

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СЛОЕ С ДЕФЕКТОМ МАЛОГО ХАРАКТЕРНОГО РАЗМЕРА

© 2020 г. А. О. Ватульян^{а, б, *}, О. А. Беляк^{с, **}

^а Южный федеральный университет,
ул. Большая Садовая 105/42, Ростов-на-Дону, 344006 Россия

^б Южный математический институт ВЦ РАН,
ул. Маркуса 22, Владикавказ, 362027 Россия

^с Ростовский государственный университет путей сообщения,
пл. Народного Ополчения 2, Ростов-на-Дону, 344038 Россия

*e-mail: vatumyan@math.rsu.ru

**e-mail: o_bels@mail.ru

Поступила в редакцию 21.04.2019 г.

После доработки 16.10.2019 г.

Принята к публикации 29.10.2019 г.

Рассмотрены задачи о колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью произвольного поперечного сечения под действием нагрузки, приложенной на его поверхности. В случае полостей малого относительного размера предложен асимптотический подход к расчету полей. Дана оценка области применимости асимптотического подхода по сравнению с методом граничных интегральных уравнений, а также сравнение с решением, полученным на основе приближения Борна.

Ключевые слова: колебания полуограниченных тел с полостями, асимптотика, граничные интегральные уравнения

DOI: 10.31857/S0320791920020136

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о колебаниях упругих полуограниченных тел [1–11] достаточно давно привлекают внимание многих исследователей, поскольку анализ динамических процессов весьма важен, например, при оценке динамической прочности элементов тяжело нагруженных транспортных средств, машин и механизмов, в геофизике и горной механике. Отметим, что для изотропных однородных сред динамические процессы в таких структурах хорошо изучены [1, 2], а исследование волновых процессов для сред с более сложной структурой, например, для слоистых [3, 4], функционально-градиентных [5, 6], пористых [7–9] является весьма актуальным и в настоящее время. Одним из важных классов динамических задач теории упругости являются задачи о колебаниях упругих тел с локальными неоднородностями [10–13], такими как полости, включения, трещины. Изучение рассеяния упругих волн на неоднородностях разных типов и форм позволяет устанавливать факт наличия дефекта [14–16], что дает возможность определять тип и положение повреждения в исследуемой структуре. Чаще всего решение таких задач базируется на сведениях их к системам граничных интегральных уравнений [1, 2, 11, 12] при помощи фундаментальных решений или матриц

функций Грина, что позволяет снизить размерность исходной задачи на единицу. Такой подход к решению реализован в настоящей работе. При решении динамических задач теории упругости также применяется метод блочных элементов [3] и гибридные численно-аналитические схемы [10, 13]. На основе решения задач о колебаниях сред с дефектами может быть осуществлен расчет амплитудных значений волновых полей, используемых для идентификации дефекта. В настоящей работе реализован подход, основанный на расчете волнового поля в волноводе с полостью на основе метода граничных элементов [17, 18], асимптотического подхода и приближения Борна, часто используемого в акустике [19, 20], и проведено сравнение результатов.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим установившийся режим колебаний с частотой ω ортотропного упругого слоя толщины h с цилиндрической полостью, не выходящей на его границы, направляющая которой есть гладкая замкнутая кривая l_0 с образующей, параллельной оси Ox_2 . Нижняя грань слоя жестко зашпелена и совпадает с осью Ox_1 , ось Ox_3 направлена перпендикулярно вверх. Оси упругой

симметрии материала совпадают с осями системы координат. Колебания в слое вызваны нагрузкой $\mathbf{p}(x_1, t) = \text{Re}(\mathbf{p}(x_1)e^{-i\omega t})$, приложенной к верхней части границы слоя.

Краевая задача после отделения временного множителя имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl}u_{k,l}, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

$$u_i|_{x_3=0} = 0, \quad \sigma_{i3}|_{x_3=h} = p_i, \quad \sigma_{ij} n_j|_{l_0} = 0, \quad (2)$$

где ρ – плотность среды, C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных материала, удовлетворяющие соотношениям симметрии и положительной определенности, n_j – компоненты единичного вектора нормали к кривой l_0 , внешнего по отношению к области, занятой упругой средой. Замыкает постановку задачи условие излучения волн на бесконечности, при формулировке которого использован принцип предельного поглощения [2].

Исходная задача (1)–(2) в зависимости от типа нагрузки распадается на две: задача об антиплоских колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью (задача 1) и плоская задача о колебаниях слоя с полостью (задача 2). В задаче 1 ненулевой является компонента $u_2(x_1, x_3)$ и в краевой задаче (1)–(2) полагаем $i = 2, j = 1, 3$. Для задачи 2 отличными от нуля являются компоненты $u_i(x_1, x_3), i = 1, 3$ и в краевой задаче (1)–(2) полагаем $i, j = 1, 3$.

Основным способом исследования задач 1, 2 является предварительное сведение их к интегральным уравнениям с нерегулярными ядрами на основе идей теории потенциала. Решения краевых задач 1, 2 построены на основе матриц-функций Грина для слоя $U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \xi), i = 1, 2, 3$, удовлетворяющих однородным граничным условиям на границах, и обобщенной теоремы взаимности [2], где индекс m указывает, что сосредоточенная сила приложена в направлении оси $Ox_m, m = 1, 2, 3$. Функция Грина для ортотропного слоя в случае задачи 1 приведена в работе [21], а для задачи 2 имеет вид:

$$\begin{aligned} U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{4\pi^2 C_{33}} \times \\ &\times \iint_{\Gamma} \frac{\Delta_i^{(m)}}{\Delta} e^{i(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \xi)} d\alpha_1 d\alpha_3 + S_i^{(m)}(\mathbf{x}, \xi), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} i &= 1, 3, \\ (\mathbf{a}, \mathbf{x} - \xi) &= \alpha_1(x_1 - \xi_1) + \alpha_3(x_3 - \xi_3), \\ \Delta &= \begin{vmatrix} \gamma_1\alpha_1^2 + \gamma_5\alpha_3^2 - k^2 & (\gamma_5 + \gamma_7)\alpha_1\alpha_3 \\ (\gamma_5 + \gamma_7)\alpha_1\alpha_3 & \gamma_3\alpha_1^2 + \alpha_3^2 - k^2 \end{vmatrix}, \\ \gamma_1 &= C_{11}/C_{33}, \quad \gamma_5 = C_{55}/C_{33}, \\ \gamma_7 &= C_{13}/C_{33}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\Delta_i^{(m)}, i, m = 1, 3$ – определители, получающиеся путем замены k -го столбца ($k = 1, 2$) в (4) столбцом $g^{(m)} = (\delta_{1m}\delta_{3m})^T, \alpha_i, i = 1, 3$ – параметры преобразования Фурье, Γ – поверхность, всюду совпадающая с плоскостью R^2 , за исключением множества нулей Δ , которые она огибает в соответствии с принципом предельного поглощения. Второе слагаемое в выражении (3) представляет собой некоторую регулярную при $-h + \delta_1 < x_3, \xi_3 < h - \delta_1, \delta_1 > 0$ добавку, обеспечивающую выполнение однородных граничных условий. Надо отметить, что представление функций Грина для ортотропного слоя в виде однократного интеграла по контуру σ в комплексной плоскости [21, 22] удобно использовать при построении решения задачи (1)–(2) путем сведения ее к интегральным уравнениям с нерегулярными ядрами (6), тогда как при решении задачи в рамках асимптотического подхода использовался вид (3).

Поле перемещений в слое под действием поверхностной нагрузки с носителем на отрезке $[a, b]$ для задач 1, 2 имеет вид:

$$\begin{aligned} u_m(\xi) &= u_m^*(\xi) - \int_{l_0} \sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \xi) n_j(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) dl_x, \\ i, j, m &= 1, 2, 3, \\ u_m^*(\xi) &= \int_a^b p_i(x_1) U_i^{(m)}(x_1, h, \xi) dx_1, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \xi)$ – компоненты тензора напряжений, выраженные через функции Грина для слоя $U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \xi), i = 1, 2, 3$.

Поля перемещений в слое (5) представимы в виде суммы двух слагаемых, первое из которых $u_m^*(\xi)$ – поле смещений в среде без дефекта под действием заданной нагрузки (эталонное поле смещений), второе слагаемое обусловлено наличием полости в слое. Таким образом, на основании соотношения (5) может быть рассчитано поле смещений всюду в слое, если найдено поле смещений на границе полости. В настоящей работе поля смещений на контуре полости рассчитаны на основании двух подходов: метод интегральных уравнений и основанный на нем метод граничных элементов (МГЭ), который может быть использован для полостей любой конфигурации, и асимптотический метод для круговых полостей малого относительного радиуса.

Далее сформулированы системы граничных интегральных уравнений (ГИУ), которые за счет специального выбора матриц-функций Грина содержат операторы лишь по границе полости. Системы ГИУ для задачи 1 ($j = 1, 3; i, m = 2$) и задачи 2 ($i, j, m = 1, 3$) имеют вид:

$$\frac{1}{2}u_m(\mathbf{y}) = u_m^*(\mathbf{y}) - \text{v.p.} \int_{l_0} \sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) dl_x, \quad (6)$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_3) \in l_0,$$

где интеграл по l_0 понимается в смысле главного значения по Коши, а в случае нерегулярной кривой l_0 коэффициент при $u_m(\mathbf{y})$ отличен от $1/2$ и зависит от угла между касательными в особой точке и упругих постоянных материала [22].

В настоящей работе численная реализация систем ГИУ (6) с нерегулярным ядром на основе МГЭ [17, 18] выполнена следующим образом. Гладкая граница аппроксимировалась N -угольником $l = \bigcup_{q=1}^N l_q$, где функция $u_m(x_1, x_3)$ постоянна в пределах каждого из элементов l_q , а в качестве узлов выбраны середины соответствующих отрезков. Число ГЭ N выбиралось таким образом, чтобы было не менее 5–6 элементов на длину волны. Таким образом, системы ГИУ (6) сводились к линейным алгебраическим системам относительно $u_{mq} = u_m(y_{1q}, y_{3q})$. Полученные алгебраические системы относительно узловых смещений на контуре хорошо обусловлены, имеют явное диагональное преобладание. Отметим, что МГЭ позволяет рассчитывать поле перемещений на поверхности слоя в случае произвольной формы и размера дефекта. Процедура решения ГИУ (6) достаточно сложна и требует значительной вычислительной работы, однако, если сечение полости представляет собой окружность малого характерного размера, то схему расчета волновых полей можно значительно упростить на основе асимптотического анализа.

Асимптотический подход к решению многопараметрической задачи (1)–(2) о колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью, поперечное сечение которой представляет собой окружность радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{30})$, был реализован в области изменения безразмерных параметров:

$$\varepsilon_1 \ll 1, \quad \varepsilon_* < \varepsilon_2 < 1, \quad (7)$$

где $\varepsilon_1 = r/h$, $\varepsilon_2 = \omega r \sqrt{\rho/C}$, где $C = C_{44}$ для задачи 1, $C = C_{33}$ для задачи 2, а ε_* соответствует частоте запитывания, когда в слое нет бегущих волн.

Поля перемещений, всюду в области, занятой упругой средой, отличные от соотношений (5) и полученные на основании обобщенной теоремы взаимности, имеют вид:

$$u_m(\xi) = u_m^*(\xi) - \int_{l_0} K_{im}(\mathbf{x}, \xi) (u_i(\mathbf{x}) - u_i(\xi)) dl_x - \rho \omega^2 \int_{S_0} U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \xi) dS_x u_i(\xi), \quad i, j, m = 1, 2, 3, \quad (8)$$

$$K_{im}(\mathbf{x}, \xi) = \sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \xi) n_j(\mathbf{x}),$$

где S_0 – плоская область, ограниченная гладкой замкнутой кривой l_0 . На основании представления (8) при предельном переходе $\xi \rightarrow \mathbf{y} \in l_0$ получена следующая система ГИУ:

$$u_m(\mathbf{y}) = u_m^*(\mathbf{y}) - \int_{l_0} K_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (u_i(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{y})) dl_x - \rho \omega^2 \int_{S_0} U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_x u_i(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in l_0, i, j, m = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Надо отметить, что система ГИУ (9) имеет регулярные подынтегральные функции в отличие от уравнений (6), а криволинейный интеграл по контуру l_0 существует как несобственный, что позволяет при дискретизации избежать вычисления сингулярных интегралов. Функцию $K_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых соответствует статическому случаю ($\varepsilon_2 = 0$), а второе – некоторая добавка:

$$K_{im}(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}_0 + r\zeta) = K_{im}^0(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}_0 + r\zeta) + K_{im}^1(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}_0 + r\zeta),$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\eta} = \{\cos \theta, \sin \theta\}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + r\zeta,$$

$$\zeta = \{\cos \psi, \sin \psi\}, \quad \theta, \psi \in [0, 2\pi].$$

При этом имеют место следующие оценки:

$$K_{im}^1(\theta, \psi) = O(\varepsilon_2^2), \quad K_{im}^0(\theta, \psi) = \varepsilon_1^{-1} F_{im}(\theta, \psi) + O(\varepsilon_1),$$

$$\rho \omega^2 \int_{S_0} U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_x = O(\varepsilon_2^2),$$

$$F_{im}(\theta, \psi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{A_{im}(\theta, \varphi)}{A(\varphi) (\cos(\theta - \varphi) - \cos(\varphi - \psi))} d\varphi.$$

Выше введены следующие обозначения для задачи 1:

$$A_{22}(\theta, \varphi) = v \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi,$$

$$A(\varphi) = v \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi,$$

а для задачи 2:

$$A_{11}(\theta, \varphi) = (\gamma_1 \gamma_5 \cos^3 \varphi + G \cos \varphi \sin^2 \varphi) \cos \theta + (\gamma_5 \sin^3 \varphi - \gamma_5 \gamma_7 \cos^2 \varphi \sin \varphi) \sin \theta,$$

$$A_{13}(\theta, \varphi) = (\gamma_5 \sin^3 \varphi - \gamma_5 \gamma_7 \cos^2 \varphi \sin \varphi) \cos \theta + (\gamma_5 \gamma_7 \cos^3 \varphi - \gamma_5 \cos \varphi \sin^2 \varphi) \sin \theta,$$

$$A_{31}(\theta, \varphi) = (\gamma_5 \gamma_7 \sin^3 \varphi - \gamma_5 \gamma_1 \cos^2 \varphi \sin \varphi) \cos \theta + (\gamma_1 \gamma_5 \cos^3 \varphi - \gamma_5 \gamma_7 \cos \varphi \sin^2 \varphi) \sin \theta,$$

$$A_{33}(\theta, \varphi) = (\gamma_1 \gamma_5 \cos^3 \varphi - \gamma_5 \gamma_7 \cos \varphi \sin^2 \varphi) \cos \theta + (\gamma_5 \sin^3 \varphi + G \cos^2 \varphi \sin \varphi) \sin \theta,$$

$$A(\varphi) = \gamma_5 \sin^4 \varphi + G \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \gamma_1 \gamma_5 \cos^4 \varphi,$$

$$G = \gamma_1 - \gamma_5 \gamma_7 - \gamma_7^2.$$

Поля смещений на контуре полости l_0 представимы в виде разложения по малому параметру ε_1 :

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}_0) + \varepsilon_1(u_{m,1}(\mathbf{x}_0) \cos \theta + u_{m,3}(\mathbf{x}_0) \sin \theta) + O(\varepsilon_1^2), \quad m = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Коэффициенты в разложении (10) вычислены аналитически и для задачи 1 приведены в работах [11, 12], а для задачи 2 имеют вид:

$$\begin{aligned} u_m(\mathbf{x}_0) &= u_m^*(\mathbf{x}_0), \\ u_{1,1}(\mathbf{x}_0) &= (I_3 u_{3,3}^*(\mathbf{x}_0) - (1 - I_6) u_{1,1}^*(\mathbf{x}_0)) / \Delta_1, \\ u_{3,3}(\mathbf{x}_0) &= ((1 - I_1) u_{3,3}^*(\mathbf{x}_0) + I_4 u_{1,1}^*(\mathbf{x}_0)) / \Delta_1, \\ u_{1,3}(\mathbf{x}_0) &= (-I_2 u_{3,1}^*(\mathbf{x}_0) + (1 - I_5) u_{1,3}^*(\mathbf{x}_0)) / \Delta_2, \\ u_{3,1}(\mathbf{x}_0) &= (-(1 - I_2) u_{3,1}^*(\mathbf{x}_0) - (1 - I_5) u_{1,3}^*(\mathbf{x}_0)) / \Delta_2 J, \\ \Delta_1 &= I_1 I_6 - I_3 I_4 - I_1 - I_6 + 1, \quad \Delta_2 = I_2 + I_5 - 1, \\ I_1 &= I(\gamma_1 \gamma_5 - G, G, 0), \\ I_2 &= I(\gamma_5 \gamma_7 + \gamma_5, -\gamma_5 \gamma_7 - 2\gamma_5, \gamma_5), \\ I_3 &= I(\gamma_5 \gamma_7 + \gamma_5, -\gamma_5, 0), \\ I_4 &= I(\gamma_1 \gamma_5 + \gamma_1 \gamma_7, -\gamma_1 \gamma_5 - \gamma_1 \gamma_7, 0), \\ I_5 &= I(\gamma_1 \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_7, -\gamma_5 \gamma_7, 0), \\ I_6 &= I(\gamma_5 - G, G - 2\gamma_5, \gamma_5). \end{aligned} \quad (11)$$

Интеграл $I(C_1, C_2, C_3) = \frac{C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2 + C_3 \Psi_3}{\Lambda}$ вычислен аналитически по теории вычетов, где

$$\begin{aligned} \Lambda &= w_0 \sqrt{\frac{w_1^3}{\gamma_5^3}}, \quad \Psi_1 = \sqrt{\left(\frac{w_1}{\gamma_5}\right)^3} + \\ &+ w_1 \frac{(s_1^2 - 2\gamma_1 \gamma_5)(\gamma_5 \sqrt{\gamma_1} - s_1 + \gamma_1 \gamma_5) - s_1 w_1 \gamma_1 \gamma_5}{\gamma_1^2 \gamma_5^4}, \\ \Psi_2 &= \frac{w_0}{2\gamma_1 \gamma_5^3} \sqrt{4\gamma_5^2 - s_1^2} \sqrt{4\gamma_1 \gamma_5^2 - s_1^2}, \\ \Psi_3 &= \frac{w_0}{\gamma_5^2} w_1 (1 + 1/\sqrt{\gamma_1}), \\ w_0 &= \gamma_1 \gamma_5 + \gamma_5 - s_1, \quad w_1 = 2\gamma_5 \sqrt{\gamma_1} - s_1, \\ s_1 &= \gamma_1 - 2\gamma_5 \gamma_7 - \gamma_7^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для задач 1, 2 получено явное асимптотическое представление полей смещений на контуре полости, минуя процедуру дискретизации ГИУ (6) на основе МГЭ. Поля перемещений на поверхности $u_m(\xi_1, h)$, $m = 1, 2, 3$, построенные в рамках асимптотического подхода, в дальнейшей от дефекта зоне ($x_1 < \xi_1$), имеют вид:

$$u_m(\xi_1, h) = u_m^*(\xi_1, h) - \sum_{p=1}^M A_p^{(m)}(u_m(x)) e^{i\alpha_{1p}^* \xi_1} + O(e^{-\gamma \xi_1}), \quad \gamma > 0, \quad \xi_1 > x_1 > 0, \quad (12)$$

где M – число распространяющихся волн в слое, α_{1p}^* – корни дисперсионного уравнения. Амплитуды бегущих волн на поверхности слоя для задачи 1 имеют вид [12], а для задачи 2 имеют вид:

$$\begin{aligned} A_p^{(m)} &= \frac{\varepsilon_1^2 \pi i \exp(-i\alpha_{1p}^* x_{10})}{2\psi(\alpha_{1p}^*)} \times \\ &\times \left[\Phi_1^{(m)}(x_{30}) u_1^*(\mathbf{x}_0) + \Phi_3^{(m)}(x_{30}) u_3^*(\mathbf{x}_0) + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1,3} \Omega_k^{(m)}(x_{30}) u_{1,k}(\mathbf{x}_0) + \Lambda_k^{(m)}(x_{30}) u_{3,k}(\mathbf{x}_0) \right], \\ &m = 1, 3. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражения $\psi(\alpha_{1p}^*)$, $\Phi_k^{(m)}(x_{30})$, $\Omega_k^{(m)}(x_{30})$, $\Lambda_k^{(m)}(x_{30})$ не приводятся в виду их громоздкости, а $u_{s,k}(\mathbf{x}_0)$, $s, k = 1, 3$ заданы формулами (11).

Надо отметить, что в рамках приближения Борна, широко используемого в акустике [19, 20], перемещения на контуре заменяются эталонными полями смещений в точке \mathbf{x}_0 , поэтому амплитуды полей перемещений на поверхности слоя в этом приближении не учитывают изменчивость полей смещений на контуре. В рамках такого приближения однократного рассеяния поля смещений на контуре полости определяются соотношением (10) при удержании лишь первого члена в разложении полей. В свою очередь, в соотношении (13) для амплитуд отсутствуют слагаемые, содержащие производные от эталонных полей $u_m^*(\mathbf{x}_0)$, $m = 1, 3$, а их выражение имеет вид:

$$\begin{aligned} A_p^{(m)} &= \frac{\varepsilon_1^2 \pi i \exp(-i\alpha_{1p}^* x_{10})}{2\psi(\alpha_{1p}^*)} \times \\ &\times \left[\Phi_1^{(m)}(x_{30}) u_1^*(\mathbf{x}_0) + \Phi_3^{(m)}(x_{30}) u_3^*(\mathbf{x}_0) \right], \quad m = 1, 3. \end{aligned} \quad (14)$$

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

На основании соотношений (5), (12)–(14) построены поля перемещений $v_m(\xi_1, h) = u_m(\xi_1, h) - u_m^*(\xi_1, h)$, $m = 1, 2, 3$ на поверхности слоя $x_3 = h$, обусловленные лишь наличием полости. Проведен ряд численных экспериментов по расчету волновых полей на поверхности слоя для случая цилиндрической полости кругового сечения малого относительного размера на основании трех подходов: МГЭ, асимптотического подхода и приближения Борна.

В расчетах приняты следующие значения упругих постоянных для диоксида гафния HfO_2 $C_{11} = 502$, $C_{13} = 159$, $C_{33} = 597$, $C_{44} = 78$, $C_{55} = 90$, $C_{66} = 111$ (ГПа), $\rho = 13310$ кг/м³ [22]. Колебания в слое вызваны сосредоточенной нагрузкой $\mathbf{p} = \{0, -p_0/C_{44}, 0\}$ и $\mathbf{p} = \{0, 0, -p_0/C_{33}\}$ для задач 1 и 2 соответственно, которая приложена в точке $(0, h)$.

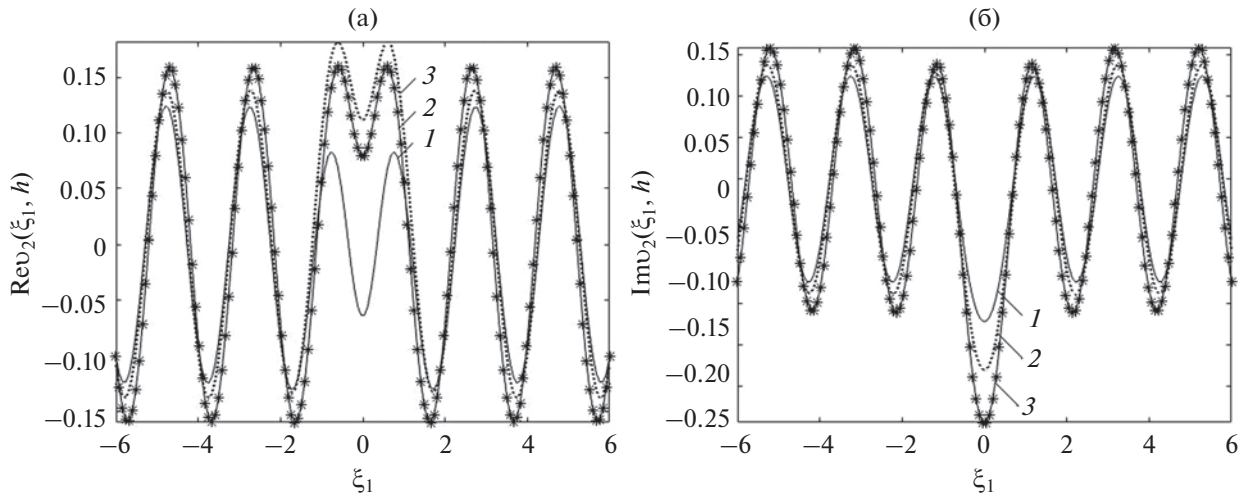


Рис. 1. Действительная и мнимая части поля перемещений $v_2(\xi_1, h)$, рассчитанные на основе МГЭ (1), асимптотического подхода (2), приближения Борна (3) для значений параметров $\varepsilon_1 = 0.24$, $\varepsilon_2 = 0.98$.

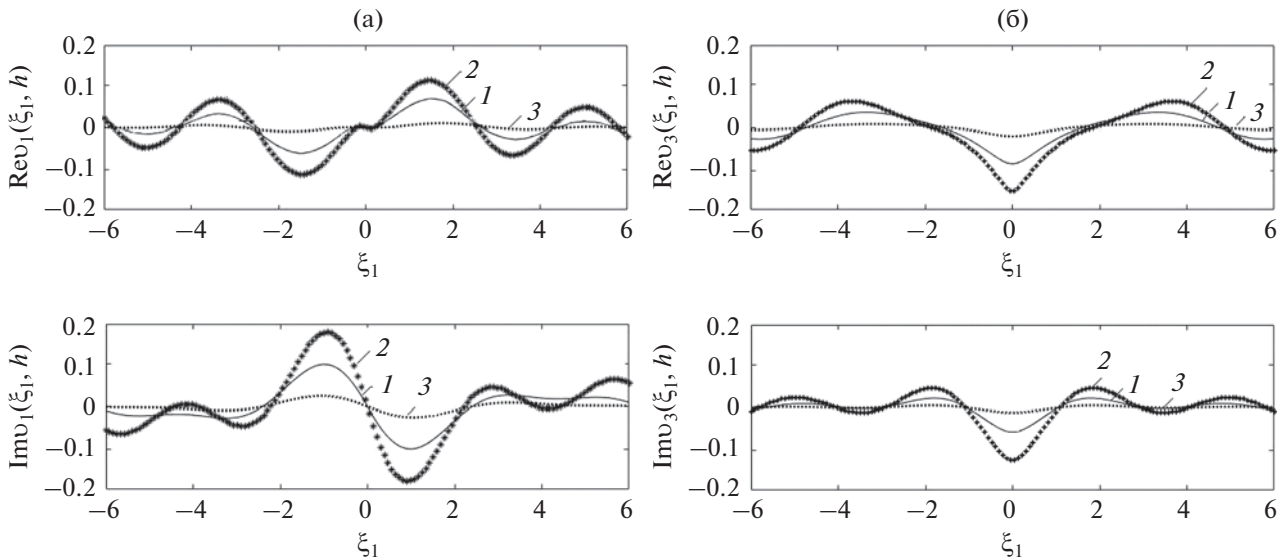


Рис. 2. (а) – Действительная и мнимая части поля перемещений $v_1(\xi_1, h)$, рассчитанные на основе МГЭ (1), асимптотического подхода (2), приближения Борна (3) для значений параметров $\varepsilon_1 = 0.15$, $\varepsilon_2 = 0.3$. (б) – Действительная и мнимая части поля перемещений $v_3(\xi_1, h)$, рассчитанные на основе МГЭ (1), асимптотического подхода (2), приближения Борна (3) для значений параметров $\varepsilon_1 = 0.15$, $\varepsilon_2 = 0.3$.

Направляющая цилиндрической полости l_0 – окружность с центром в точке $(0, h/2)$. Число граничных элементов $N = 12$. На рис. 1–4 приведены графики полей перемещений на поверхности слоя $v_m(\xi_1, h)$, $m = 1, 2, 3$, рассчитанных тремя способами для задач 1 и 2, при этом сплошная линия соответствует расчетам по МГЭ, графики полей, полученных на основе асимптотического подхода, изображены сплошной линией с маркером “*” и штриховой линией отмечены поля, полученные в рамках приближения Борна. На рис. 1–2 пред-

ставлены графики, соответствующие случаю одной распространяющейся моды в слое для значений параметров $\varepsilon_1 = 0.24$, $\varepsilon_2 = 0.98$ (задача 1) и $\varepsilon_1 = 0.15$, $\varepsilon_2 = 0.3$ (задача 2).

На рис. 3–4 представлены графики полей перемещений на поверхности слоя $v_m(\xi_1, h)$, $m = 1, 2, 3$ для двух распространяющихся мод при следующих значениях параметров $\varepsilon_1 = 0.15$, $\varepsilon_2 = 0.98$ (задача 1) и $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.4$ (задача 2).

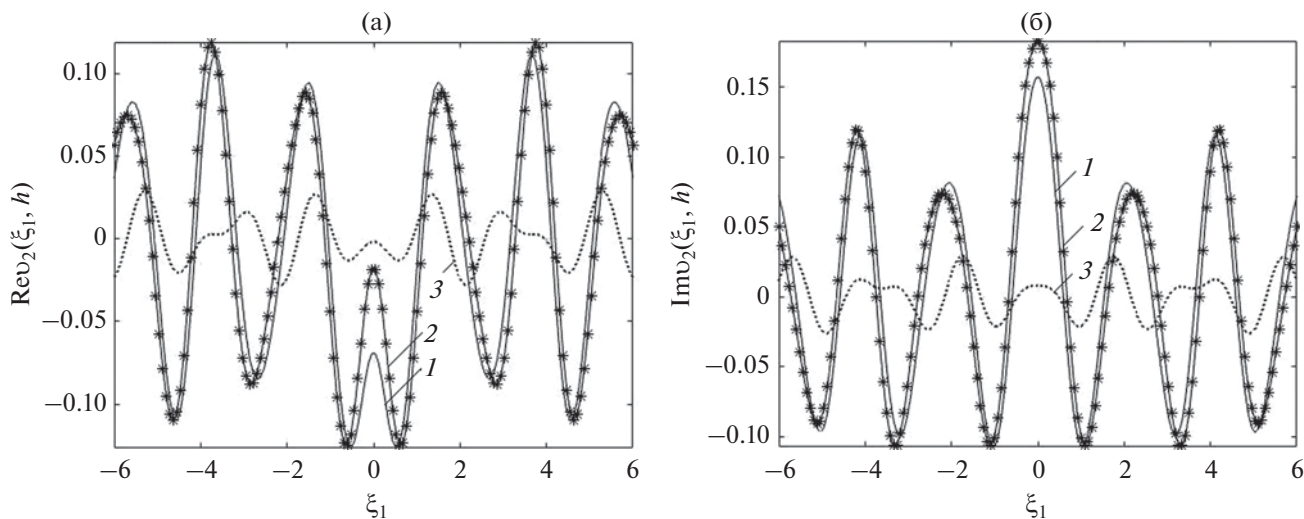


Рис. 3. Действительная и мнимая части поля перемещений $v_2(\xi_1, h)$, рассчитанные на основе МГЭ (1), асимптотического подхода (2), приближения Борна (3) для значений параметров $\epsilon_1 = 0.15$, $\epsilon_2 = 0.98$.

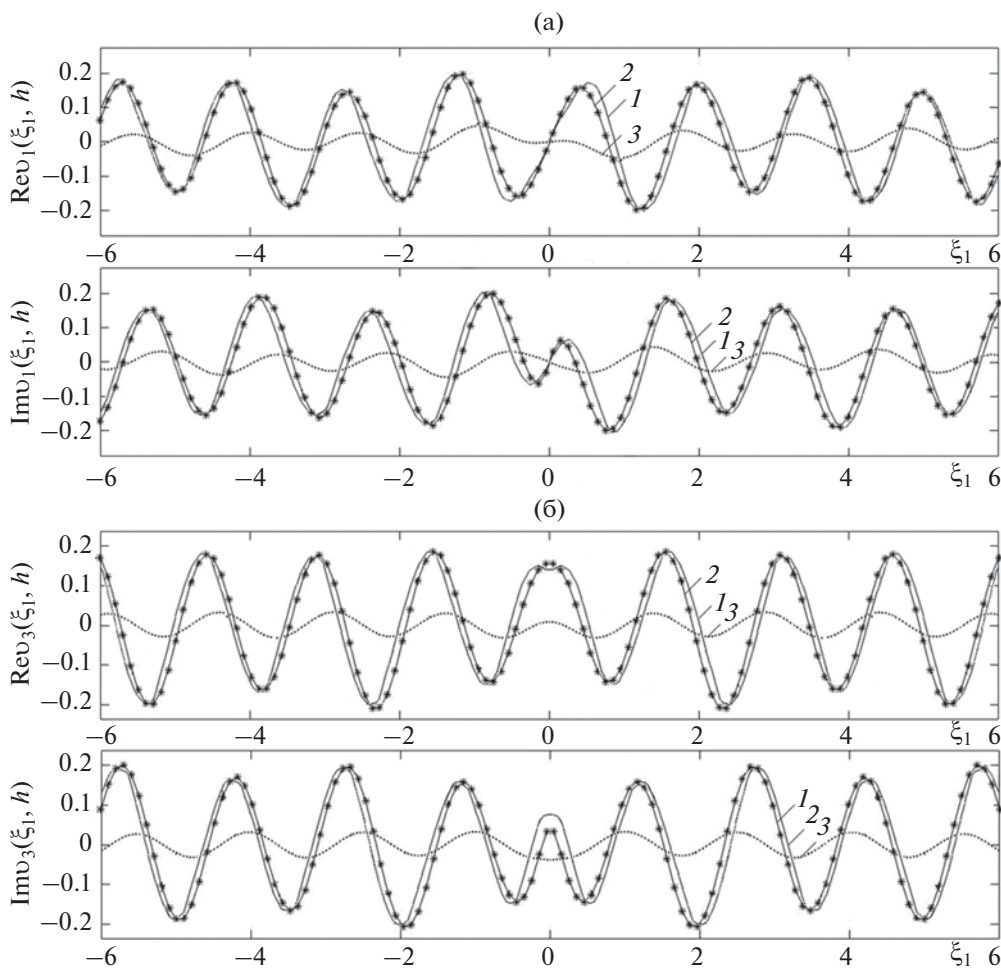


Рис. 4. (а) – Действительная и мнимая части поля перемещений $v_1(\xi_1, h)$, рассчитанные на основе МГЭ (1), асимптотического подхода (2), приближения Борна (3) для значений параметров $\epsilon_1 = 0.1$, $\epsilon_2 = 0.4$. (б) – Действительная и мнимая части поля перемещений $v_3(\xi_1, h)$, рассчитанные на основе МГЭ (1), асимптотического подхода (2), приближения Борна (3) для значений параметров $\epsilon_1 = 0.1$, $\epsilon_2 = 0.4$.

ВЫВОДЫ

На основе численных экспериментов определена область корректной работы асимптотического подхода для задач 1 и 2 для среднезаглубленных полостей малого поперечного размера и приближения Борна при расчете волновых полей в дальней зоне. Эта область описывается следующими неравенствами:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 < 0.24 \\ \varepsilon_2 < 1 \end{cases} \text{ для задачи 1 и}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 < 0.15 \\ \varepsilon_2 < 1 \end{cases} \text{ для задачи 2 (относительное расхождение результатов не превышало 10\%).}$$

Как видно из графиков на рис. 1, на частотах, соответствующих одной распространяющейся моде в слое, волновое поле в дальней от дефекта зоне, рассчитанное на основе приближения Борна, практически совпадает с полем, рассчитанным на основе МГЭ. На тех частотах, для которых имеются две распространяющиеся моды, приближение Борна значительно отличается от расчетов по МГЭ. В то же время поле на поверхности, рассчитанное на основе асимптотического подхода, отличается от поля, полученного на основе МГЭ, не более, чем на 4%. Отметим, что для задачи 2 для любых частот, соответствующих распространяющимся модам в слое, наблюдается качественное и количественное отличие полей перемещений, построенных на основании приближения Борна от полей, рассчитанных на основе МГЭ и асимптотического подхода.

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы” при финансовой поддержке государства в лице Министерства науки и высшего образования России (идентификатор проекта RFMEFI60718X0203).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. М.: Наука, 1981. 282 с.
2. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
3. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова В.О. О колебаниях слоистых упругих сред с рельефной границей // ПММ. 2010. Т. 74. № 6. С. 890–894.
4. Lei Huang, Jianwen Liang, Chengqing Wu. A three-dimensional indirect boundary integral equation method for modeling elastic wave scattering in a layered half-space // Int. J. Solids Structures. 2019. V. 169. P. 81–94.
5. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И., Жанг Ч. Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 3. С. 370–385.
6. Калинин В.В., Белянкова Т.И. О динамике среды с непрерывно изменяющимися по глубине свойствами // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. С. 46–49.
7. Gusakov D., Vatul'yan A. Dispersion properties of inhomogeneous poroelastic layer // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2018. V. 98. № 4. P. 532–541.
8. Суворова Т.В., Беляк О.А., Усошин С.А. Волновое поле, генерируемое в слоистом полупространстве движущейся осциллирующей нагрузкой // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. № 1. С. 53–61.
9. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И. Влияние пористости на характеристики волн релеевского типа в многослойном полупространстве // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 2. С. 234–245.
10. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А. Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 1. С. 3–12.
11. Ватульян А.О., Беляк О.А. К реконструкции малых полостей в упругом слое // Дефектоскопия. Уральское отделение РАН. 2006. № 10. С. 33–39.
12. Ватульян А.О., Беляк О.А. О различных способах реконструкции полости в ортотропном слое // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 3(295). С. 181–189.
13. Falleta S., Monegato G., Scuderi L. On the discretization and application of two space–time boundary integral equations for 3D wave propagation problems in unbounded domains // Applied Numerical Mathematics. 2018. V. 124. P. 22–43.
14. Гурбатов С.Н., Грязнова И.Ю., Иващенко Е.Н. Исследование обратного рассеивания акустических волн дискретными неоднородностями разных размеров // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 2. С. 203–207.
15. Буров В.А., Шуруп А.С., Румянцева О.Д., Зотов Д.И. Функционально-аналитическое решение задачи об акустической томографии по данным от точечных преобразователей // Изв. РАН. Серия физическая. 2012. Т. 76. № 12. С. 1524–1529.
16. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.
17. Бребия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
18. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
19. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
20. Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989. 149 с.
21. Ватульян А.О., Суворова О.А. Об обратной задаче для упругого слоя с полостью // Экологический вестник научных центров черноморского сотрудничества (ЧЭС). 2005. № 1. С. 10–16.
22. Ватульян А.О., Гусева И.А., Сюнякова И.М. О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // Изв. СКНЦ. Сер. естеств. науки. 1989. № 2. С. 81–85.
23. Caravaca M.A., Mino J.C., Perez V.J., Casali R.A., Ponce C.A. Ab initio study of the elastic properties of single and polycrystal TiO₂, ZrO₂ and HfO₂ in the cotunnite structure // J. Phys. Condens. Matter. 2009. V. 21(1). P. 1–11.