text{rel}}$. Ясно, что функция распределения времен релаксации $W(\theta_{\text{rel}})$ находится через обратное преобразование Лапласа от данной “экзотической” формы ядра.

Авторы считают своим долгом почтить память Е.А. Лапшина, который совсем недавно ушел от нас. Евгений Александрович внес большой вклад в разработку специальных численных методов, которые позволяют эффективно рассчитывать поведение нелинейных волн, содержащих ударные фронты. Настоящая статья есть продолжение большого цикла работ по численному решению задач нелинейной теории волн, выполненных под руководством и при непосредственном участии Е.А. Лапшина и регулярно публиковавшихся с 1975 г. [20] вплоть до наших дней [9].

Работа поддержана грантом Российского Национального Фонда № 19-12-00098.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rudenko O.V., Soluyan S.I., Khokhlov R.V. Problems of the theory of nonlinear acoustics // *Sov. Phys. Acoustics*. 1974. V. 20. № 4. P. 356–359.
2. Ibragimov N.H., Meleshko S.V., Rudenko O.V. Group analysis of evolutionary integro-differential equations describing nonlinear waves: the general model // *J. Physics A*. 2011. V. 44. № 315201.
3. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid Mechanics*. N.Y.: Elsevier, 2018.
4. Polyakova A.L., Soluyan S.I., Khokhlov R.V. Propagation of finite disturbances in a relaxing medium // *Sov. Phys. Acoustics*. 1962. V. 8. № 1. P. 78–82.
5. Rudenko O.V., Soluyan S.I. The scattering of sound by sound // *Sov. Phys. Acoustics*. 1973. V. 18. № 3. P. 352–355.
6. Rudenko O.V. Nonlinear integro-differential models for intense waves in media like biological tissues and geostuctures with complex internal relaxation-type dynamics // *Acoust. Phys.* 2014. V. 60. № 4. P. 398–404.
7. Vinogradova M.B., Rudenko O.V., Sukhorukov A.P. *Theory of waves* (3rd edition). Moscow: Lenand, 2015 [in Russian].
8. *Physical principles of medical ultrasound* (2nd edition, Ed. Hill C.R., Bamber J.C., ter Haar G.R.). N.Y.: JohnWiley&Sons, 2004.
9. Vasil'eva O.A., Lapshin E.A., Rudenko O.V. Intense pulses in relaxing media with limited “memory time”, power-law and nonanalytic nonlinearities // *Acoust. Phys.* 2019. V. 65. № 1. P. 23–29.
10. Rudenko O.V., Soluyan S.I. *Theoretical foundations of nonlinear acoustics*. N.Y.: Plenum, Consultants Bureau, 1977.
11. Rudenko O.V., Gurbatov S.N., Hedberg C.M. *Nonlinear acoustics through problems and examples*. Victoria, Canada: Trafford, 2011.
12. Vasil'eva O.A., Karabutov A.A., Lapshin E.A., Rudenko O.V. Interactions of one-dimensional waves in nonlinear non-dispersive media. M.: Mosc. Univ. Press, 1983 [in Russian].
13. Ibragimov N.H., Rudenko O.V. Principle of an *a priori* use of symmetries in the theory of nonlinear waves // *Acoust. Phys.* 2004. V. 50. № 4. P. 406–419.
14. Vasil'eva O.A., Lapshin E.A., Rudenko O.V. Projection of the Khokhlov–Zabolotskaya equation on the axis of wave beam as a model of nonlinear diffraction // *Doklady Mathematics*. 2017. V. 96. № 3. P. 646–649.
15. Rudenko O.V. Equation admitting linearization and describing waves in dissipative media with modular, quadratic, and quadratically cubic nonlinearities // *Doklady Mathematics*. 2016. V. 94. № 3. P. 703–707.
16. Gray A.L., Rudenko O.V. An intense wave in defective media containing both quadratic and modular nonlinearities: shock waves, harmonics and nondestructive testing // *Acoust. Phys.* 2018. V. 64. № 4. P. 402–407.
17. Korobov A.I., Kokshaiskii A.I., Prokhorov V.M., Evdokimov I.A., Perfilov S.A., Volkov A.D. Mechanical and nonlinear elastic characteristics of polycrystalline AMg6 aluminum alloy and *n*-AMg6/C₆₀ nanocomposite // *Phys. Solid State*. 2016. V. 58. № 12. P. 2472–2480.
18. Mikhailov S.G., Rudenko O.V. A simple bimodular nonlinear element // *Acoust. Phys.* 2018. V. 64. № 3. P. 293–298.
19. Перенечко И.И. *Акустические методы исследования полимеров*. М.: Химия, 1973.
20. Karabutov A.A., Lapshin E.A., Rudenko O.V. Interaction between light waves and sound under acoustic nonlinearity conditions // *J. Exp. Theor. Physics*. 1976. V. 44. № 1. P. 111–121.