

УДК 534.2

## МЕТОД СОЗДАНИЯ АБСОЛЮТНО ПЛОТНЫХ ФАЗИРОВАННЫХ РЕШЕТОК ДЛЯ НЕИНВАЗИВНОЙ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ХИРУРГИИ С КОНТРОЛЕМ СТЕПЕНИ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ

© 2020 г. П. Б. Росницкий<sup>а, \*</sup>, О. А. Сапожников<sup>а</sup>, Л. Р. Гаврилов<sup>б, \*\*</sup>, В. А. Хохлова<sup>а</sup><sup>а</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
ГСП-1, Ленинские горы, Москва 119991 Россия<sup>б</sup>АО «Акустический институт им. акад. Н.Н. Андреева»,  
ул. Шверника 4, Москва, 117036 Россия

\*e-mail: pavrosni@yandex.ru

\*\*e-mail: gavrilo.1938@mail.ru

Поступила в редакцию 26.11.2019 г.

После доработки 26.11.2019 г.

Принята к публикации 25.02.2020 г.

При разработке фазированных антенных решеток для использования в неинвазивной ультразвуковой хирургии требуется обеспечить максимально возможную мощность при заданных размерах решетки. При этом необходимо учесть ограничение на максимально допустимую интенсивность ультразвука на излучающих элементах и обеспечить подавление паразитных дифракционных максимумов в структуре излучаемого поля. Указанная задача может быть решена путем нерегулярного расположения элементов при максимально возможной плотности заполнения ими поверхности решетки. В настоящей работе разработана модификация метода абсолютно плотного заполнения решетки с мозаичной непериодической структурой на основе ограничения механизма релаксации в итерационном алгоритме построения решетки. Создана компьютерная модель, позволяющая контролировать степень нерегулярности расположения элементов решетки. Проведена проверка устойчивости низкого уровня паразитных дифракционных максимумов для различных случайных реализаций расположения элементов путем создания статистического ансамбля из 500 моделей решеток. Продемонстрированы преимущества рассмотренных решеток по сравнению с существующими моделями плотных решеток.

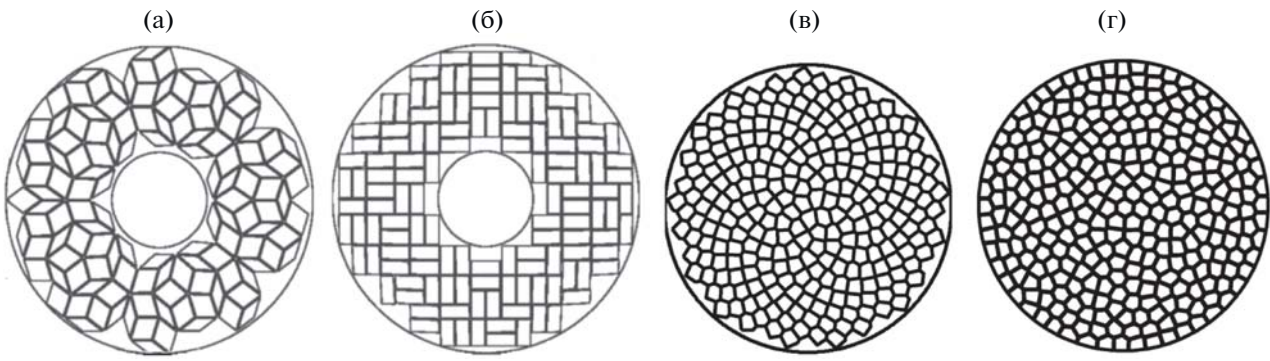
*Ключевые слова:* медицинская акустика, фокусированный ультразвук высокой интенсивности, многоэлементные решетки, интеграл Рэлея

DOI: 10.31857/S0320791920040097

### ВВЕДЕНИЕ

В современной неинвазивной хирургии, основанной на использовании высокоинтенсивного фокусированного ультразвука, широко применяются многоэлементные фазированные решетки [1, 2], излучающие элементы которых обычно располагаются на поверхности сферического сегмента [3, 4]. Для многих клинических приложений критическим фактором является необходимость достижения высокой акустической мощности решетки для обеспечения необходимых для проведения операции уровней интенсивности в фокусе. Заметные потери мощности ультразвукового пучка возникают, например, при облучении мозга через кости черепа [5–7] или при разрушении глубоко расположенных опухолей поджелудочной железы [8]. Указанные потери могут быть

скомпенсированы увеличением общей мощности решетки. Принципиальным ограничением при этом является то, что интенсивность на пьезоэлектрических элементах не может превышать предельно допустимых значений, составляющих около 30–40 Вт/см<sup>2</sup> [4, 9, 10]. С учетом этого ограничения, одним из основных подходов к увеличению акустической мощности решетки заданных размеров является увеличение ее активной (излучающей) поверхности, т.е. максимизация коэффициента заполнения  $\Psi = (\Sigma_{\text{акт}}/\Sigma) \times 100\%$ , где  $\Sigma_{\text{акт}}$  – общая площадь всех излучающих элементов,  $\Sigma$  – полная площадь поверхности решетки. При создании модели решетки нужно также учитывать необходимость непериодического расположения элементов на ее поверхности для подав-



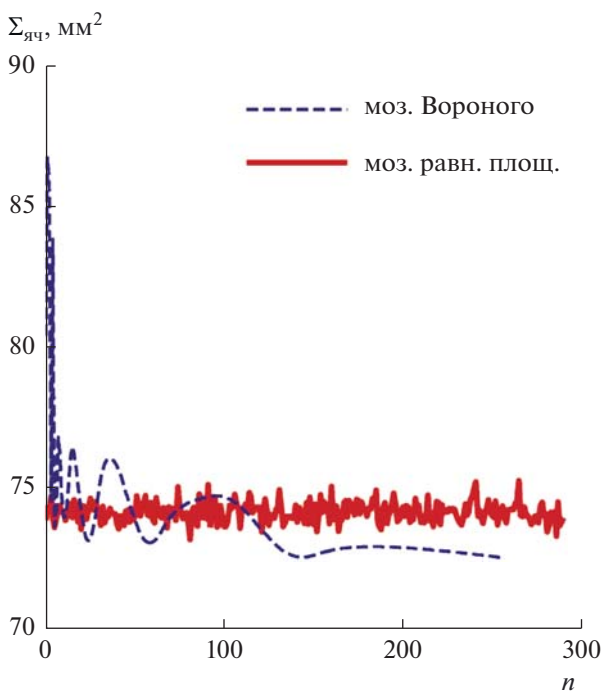
**Рис. 1.** Эскизы решеток с различными типами мозаичного заполнения элементами: (а) – мозаика Пенроуза, (б) – мозаика с прямоугольными элементами, (в) – мозаика Вороного, построенная на спирали Ферма, (г) – абсолютно плотная мозаика с ячейками равной площади.

ления побочных дифракционных максимумов поля, формирующихся при электронном перемещении фокуса [11–13]. Кроме того, важно обеспечить одинаковость площадей отдельных элементов, поскольку различия в площади усложняют согласование источников электрической мощно-

сти с элементами и ухудшают качество ультразвукового поля при электронном перемещении фокуса.

В последнее десятилетие предпринимались различные попытки увеличения плотности заполнения поверхности решеток путем организации элементов в виде мозаик с различным замощением. В работе [14] были предложены две конфигурации решеток, основанные на мозаике Пенроуза (коэффициент заполнения  $\Psi = 70\%$  при зазоре 0.5 мм между элементами) и паркете аперриодически расположенных прямоугольников ( $\Psi = 71\%$  при зазоре 0.5 мм) (рис. 1а, 1б, соответственно). Недавно была предложена модель решетки с коэффициентом заполнения около  $\Psi = 78\%$  при зазоре 0.5 мм между элементами (рис. 1в) [15]. Ее элементы имеют форму ячеек мозаики Вороного, расположенных на спирали Ферма, поэтому в англоязычной литературе решетка получила название Voronoi Tessellation Fermat's Spiral Array или VTFS-решетка. Такие решетки уже используются на практике [16]. Несмотря на высокую плотность заполнения VTFS-решетки, ее конструкция не обеспечивает максимально возможный коэффициент заполнения из-за пустот на периферии излучателя (рис. 1в). Кроме того, многоугольные ячейки разбиения Вороного, применяемого при построении решетки, отличаются по площади. Штриховая линия на графике рис. 2 изображает зависимость площади ячейки  $\Sigma_{\text{яч}}$  от ее номера  $n$ , причем номера упорядочены по мере удаления центра масс ячейки от центра решетки. Видно, что максимальное различие между площадями ячеек составляет 19% от средней площади ячейки, причем наиболее сильное отличие проявляется для центральных ячеек.

В 2018 г. авторами данной работы был предложен новый класс мозаичных решеток с максимальной достижимой плотностью заполнения поверхности элементами ( $\Psi = 100\%$  без учета технологического зазора между элементами), т.е. аб-

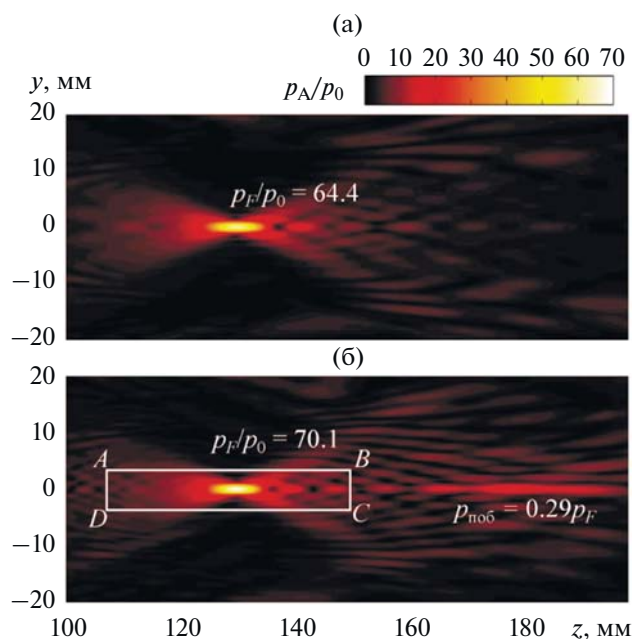


**Рис. 2.** Зависимость площади ячейки  $\Sigma_{\text{яч}}$  от ее номера  $n$  для разбиения поверхности решетки на ячейки мозаики Вороного, построенной на спирали Ферма (пунктирная линия), и мозаики с ячейками равной площади (сплошная линия). Обе мозаики имеют одинаковую среднюю площадь ячейки  $74 \text{ мм}^2$  и построены на поверхности сферического сегмента с радиусом кривизны  $F = 160 \text{ мм}$  и апертурой  $D = 160 \text{ мм}$ . Номера ячеек  $n$  упорядочены в соответствии с их удаленностью от центра сегмента.

солютно плотных решеток (рис. 1г) [17]. За основу была взята концепция случайного расположения элементов (рандомизации) [11, 18]. При этом использовалась мозаика с ячейками одинаковой площади. Равенство площадей обеспечивается специфическим алгоритмом построения мозаики, описанным в статье [19].

Рис. 2 иллюстрирует разброс площадей элементов двух плотных решеток с мозаичным расположением элементов – VTFS-решетки [15] и абсолютно плотной решетки с ячейками одинаковой площади [17]. Обе решетки имеют одинаковый внешний контур и одинаковую среднюю площадь элементов – см. рис. 1в и 1г. Благодаря отсутствию незаполненных краевых участков количество элементов во второй решетке (291) превышает количество элементов в первой (256). На рис. 2 площади элементов абсолютно плотной решетки показаны сплошной кривой, а площади элементов VTFS-решетки – штриховой линией. Заметим, что алгоритм построения мозаики с ячейками заданной площади является численным, поэтому равенство площадей элементов является приблизительным: максимальное различие между площадями ячеек составляет 2.8% от средней площади ячейки. При необходимости различие в площади может быть уменьшено до требуемого уровня путем увеличения количества точек, используемых в алгоритме разбиения (см. ниже). В отличие от мозаики с ячейками равной площади, мозаика VTFS характеризуется гораздо большим разбросом площадей элементов, особенно вдали от края. В рассмотренном примере максимальное отклонение площади элемента от средней составляет 19%.

Несмотря на то, что элементы таких абсолютно плотных решеток расположены случайным образом, наружный слой ячеек у внешней границы решетки неизбежно имеет квазикольцевую структуру, в связи с чем слои, близкие к наружному, также выстраиваются в структуру, напоминающую кольцевую. Указанный эффект частичной регулярности расположения элементов почти не проявляется у решеток с большим количеством элементов  $N > 256$ , однако может усиливаться при уменьшении числа элементов. На рис. 3 проявление этого побочного эффекта проиллюстрировано на распределении безразмерной амплитуды давления  $p_A/p_0$  в плоскости  $zy$  ( $x = 0$ ), проходящей через ось решетки  $z$ . Здесь  $p_0$  – давление на элементе,  $x, y$  – оси декартовой системы координат, перпендикулярные оси решетки  $z$ , с началом координат в центре ее симметрии. Сравниваются VTFS-решетка (рис. 3а) и абсолютно плотная решетка (рис. 3б). При смещении фокуса от центра кривизны ( $F = 160$  мм) на 30 мм вдоль оси решетки к ее поверхности побочные максимумы на оси VTFS-решетки, у которой отсутствует кольцевая



**Рис. 3.** Двумерные распределения нормированной амплитуды акустического давления  $p_A/p_0$  в плоскости  $zy$ , содержащей ось решетки, (а) – для существующей VTFS-решетки и (б) – абсолютно плотной решетки. На обоих распределениях над фокальной областью указаны безразмерные значения амплитуды в фокусе  $p_F/p_0$ . На распределении (б) указана амплитуда  $p_{\text{поб}}/p_0$  в самом интенсивном из побочных максимумов, расположенных вне прямоугольной окрестности фокуса ABCD. Продольный размер и положение контура ABCD выбраны так, чтобы наряду с основным фокусом внутрь него попадали два предфокальных и два постфокальных дифракционных максимума, расположенных на оси. Аналогично, поперечная граница указанного прямоугольника соответствует условию, что внутрь области ABCD с обеих сторон попадают по два боковых дифракционных максимума.

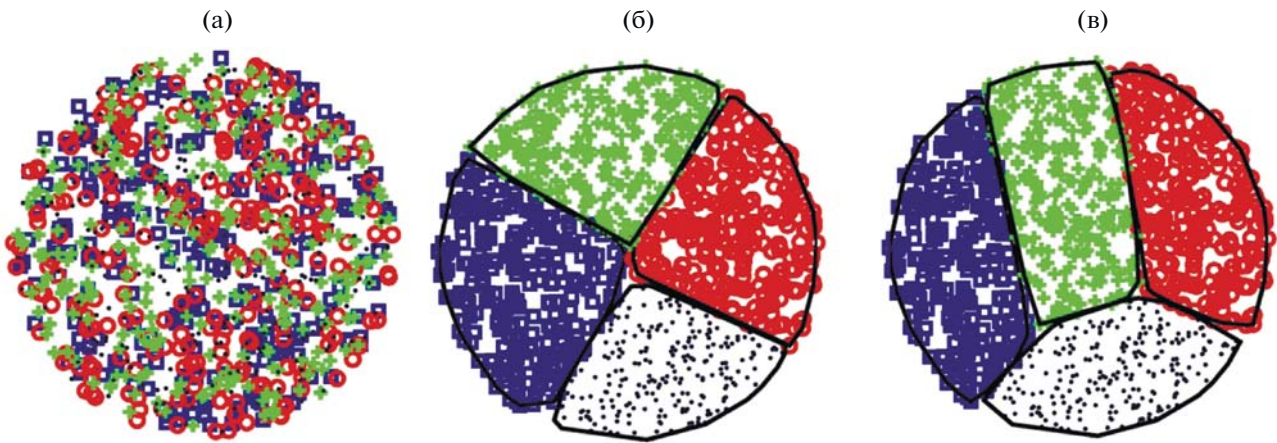
периодичность, почти не проявляются, а в поле абсолютно плотной решетки они хорошо различимы.

Целью данной работы является модификация метода создания абсолютно плотных случайных решеток для ослабления эффекта появления периодичности в расположении элементов и соответствующего уменьшения уровня побочных максимумов при электронном смещении фокуса.

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Предлагаемая модификация метода построения абсолютно плотной решетки имеет пошаговую реализацию, причем его первая часть совпадает с недавно предложенным методом [17]. Для иллюстрации сначала рассмотрим последова-





**Рис. 4.** Иллюстрация алгоритма для осуществления 100%-го заполнения поверхности решетки элементами в виде многоугольников с одинаковой площадью. Рассмотрен случай четырех элементов. Различным типом маркеров (“плюс”, “кружок”, “точка” и “квадрат”) представлены соответствующие этим элементам совокупности точек. На левом рисунке (а) показано исходное расположение точек с полным перемешиванием (0-я итерация). На центральной и правом рисунках показан конечный результат разделения совокупностей точек на ячейки: (б) – без ограничения релаксации, (в) – с ограничением релаксации на 5-й итерации.

тельность операций для уже существующего метода на примере построения четырехэлементной решетки в форме сферического сегмента:

1) Сплошная поверхность решетки заменяется набором большого числа точек, которые случайным образом набрасываются на ее поверхность равномерно по телесному углу (рис. 4а). Иными словами, вероятность попадания одной точки в некоторый элемент площади  $d\Sigma$  на поверхности решетки с полной площадью  $\Sigma$  определяется как  $d\Sigma/\Sigma$  и не зависит от положения элемента на сфере.

2) Весь набор точек делится на  $N$  классов, каждый из которых содержит  $M$  точек (рис. 4а). Деление точек на классы происходит случайным образом, в связи с чем “облака точек” различных классов оказываются сильно перемешанными, при этом каждое облако плотно “накрывает” всю поверхность решетки. Данное начальное состояние считается нулевой итерацией  $S = 0$ . В приведенном примере  $N = 4$ ,  $M = 250$ , общее количество точек  $NM = 10^3$ . На рис. 4а точки четырех разных классов отмечены различным типом маркеров: “плюс”, “кружок”, “точка” и “квадрат”.

3) Далее происходит итерационный процесс попарного разделения облаков точек разных классов. Наглядным образом его можно представить как разделение перемешанных в двумерном сосуде  $N$  различных несмешиваемых жидкостей, каждая из которых состоит из одинакового числа  $M$  частиц, стремящихся соединиться друг с другом с образованием компактных ячеек. Конечное состояние после разделения таких жидкостей (рис. 4б) как раз будет соответствовать разбиению содержимого сосуда (образа поверхности решетки) на ячейки одинакового размера. Разделение

происходит следующим образом. На каждой итерации  $S$  рассматриваются все возможные пары облаков точек различных классов. Для примера возьмем облака, отмеченные на рис. 4а маркерами “+” и “o”. Обозначим радиус-векторы точек первого облака в начале  $S$ -й итерации как  $\mathbf{a}_i^S$  ( $i = 1, \dots, M$ ). Введем “центр масс” облака:

$$\mathbf{A}_S = (\mathbf{a}_1^S + \mathbf{a}_2^S + \dots + \mathbf{a}_M^S) / M, \quad (1)$$

где  $S$  – номер итерации. Аналогично, для второго облака точек введем обозначения для координат точек  $\mathbf{b}_j^S$  и соответствующего центра масс  $\mathbf{B}_S$  ( $j = 1, \dots, M$ ). Заметим, что при используемом определении центры масс, вообще говоря, не попадают на сферическую поверхность решетки. Поэтому дополнительно проводится проецирование центров масс на поверхность решетки вдоль направления нормали к поверхности. Получившиеся точки далее рассматриваются как центры масс. Для реализации процесса разделения облаков точек рассматриваются все возможные пары точек  $(\mathbf{a}_i^S, \mathbf{b}_j^S)$ . В случае если точка  $\mathbf{a}_i^S$  первого облака находится в зоне влияния центра масс второго облака (соответствующий критерий см. ниже), а точка  $\mathbf{b}_j^S$  – в зоне влияния центра масс первого облака, производится обмен точками. В качестве количественного критерия в работе [19] введена следующая функция принятия решения для выявления пар точек, подлежащих обмену:

$$\chi(\mathbf{a}_i^S, \mathbf{b}_j^S, \mathbf{A}_S, \mathbf{B}_S) = \rho(\mathbf{a}_i^S, \mathbf{A}_S)^2 - \rho(\mathbf{a}_i^S, \mathbf{B}_S)^2 + \rho(\mathbf{b}_j^S, \mathbf{B}_S)^2 - \rho(\mathbf{b}_j^S, \mathbf{A}_S)^2. \quad (2)$$

Здесь  $\rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  — расстояние между двумя точками в сферической метрике или, другими словами, длина дуги большого круга, проходящего через точки  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . При этом точка  $\mathbf{a}_i^S$  приписывается второму классу, а  $\mathbf{b}_j^S$  — первому. Если  $\chi(\mathbf{a}_i^S, \mathbf{b}_j^S, \mathbf{A}_S, \mathbf{B}_S) > 0$ , то обмен точками совершается, в противном случае обмена не происходит. Таким образом, взаимообмен между точками двух облаков в рамках  $S$ -й итерации завершается после перебора всех возможных пар точек  $(\mathbf{a}_i^S, \mathbf{b}_j^S)$ . Далее корректируется положение центров масс облаков по формуле (1), и такая же процедура обмена точками прodelывается для всех других возможных пар облаков. При этом условие (2) для уже рассмотренных пар облаков в рамках данной итерации может нарушиться, но в среднем облака становятся более разделенными. Итерационный процесс продолжается ( $S \rightarrow S + 1 \rightarrow \dots S_{\max}$ ) до тех пор, пока для всех точек произвольной пары облаков не будет выполнено условие  $\chi(\mathbf{a}_i^{S_{\max}}, \mathbf{b}_j^{S_{\max}}) \leq 0$ . Это и означает полное разделение (рис. 4б). Важно отметить, что после разделения каждое из  $N$  облаков содержит одинаковое количество  $M$  точек, поскольку обмен точками между облаками всегда был попарным.

4) Чтобы осуществить переход от дискретного представления облаков к непрерывному, для каждого из них строится замыкающая его выпуклая кривая (рис. 4б). В случае большого числа точек дискретизации, получившиеся сферические многоугольники как раз и являются ячейками мозаики, абсолютно плотно заполняющей поверхность решетки. По построению, каждая ячейка содержит в себе одинаковое количество  $M$  точек, разбросанных случайным образом с равномерным на сфере распределением. Поэтому, согласно методу Монте-Карло, площади ячеек равны в пределе большого числа точек  $M$ .

На приведенном на рис. 4 примере видно, что после построения мозаики из четырех элементов возникла регулярность (и периодичность) в расположении ячеек: проведенное построение фактически привело к разделению сферической поверхности на четыре почти одинаковых сектора (рис. 4б).

Чтобы уменьшить эффект возникновения периодичности, в данной работе предлагается модифицировать шаг 3 описанного выше алгоритма, а именно изменить функцию принятия решения (2). Действительно, видно, что функция принятия решения  $\chi$  зависит как от координат точек дискретизации  $\mathbf{a}_i^S$  и  $\mathbf{b}_j^S$ , так и от положения центров масс  $\mathbf{A}_S$  и  $\mathbf{B}_S$ , причем аргументы функции меняются на каждой итерации. При этом на каждой  $S$ -й итера-

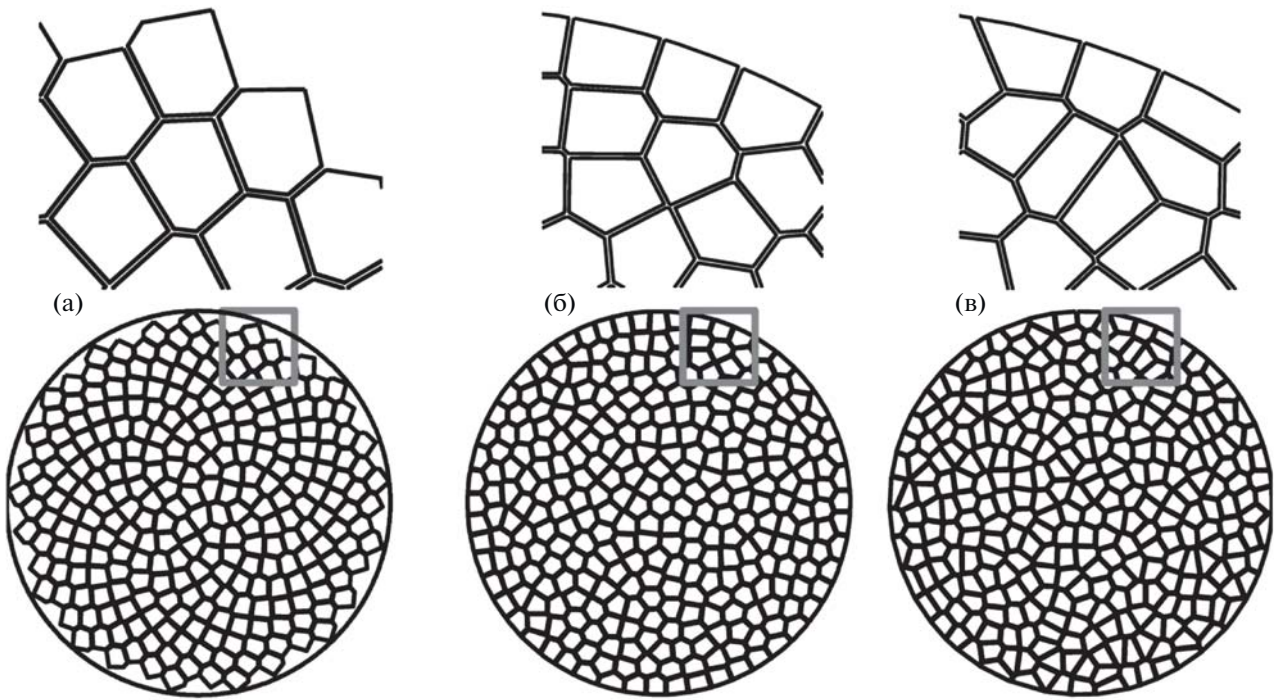
ции разбиения происходит два отдельных процесса. Первый из них — это обмен точек между группами по правилу  $\chi(\mathbf{a}_i^S, \mathbf{b}_j^S, \mathbf{A}_S, \mathbf{B}_S) > 0$ , что обеспечивает разделение облаков точек (будущих ячеек) между собой. Второй процесс — перемещение центров масс  $\mathbf{A}_S$  для каждого из облаков в конце итерации (1), что обеспечивает движение облака как целого с финальным установлением равновесного положения на последней итерации, т.е. “релаксацию”. Именно процесс релаксации центра масс ведет к формированию ячеек, близких друг к другу по форме и периодичности финального их расположения. Действительно, ограничим релаксацию на некоторой итерации  $S = S_0$ , например  $S_0 = 5$ . Это означает, что на всех итерациях  $S > S_0$  центры  $\mathbf{A}_S$  и  $\mathbf{B}_S$  для любой пары облаков точек не будут перемещаться, т.е. останутся в положениях  $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_{S_0}$ ,  $\mathbf{B}_S = \mathbf{B}_{S_0}$ . Новая функция принятия решения будет иметь вид:

$$\tilde{\chi}(\mathbf{a}_i^S, \mathbf{b}_j^S, \mathbf{A}_S, \mathbf{B}_S) = \begin{cases} \chi(\mathbf{a}_i^S, \mathbf{b}_j^S, \mathbf{A}_S, \mathbf{B}_S), & S \leq S_0, \\ \chi(\mathbf{a}_i^S, \mathbf{b}_j^S, \mathbf{A}_{S_0}, \mathbf{B}_{S_0}), & S > S_0. \end{cases} \quad (3)$$

Такое изменение позволяет существенно уменьшить регулярность: финальная картина имеет более неоднородную пространственную структуру (рис. 4в), а ячейки разбиения сильнее отличаются по форме друг от друга. Важно отметить, что при этом выполняется условие равенства площадей, поскольку процесс обмена точками между облаками по-прежнему остается попарным.

Рассмотрим влияние введенного ограничения релаксации на возможности электронного перемещения фокуса. Сравним 256-элементную VTFS-решетку (рис. 5а) [15], абсолютно плотную решетку, построенную на основе мозаики с ячейками заданной площади без ограничения релаксации (рис. 5б) [17], и предлагаемую в данной работе абсолютно плотную решетку с ограниченной релаксацией (рис. 5в). Для корректного сравнения были выбраны одинаковые параметры решеток, соответствующие реальной VTFS-решетке: рабочая частота 1.2 МГц, радиус кривизны поверхности  $F = 160$  мм и апертура  $D = 160$  мм. Для всех моделей решеток была выбрана одинаковая средняя площадь элементов и введены одинаковые технологические зазоры между смежными сторонами соседних элементов (0.5 мм), которые на практике позволяют избежать электрического пробоя между элементами (рис. 5, выноски сверху) [3, 4, 16].

Обе абсолютно плотные решетки были получены с использованием одинакового количества точек дискретизации  $M = 5 \times 10^5$ , приходящегося на каждый элемент. При построении абсолютно плотной решетки с ограничением релаксации, ограни-



**Рис. 5.** Внешний вид решеток с различным типом разбиения. Все решетки ограничены одинаковым круглым контуром и имеют равные средние площади элементов: (а) – 256-элементная VTFS-решетка, (б) – абсолютно плотная 291-элементная решетка, построенная без ограничения релаксации, (в) – аналогичная решетка, построенная с ограничением релаксации. На выносках сверху показаны увеличенные изображения нескольких элементов решеток для лучшей визуализации формы элементов и зазоров между ними. Параметры решеток: частота  $f = 1.2$  МГц, радиус кривизны  $F = 160$  мм, апертура  $D = 160$  мм, зазор между элементами 0.5 мм, средняя площадь элемента  $66 \text{ мм}^2$ .

чение было наложено на 8-й итерации ( $S_0 = 8$ ). Для проверки надежности метода было построено 500 таких моделей абсолютно плотных решеток с различными реализациями перемешивания точек, сгенерированных псевдослучайным образом.

Для того чтобы детально оценить возможности динамической фокусировки трех решеток (рис. 5), были проведены серии расчетов при электронном смещении фокуса существующей и предложенной решеток в узлы некоторой сетки в аксиальной плоскости  $zy$  ( $x = 0$  мм). Амплитуды колебательной скорости на элементах решетки выбирались одинаковыми, а перемещение фокуса осуществлялось путем выбора фазы, которая рассчитывалась вдоль луча от центра масс элемента к точке фокусировки. Для каждого положения фокуса ( $x_F = 0, y_F, z_F$ ) рассматривались распределения амплитуды давления  $p_A(x, y, z)$ . При этом автоматически анализировались два параметра: “эффективность” и “безопасность” облучения. В соответствии с критериями, предложенными в более ранних исследованиях [13, 20], облучение считалось эффективным, когда интенсивность в смещенном фокусе превышала 50% от максимально достижимого значения, и безопасным, если интенсивность побочных мак-

симумов составляла не более 10% от интенсивности в фокусе. При анализе эффективности облучения в аксиальной плоскости перемещение фокуса осуществлялось на сетке  $110 \leq z_F \leq 200$  мм и  $-20 \leq y_F \leq 20$  мм с шагами  $\Delta z_F = \Delta y_F = 0.25$  мм. Анализ безопасности облучения требует большего количества операций, поэтому для него использовалась более грубая сетка  $110 \leq z_F \leq 200$  мм и  $-20 \leq y_F \leq 20$  мм с шагами  $\Delta z_F = \Delta y_F = 2.5$  мм. Для каждого положения фокуса ( $x_F = 0, y_F, z_F$ ) расчет поля проводился на сетке  $110 \leq z \leq 200$  мм и  $-20 \leq y \leq 20$  мм с шагами  $\Delta z = \Delta y = 0.25$  мм. Таким образом, необходимо было рассчитать поле 629 раз.

Как видно из рис. 5, рассмотренные ультразвуковые решетки составлены из элементов в форме сферических многоугольников. Для расчета создаваемых ими полей был использован аналитический метод, основанный на расчете интеграла Рэлея

$$p_A(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega\rho_0}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{v_n(\mathbf{r}') \exp(ikR)}{R} d\Sigma' \quad (4)$$

в приближении дальнего поля для каждого из элементов решетки [13, 17]. Здесь  $p_A$  – комплексная амплитуда давления в точке  $\mathbf{r}$  для гар-



монической волны с временной зависимостью в форме  $\exp(-i\omega t)$ ,  $i$  – мнимая единица,  $\omega = 2\pi f$  – угловая частота решетки,  $k = \omega/c_0$  – волновое число,  $c_0$  – скорость звука,  $\rho_0$  – плотность среды,  $\Sigma$  – площадь активной поверхности решетки,  $v_n(\mathbf{r}')$  – амплитуда нормальной компоненты колебательной скорости в точке  $\mathbf{r}'$  поверхности,  $d\Sigma'$  – элемент площади с центром в указанной точке,  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  – расстояние от указанного элемента поверхности до точки наблюдения.

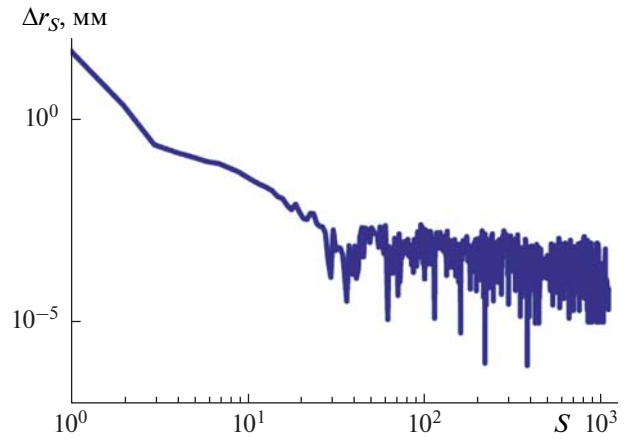
Каждый многоугольный элемент решетки, совершающий поршневые колебания с амплитудой колебательной скорости  $v_0$ , разбивался на подэлементы в форме прямоугольных треугольников. Поскольку характерный диаметр подэлементов много меньше радиуса кривизны решетки  $F$ , уже на небольших расстояниях от поверхности решетки поле каждого из них можно аппроксимировать аналитическим решением для его дальнего поля [17]:

$$p_A = \frac{\rho_0 a b \exp(ikr_0) [I(a, x) - I(b, y)]}{2\pi r_0 (ax/r_0 - by/r_0)}. \quad (5)$$

Здесь  $I(a, x) = \exp(-ikax/2r_0) \text{sinc}(kax/2r_0)$ ,  $a$  и  $b$  – катеты прямоугольного треугольника,  $p_0 = \rho_0 c_0 v_0$  – характерное давление на поверхности элемента,  $r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  и  $(x, y, z)$  – координаты точки наблюдения. Таким образом, поле каждого элемента рассчитывалось аналитически как сумма полей (5) его подэлементов. Ранее было показано, что аналитический метод позволяет увеличить скорость расчета поля на несколько порядков по сравнению с прямым численным расчетом интеграла (4) [13, 17].

## РЕЗУЛЬТАТЫ

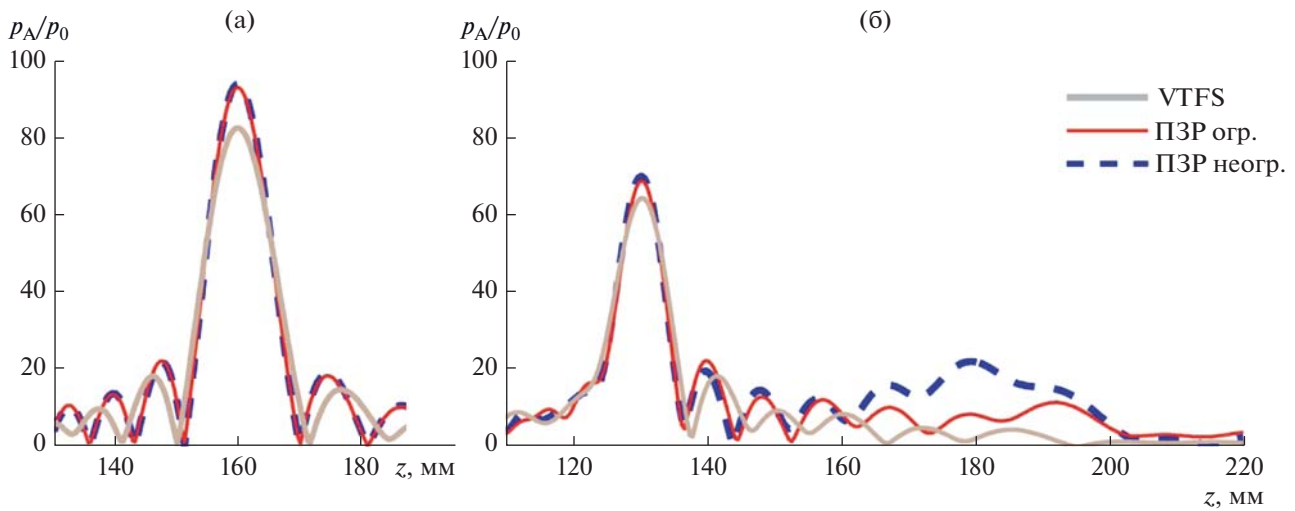
При введении технологического зазора 0.5 мм плотность заполнения поверхности решеток элементами уменьшилась: с 87 до 78% у VTFS-решетки и со 100 до 89% у абсолютно плотных решеток. Для VTFS-решетки, содержащей 256 элементов, средняя площадь элементов, с учетом зазоров, составила  $\bar{\Sigma}_{\text{эл}} = 66 \text{ мм}^2$ . Поскольку у абсолютно плотных решеток отсутствуют пустоты на периферии (рис. 5б, 5в), при той же площади элементов их количество увеличилось до  $N = 291$ . Использование  $M = 5 \times 10^5$  точек дискретизации, приходящихся на каждый элемент абсолютно плотных решеток, обеспечило коэффициент вариации площадей элементов  $\bar{\Sigma}_{\text{эл}}/\sigma_{\text{эл}} < 1\%$ , что позволяет считать их практически равными. Здесь  $\sigma_{\text{эл}}$  – стандартное отклонение площади элемента.



**Рис. 6.** Типичная зависимость смещения центра масс ячейки  $\Delta r_S = |\mathbf{A}_S - \mathbf{A}_{S-1}|$  от номера итерации  $S$  при построении мозаики с элементами равной площади без ограничения релаксации. Здесь  $\mathbf{A}_S$  – радиус-вектор центра масс ячейки на  $S$ -й итерации. Для удобства восприятия график представлен в логарифмической шкале по обеим осям.

Ограничение на количество итераций с релаксацией ( $S_0 = 8$ ) при построении абсолютно плотной решетки было выбрано из следующих соображений. Перед началом итеративного процесса построения решетки зафиксируем некоторое облако точек, которое впоследствии станет элементом решетки. Будем отслеживать смещение центра масс данного облака  $\Delta r_S = |\mathbf{A}_S - \mathbf{A}_{S-1}|$  на каждой итерации  $S$  относительно предыдущей (рис. 6). Легко заметить, что, начиная с  $S = 5$ , положение центра масс меняется незначительно ( $\Delta r_S < 0.5 \text{ мм}$ ), совершая незначительные колебания вплоть до последней итерации. Другими словами, положения центров масс элементов определяются на ранних итерациях, а в дальнейшем элементы лишь меняют форму, практически не меняя своего положения, все более и более скругляясь вплоть до последней итерации (рис. 5б, 5в). Таким образом, ограничение релаксации можно задавать на любой итерации, начиная с  $S = 5$ , причем чем раньше это будет сделано, тем более вытянутую форму будут иметь элементы. При построении решетки ограничение было установлено на итерации  $S_0 = 8$ , чтобы не допустить чрезмерной вытянутости элементов решетки.

Сравним сначала внешний вид решеток. Ограничение релаксации действительно позволяет значительно ослабить эффект упорядоченности элементов решетки (рис. 5в) по сравнению со случаем без ограничения релаксации (рис. 5б): элементы имеют чуть более асимметричную форму и дезориентированы без какой-либо периодичности. Для оценки степени вытянутости элементов



**Рис. 7.** Распределения амплитуды акустического давления  $p_A$ , нормированной на начальное давление  $p_0$ , вдоль оси симметрии решетки (оси  $z$ ): (а) для случая фокусировки в центр кривизны и (б) для случая электронного смещения фокуса вдоль оси  $z$  на 30 мм по направлению к поверхности решетки. Толстая сплошная линия соответствует VTFS-решетке, а тонкая сплошная и штриховая линии – абсолютно плотным решеткам с ограничением релаксации и без ограничения релаксации, соответственно.

введем следующий коэффициент:  $\kappa = \bar{P}_{\text{эл}}^2 / 4\pi\bar{\Sigma}_{\text{эл}}$ , где  $\bar{P}_{\text{эл}}$  и  $\bar{\Sigma}_{\text{эл}}$  – средние периметр и площадь элемента. Для круглого элемента, который является наиболее компактным по сравнению с элементами иной формы,  $\bar{P}_{\text{эл}}^2 = 4\pi\bar{\Sigma}_{\text{эл}}$ , т.е.  $\kappa = 1$ . Вытянутые же элементы будут иметь значения  $\kappa > 1$ , и чем сильнее вытянут элемент, тем большее значение принимает параметр  $\kappa$ . Для VTFS-решетки, решетки без ограничения релаксации и решетки с ограничением релаксации величиной  $S_0 = 8$  этот коэффициент имеет значения, соответственно, 1.173, 1.168 и 1.258.

Проведем далее сравнение полей, создаваемых данными тремя решетками. Вначале рассмотрим случай фокусировки в центр кривизны  $F = 160$  мм, когда все элементы решеток работают синфазно. На рис. 7а представлены распределения амплитуды давления  $p_A/p_0$  на оси решетки  $z$ , нормированные на начальное давление  $p_0$  для VTFS-решетки (толстая сплошная линия) и двух абсолютно плотных решеток – решетки без ограничения релаксации (штриховая линия) и с ограничением релаксации (тонкая сплошная линия). Из распределений видно, что нормированная амплитуда давления в фокусе VTFS-решетки составляет  $p_F/p_0 = 83$ , тогда как у двух абсолютно плотных решеток она на 13% больше:  $p_F/p_0 = 94$ . Таким образом, абсолютно плотные решетки позволяют достичь на 28% большей интенсивности в фокусе, что согласуется с соотношением полезных

площадей или количеством элементов решетки. Здесь мы пользуемся тем, что  $I \sim p_A^2$ ,  $I_F \sim \Sigma_{\text{акт}}^2$ .

Для демонстрации степени случайности расположения элементов рассмотрим случай смещения фокуса к поверхности решеток вдоль оси пучка на 30 мм ( $x_F = 0$  мм,  $y_F = 0$  мм,  $z_F = 130$  мм). На распределениях амплитуды (рис. 7б) можно наблюдать два побочных эффекта, связанных с дискретной структурой решеток. Амплитуда давления в фокусе уменьшается по сравнению со случаем без электронного смещения (снижение эффективности), а за фокусом образуется область побочных максимумов (снижение безопасности). В качестве количественной оценки амплитуды побочных максимумов будем рассматривать максимальную амплитуду  $p_{\text{поб}}/p_F$  поля вне фокального максимума и первых двух дифракционных максимумов, прилежащих к нему (рис. 2б, контур ABCD). Как видно, амплитуда побочных максимумов для абсолютно плотной решетки с ограничением релаксации (рис. 7б, тонкая сплошная линия,  $p_{\text{поб}}/p_0 = 11.7$ ) на 48% меньше, чем для решетки без ограничения релаксации (штриховая линия,  $p_{\text{поб}}/p_0 = 22.4$ ). Полученные результаты подтверждают предположение о дополнительном нарушении упорядоченности расположения элементов при ограничении релаксации. VTFS-решетка (толстая сплошная линия) позволяет достичь еще более низкого уровня побочных максимумов,  $p_{\text{поб}}/p_0 = 8.7$ , однако при этом для нее амплитуда,  $p_F/p_0 = 64$ , в смещенном фокусе ока-

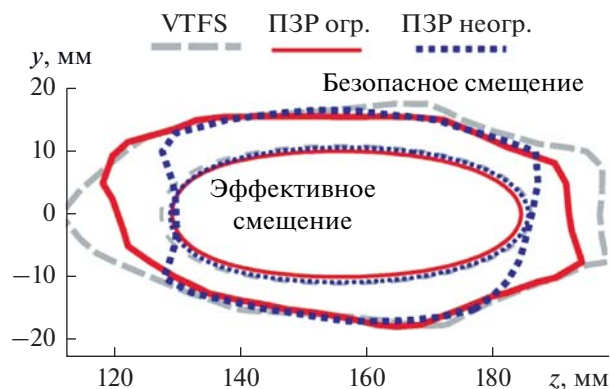


зывается ниже, чем для двух абсолютно плотных решеток ( $p_F/p_0 \approx 70$ ).

Результаты серии расчетов при электронном перемещении фокуса существующей и предложенной решеток в узлы некоторой сетки в плоскости оси решетки  $zy$  ( $x = 0$  мм) показаны на рис. 8. Для каждого положения фокуса анализировались уровни эффективности и безопасности облучения. Результаты представлены в виде контуров, ограничивающих области безопасного (интенсивность побочных максимумов не превышает 10% от интенсивности в фокусе, толстые линии) и эффективного (интенсивность в смещенном фокусе выше 50% от максимального достижения значения, тонкие линии) перемещения фокуса в аксиальной плоскости  $zy$ . Штриховыми линиями обозначены контуры для VTFS-решетки, а сплошными линиями и линиями из точек — для абсолютно плотных решеток с ограничением и без ограничения релаксации, соответственно.

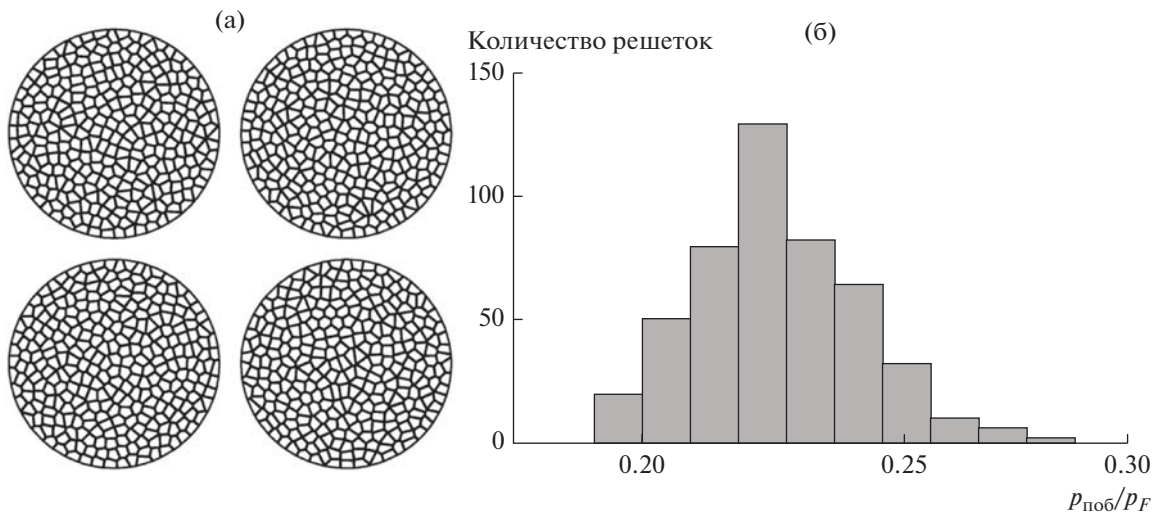
Видно, что область безопасного перемещения фокуса у VTFS-решетки (толстая штриховая линия) наиболее вытянута в продольном направлении с размером по оси  $z$  около 87 мм. У абсолютно плотной решетки без ограничения релаксации (толстая линия из точек) она значительно уже и ее размер по оси  $z$  составляет около 57 мм. Абсолютно плотная решетка с ограничением релаксации (толстая сплошная линия) имеет среднюю по размеру область длиной 76 мм. Различие решеток по длине областей безопасного перемещения фокуса объяснимо и подтверждает предположение о нарушении кольцевой структуры расположения элементов при переходе от неограниченной релаксации к ограниченной: уменьшение периодичности ведет к ослаблению побочных дифракционных максимумов, следовательно, размер области безопасного перемещения фокуса вдоль оси  $z$  увеличивается. Отметим, что независимо от порога ограничения релаксации внешние элементы абсолютно плотной решетки всегда будут находиться на ее круглой границе и образовывать кольцо, поэтому решетка с ограничением релаксации имеет на 11 мм меньшую длину области безопасного перемещения фокуса, чем VTFS-решетка, которая по построению не содержит кольцевых структур. В поперечном направлении оси у все три решетки имеют близкие размеры безопасной области поперечного перемещения фокуса около 35 мм шириной с локальными отклонениями до 2 мм.

Теперь рассмотрим области эффективного перемещения фокуса (тонкие линии на рис. 8), которые отличаются друг от друга не так значительно, как области безопасного перемещения фокуса. Так, у VTFS-решетки (тонкая штриховая линия) и абсолютно плотной решетки без ограничения релаксации (тонкая линия из точек) размеры обла-



**Рис. 8.** Области электронного смещения фокуса в аксиальной плоскости  $zy$ , при фокусировке внутри которых облучение можно считать эффективным (тонкие линии) и безопасным (толстые линии). Штриховые линии соответствуют VTFS-решетке, сплошные линии и линии из точек — абсолютно плотным решеткам с ограничением релаксации и без ограничения релаксации, соответственно.

сти вдоль осей  $z$  и  $y$  составляют  $58 \times 22$  мм и  $56 \times 21$  мм, соответственно. У абсолютно плотной решетки с ограничением релаксации размеры области эффективного перемещения фокуса вдоль осей  $z$  и  $y$  составляют  $55.5 \times 20$  мм (тонкая сплошная линия), что на 1–2.5 мм меньше, чем у остальных решеток. Незначительную разницу в размерах областей сканирования для VTFS-решетки и абсолютно плотных решеток можно объяснить следующим образом: хотя сравниваемые решетки имеют одинаковую среднюю площадь элемента  $\bar{\Sigma}_{эл}$ , площади элементов VTFS-решетки отличаются друг от друга сильнее, чем площади элементов абсолютно плотных решеток (рис. 2). При этом по мере удаления от центра решетки элементы VTFS-решетки становятся меньше и, начиная со 110-го элемента, имеют меньшую площадь, чем элементы абсолютно плотной решетки. Таким образом, элементы на периферии VTFS-решетки оказываются меньше по размеру, а значит имеют более широкую диаграмму направленности, что обеспечивает чуть больший диапазон эффективного перемещения фокуса вдоль оси  $z$ . Таким образом, незначительный выигрыш в размерах области эффективной фокусировки у VTFS-решетки связан с неравенством площадей, которое само по себе является серьезной проблемой конструкции решетки. Абсолютно плотная решетка с ограничением релаксации имеет самый узкий размер области эффективного перемещения фокуса, поскольку ее элементы (рис. 5в) чуть более вытянуты, чем у двух других решеток. Это подтверждается величинами коэффициентов  $k$ , описывающими степень вытянутости. Поэтому ширина диаграммы направленности у элементов решетки с ограничением релаксации будет чуть



**Рис. 9.** (а) Примеры абсолютно плотных решеток с ограниченной релаксацией, которые имеют одинаковые параметры, но различную псевдослучайную реализацию расположения элементов. (б) Гистограмма распределения 500 таких решеток по амплитуде побочного максимума  $p_{\text{поб}}$ , нормированной на амплитуду давления в фокусе  $p_F$ , при смещении фокуса вдоль оси  $z$  на 30 мм по направлению к поверхности решетки. Все решетки имеют одинаковые параметры: частота  $f = 1.2$  МГц, радиус кривизны  $F = 160$  мм, апертура  $D = 160$  мм, зазор между элементами 0.5 мм, средняя площадь элемента  $66 \text{ мм}^2$ .

меньше, что и приводит к незначительному уменьшению размеров области эффективного перемещения фокуса.

Наконец, для каждой из решеток область безопасного и эффективного (т.е. “допустимого”) перемещения фокуса совпадает с областью эффективной фокусировки, и лишь у абсолютно плотной решетки без ограничения релаксации область безопасного перемещения фокуса пересекает область эффективного перемещения на 1 мм. Таким образом, при разработке решеток для практических целей существует достаточно широкий выбор границы релаксации  $S_0$ . Увеличивая  $S_0 > 8$ , можно подобрать такое его значение, чтобы степень скругленности элементов была оптимальной, т.е. чтобы область эффективной фокусировки была близка по размеру к максимально возможной, но оставалась при этом внутри области безопасной фокусировки.

Обсудим теперь надежность использования метода ограничения релаксации при различных реализациях случайного расположения элементов на поверхности. Действительно, в алгоритме создания модели абсолютно плотной решетки есть два источника случайности: набрасывание большого числа точек ( $MN \sim 10^8$ ) на ее поверхность и их последующее деление на хаотически перемешанные облака точек (рис. 4а). Для примера, на рис. 9а представлены четыре решетки из проанализированного набора 500 решеток. Поскольку характер расположения элементов влияет на уровень побочных максимумов при электронном смещении фокуса, поля решеток срав-

нивались по степени их проявления. Как видно из рис. 8, проблемное место при появлении периодичности в расположении элементов находится на оси решетки, поскольку именно здесь область безопасного перемещения фокуса приближается к области эффективного (толстая и тонкая штрихпунктирная линия на рис. 8). Поэтому в качестве параметра сравнения рассматривался уровень побочных максимумов относительно нормированной амплитуды давления в фокусе  $p_{\text{поб}}/p_F$  при перемещении фокуса в точку с координатами  $x_F = 0 \text{ мм}$ ,  $y_F = 0 \text{ мм}$ ,  $z_F = 130 \text{ мм}$ , которая близка к границе области эффективного перемещения фокуса.

Распределение 500 решеток по параметру  $p_{\text{поб}}/p_F$  показано на гистограмме, разделенной на 10 интервалов равной длины (рис. 9б). Высота каждого столбика соответствует количеству решеток, у которых параметр  $p_{\text{поб}}/p_F$  попадает в заданный интервал. Видно, что распределение случайной величины  $p_{\text{поб}}/p_F$  имеет характерный вид колокола. Уровень побочных максимумов  $p_{\text{поб}}/p_F$  лежит в интервале  $0.19 \leq p_{\text{поб}}/p_F \leq 0.29$ , а наиболее часто встречающееся значение параметра, реализованное у 129 решеток из 500, — в интервале  $0.22 \leq p_{\text{поб}}/p_F \leq 0.23$ . Важно, что для всех решеток выполняется условие безопасности облучения. Тем не менее, при таком статистическом анализе возможен выбор наиболее удачной реализации решетки, показанной на рис. 5в, с минимальным значением параметра  $p_{\text{поб}}/p_F$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена модификация метода создания абсолютно плотных решеток со случайным расположением излучающих элементов, плотность заполнения которых составляет  $\Psi = 100\%$  без учета технологических зазоров между элементами. Предложенная модификация позволяет уменьшить уровень побочных дифракционных максимумов, связанных с квазипериодичностью расположения элементов, одновременно сохраняя максимальную плотность заполнения решетки элементами. Проанализированы и продемонстрированы преимущества предложенного подхода по сравнению с существующими методами создания плотных решеток с нерегулярным расположением элементов.

Разработка алгоритма разбиения решеток выполнена при поддержке гранта РФФ № 19-12-00148, а анализ акустических полей решеток – при поддержке гранта РФФИ 19-02-00035, стипендии Президента РФ СП-2644.2018.4 и стипендии Фонда развития теоретической физики “Базис”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гаврилов Л.Р.* Фокусированный ультразвук высокой интенсивности в медицине. М.: Фазис, 2013.
2. *Hunynen K., Jones R.M.* Image-guided ultrasound phased arrays are a disruptive technology for non-invasive therapy // *Phys. Med. Biol.* 2016. V. 61. P. 206–248.
3. *Kreider W., Yuldashev P.V., Sapozhnikov O.A., Farr N., Partanen A., Bailey M.R., Khokhlova V.A.* Characterization of a multi-element clinical HIFU system using acoustic holography and nonlinear modeling // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2013. V. 60. P. 1683–1698.
4. *Khokhlova V.A., Yuldashev P.V., Rosnitskiy P.B., Maxwell A.D., Kreider W., Bailey M.R., Sapozhnikov O.A.* Design of HIFU transducers to generate specific nonlinear ultrasound fields // *Phys. Procedia.* 2016. V. 87. P. 132–138.
5. *Pinton G., Aubry J.-F., Fink M., Tanter M.* Effects of nonlinear ultrasound propagation on high intensity brain therapy // *Medical Physics.* 2011. V. 38. № 3. P. 1207–1216.
6. *Marsac L., Chauvet D., La Greca R., Boch A.-L., Chamoître K., Tanter M., Aubry J.-F.* Ex vivo optimisation of a heterogeneous speed of sound model of the human skull for non-invasive transcranial focused ultrasound at 1 MHz // *Int. J. Hyperthermia.* 2017. V. 33. № 6. P. 635–645.
7. *Thomas J.-L., Fink M.A.* Ultrasonic beam focusing through tissue inhomogeneities with a time reversal mirror: application to transskull therapy // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 1996. V. 3. P. 1122–1129.
8. *Rosnitskiy P.B., Sapozhnikov O.A., Grüll H., Khokhlova V.A.* New design of a fully populated random array for treating deep-seated tumors // *Abstract Book of the 19th Int. Symp. of ISTU/5th European Symposium of EU-FUS (June 13–15, 2019, Barcelona, Spain).* ISTU. 2019.
9. *Cathignol D.* High intensity piezoelectric sources for medical applications: Technical aspects // *Nonlinear Acoustics at the Beginning of the 21st Century (2002, Moscow, Russia).* Moscow State Univ. 2002. P. 371–378.
10. *Bobkova S., Gavrilov L., Khokhlova V., Shaw A., Hand J.* Focusing of high-intensity ultrasound through the rib cage using a therapeutic random phased array // *Ultrasound Med. Biol.* 2010. V. 36. № 6. P. 888–906.
11. *Gavrilov L.R., Hand J.W.* A theoretical assessment of the relative performance of spherical phased arrays for ultrasound surgery and therapy // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Control.* 2000. V. 41. № 1. P. 125–139.
12. *Hand J.W., Shaw A., Sahoo N., Rajagopal S., Dickinson R.J., Gavrilov L.R.* A random phased array device for delivery of high intensity focused ultrasound // *Phys. Med. Biol.* 2009. V. 54. № 19. P. 5675–5693.
13. *Ильин С.А., Юлдашев П.В., Хохлова В.А., Гаврилов Л.Р., Росницкий П.Б., Сапожников О.А.* Применение аналитического метода для оценки качества акустических полей при электронном перемещении фокуса многоэлементных терапевтических решеток // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 1. С. 57–64.
14. *Raju B.I., Hall C.S., Seip R.* Ultrasound therapy transducers with space-filling non-periodic arrays // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Control.* 2011. V. 58. № 5. P. 944–954.
15. *Ramaekers P., de Greef M., Berriet R., Moonen C.T.W., Ries M.* Evaluation of a novel therapeutic focused ultrasound transducer based on Fermat’s spiral // *Phys. Med. Biol.* 2017. V. 62. № 12. P. 5021–5045.
16. *Ramaekers P., Ries M., Moonen C.T.W., de Greef M.* Improved intercostal HIFU ablation using a phased array transducer based on Fermat’s spiral and Voronoi tessellation: A numerical evaluation // *Medical Physics.* 2017. V. 44. № 3. P. 1071–1088.
17. *Rosnitskiy P.B., Vysokanov B.A., Gavrilov L.R., Sapozhnikov O.A., Khokhlova V.A.* Method for designing multielement fully populated random phased arrays for ultrasound surgery applications // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Control.* 2018. V. 65. № 4. P. 630–637.
18. *Goss S.A., Frizell L.A., Kouzmanoff J.T., Barich J.M., Yang J.M.* Sparse random ultrasound phased array for focal surgery // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Control.* 1996. V. 43. № 6. P. 1111–1121.
19. *Balzer M., Schlömer T., Deussen O.* Capacity-constrained point distributions: A variant of Lloyd’s method // *ACM Trans. on Graphics (Proc. of SIGGRAPH).* 2009. V. 28. № 3. Article 86. P. 1–8.
20. *Гаврилов Л.Р., Сапожников О.А., Хохлова В.А.* Спиральное расположение элементов двумерных ультразвуковых терапевтических решеток как метод повышения интенсивности в фокусе // *Известия РАН. Серия Физическая.* 2015. Т. 79. № 10. С. 1386–1392.