

РЕКОНСТРУКЦИЯ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ИСТОЧНИКА ЗВУКА В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ЕГО ПОЛЯ В БАССЕЙНЕ

© 2020 г. А. Л. Вировлянский^а, *, А. Ю. Казарова^а, Л. Я. Любавин^а

^аИнститут прикладной физики Российской Академии наук, ул. Ульянова 46, Н. Новгород, 603950 Россия

*e-mail: viro@ipfran.ru

Поступила в редакцию 02.04.2020 г.

После доработки 27.04.2020 г.

Принята к публикации 28.04.2020 г.

Обсуждается реконструкция диаграммы направленности источника звука в свободном пространстве по измерениям поля, возбуждаемого этим источником в бассейне. Процедура реконструкции базируется на использовании эталонного акустического монополя. Поле калибруемого источника сопоставляется с полями, излученными монополю из нескольких специально выбранных точек бассейна. Сигналы источника и эталонного монополя регистрируются одними и теми же приемниками. На основе этих измерений поле источника в бассейне аппроксимируется суперпозицией полей акустических монополей. Сформулированы условия, при которых поле источника в свободном пространстве можно представить в виде суперпозиции полей тех же монополей. Это позволяет вычислить диаграмму направленности калибруемого источника в свободном пространстве. Работоспособность метода подтверждена результатами численного моделирования.

Ключевые слова: излучатель звука, калибровка, бассейн, метод эквивалентных источников

DOI: 10.31857/S0320791920050159

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Большинство методов калибровки акустических излучателей в бассейне с отражающими границами основаны на выделении прямого сигнала, проходящего в точки приема без отражения от границ. Чаще всего используется облицовка границ поглощающим покрытием для ослабления отраженных сигналов и/или селекция прямых сигналов по времени распространения [1, 2]. Эти подходы эффективны лишь на достаточно высоких частотах. При калибровке низкочастотных излучателей задача усложняется, и ее решение требует применения специальных методов обработки сигналов [3–5].

В недавней работе [6] развит альтернативный подход, позволяющий провести калибровку излучателя в бассейне без выделения прямого сигнала. Он базируется на использовании метода эквивалентных источников (ЭИ) [7–12]. Предполагается, что поля, возбуждаемые калибруемым излучателем и в бассейне, и в свободном пространстве могут быть представлены в виде суперпозиции полей одних и тех же акустических монополей, играющих роль ЭИ, с одними и теми же амплитудами. Амплитуды ЭИ восстанавливаются по данным измерений в бассейне. Необходимые для решения этой обратной задачи значения функции

Грина уравнения Гельмгольца измеряются с помощью процедуры, названной в [6] калибровкой бассейна. Она заключается в том, что эталонный акустический монополь поочередно помещается в точки расположения ЭИ и сигналы, излучаемые им из этих точек, регистрируются всеми приемниками. Искомое поле излучателя в свободном пространстве затем легко вычисляется с использованием найденных амплитуд ЭИ и известного выражения для функции Грина свободного пространства.

Возможности этого способа калибровки существенно ограничивает отсутствие обоснованных общих рекомендаций по выбору количества ЭИ и точек их размещения, гарантирующих эффективность моделирования поля произвольного источника звука суперпозицией полей ЭИ [8, 12]. Однако такие рекомендации можно сформулировать для низкочастотного излучателя с размерами меньше длины волны, поле которого в свободном пространстве можно представить в виде суперпозиции монополюльной, дипольных и квадрупольных компонент. В данной статье показано, что возможность пренебрежения вкладами высших мультиполей сильно упрощает анализ и позволяет сформулировать требования к расположению ЭИ и точек приема, достаточные для реконструк-

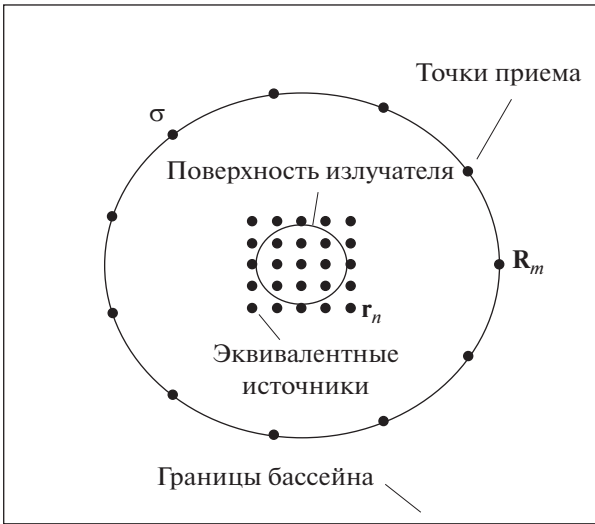


Рис. 1. Схема эксперимента.

ции поля калибруемого источника в свободном пространстве.

Материалы статьи расположены в следующем порядке. Для удобства читателя в разд. 2 кратко изложена основная идея метода из работы [6]. Требования к выбору координат ЭИ сформулированы в разд. 3. Анализ условий, при выполнении которых одни и те же ЭИ представляют поле излучателя и в бассейне, и в свободном пространстве, посвящен разд. 4. Критерий правильного выбора количества и позиций точек приема установлен в разд. 5. Эффективность найденных условий, обеспечивающих возможность решения обратной задачи, продемонстрирована на численном примере в разд. 6. Итоги работы подведены в разд. 7.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В этом разделе мы кратко изложим идею подхода, предложенного в [6], и поставим вопросы, на которые нужно ответить для формулировки условий его применимости.

Процедура измерений схематически проиллюстрирована на рис. 1. Поле u , возбуждаемое на несущей частоте f в бассейне, заполненном водой с постоянной скоростью звука c , регистрируется в точках \mathbf{R}_m , $m = 1, \dots, M$, расположенных на поверхности σ , охватывающей излучатель [7–12].

Обсуждаемый подход базируется на аппроксимации поля излучателя на поверхности σ суперпозицией полей ЭИ. Последние представляют собой акустические монополи, расположенные внутри σ в точках \mathbf{r}_n , $n = 1, \dots, N$. Их суммарное

поле в свободном пространстве с такой же скоростью звука, как в бассейне, равно

$$u(\mathbf{R}) = \sum_{n=1}^N G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) A_n, \quad (1)$$

где \mathbf{R} – точка наблюдения,

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} e^{ik|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}, \quad (2)$$

– функция Грина уравнения Гельмгольца в свободном пространстве, $k = 2\pi f/c$, A_n – комплексные амплитуды ЭИ [13]. Временной множитель $e^{-2\pi ift}$ здесь и далее опускаем.

При применении метода ЭИ монополи нередко располагают внутри области, ограниченной поверхностью излучателя [8, 12]. Здесь мы не накладываем такого ограничения, что отражено на рис. 1.

Предполагается, что в бассейне с отражающими границами излучаемое поле $\tilde{u}(\mathbf{R})$ может быть представлено в виде суперпозиции полей, возбужденных теми же ЭИ, т.е. акустическими монополями, размещенными в тех же точках \mathbf{r}_n и имеющими те же амплитуды A_n . Это значит, что

$$\tilde{u}(\mathbf{R}) = \sum_{n=1}^N \tilde{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) A_n, \quad (3)$$

где $\tilde{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ – функция Грина в бассейне. Результаты измерения поля \tilde{u} образуют вектор $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}(\mathbf{R}_1), \dots, \tilde{u}(\mathbf{R}_M)]^T$, где символ T обозначает транспонирование. Для отыскания неизвестных амплитуд ЭИ, мы получаем систему линейных уравнений, которая в матричных обозначениях принимает вид

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{A}, \quad (4)$$

где $\tilde{\mathbf{G}}$ – $M \times N$ матрица с элементами $\tilde{G}_{mn} = \tilde{G}(\mathbf{R}_m, \mathbf{r}_n)$, $\mathbf{A} = [A_1, \dots, A_N]^T$ – вектор искомых амплитуд. Матричные элементы \tilde{G}_{mn} измеряются с использованием эталонного монополя, который поочередно помещается во все точки \mathbf{r}_n , и сигналы, излученные из каждой точки, регистрируются всеми M приемниками. Эта процедура в [6] названа калибровкой бассейна.

Для решения системы уравнений (4) применим сингулярное разложение матрицы $\tilde{\mathbf{G}}$ [14, 15]

$$\tilde{\mathbf{G}} = \sum_{l=1}^L \gamma_l \xi_l \boldsymbol{\eta}_l^H, \quad (5)$$

где γ_l – сингулярные числа, ξ_l и $\boldsymbol{\eta}_l$ – сингулярные векторы, символ H означает эрмитово сопряжение. Псевдообратная к $\tilde{\mathbf{G}}$ матрица имеет вид суммы

$$\tilde{\mathbf{G}}^+ = \sum_{l=1}^{L_1} \frac{1}{\gamma_l} \boldsymbol{\eta}_l \xi_l^H, \quad (6)$$

в которой учитываются лишь $L_1 \leq L$ первых (относительно больших) сингулярных чисел. Соотношение

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}}^+ \tilde{\mathbf{u}} \quad (7)$$

дает оценку вектора \mathbf{A} . Подставляя это решение в (1), находим искомое поле калибруемого излучателя в свободном пространстве.

Как отмечено во Введении, применение описанной процедуры далеко не всегда гарантирует правильную реконструкцию поля излучателя. Для формулировки условий применимости обсуждаемого подхода нужно ответить на следующие вопросы:

1. Как выбрать количество акустических монополей и их координаты, чтобы сумма (1) могла с высокой точностью аппроксимировать поле калибруемого излучателя в свободном пространстве?

2. Когда поле излучателя в бассейне может быть аппроксимировано суммой (3) с теми же амплитудами ЭИ A_n , что и в свободном пространстве?

3. При каких условиях амплитуды ЭИ A_n могут быть найдены с приемлемой точностью из системы линейных уравнений (4), связывающих их с измеренными амплитудами поля $\tilde{u}(\mathbf{R}_m)$? Погрешность оценки (7) может быть велика из-за того, что система (4) недоопределена, а матрица $\tilde{\mathbf{G}}$ плохо обусловлена. Кроме того, совпадение суперпозиции полей ЭИ с полем калибруемого излучателя в M точках измерительной поверхности σ , в особенности, если M невелико, еще не гарантирует близости этих полей в других точках σ .

В данной работе ответы на эти вопросы будут получены в предположении, что мультипольное разложение поля калибруемого излучателя полностью определяется вкладом монополя, диполей и квадруполей, а вкладами мультиполей более высоких порядков можно пренебречь. Это условие обычно выполняется для излучателя с размерами меньше длины волны [16].

3. ВЫБОР ПОЗИЦИЙ ЭИ

Начнем с ответа на вопрос 1. Введем сферическую систему координат (R, θ, φ) , где $R = |\mathbf{R}|$, а θ и φ – полярный и азимутальный углы точки \mathbf{R} . Начало системы координат поместим в центре излу-

чателя. Вне излучателя звуковое поле можно представить в виде [17, 18]

$$u(\mathbf{R}) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v C_v^\mu S_v^\mu(\mathbf{R}), \quad (8)$$

где C_v^μ – коэффициенты разложения,

$$S_v^\mu(\mathbf{R}) = h_v^{(1)}(kR) Y_v^\mu(\theta, \varphi), \quad (9)$$

$$h_v^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{v+1/2}^{(1)}(x)$$

– сферические функции Ханкеля,

$$Y_v^\mu(\theta, \varphi) = (-1)^\mu \sqrt{\frac{2\mu+1(v-|\mu|)!}{4\pi(v+|\mu|)!}} P_v^{|\mu|}(\cos\theta) e^{i\mu\varphi}, \quad (10)$$

– сферические гармоники, $P_v^\mu(x)$ – присоединенные полиномы Лежандра.

Далее нам понадобится разложение (8) поля n -го ЭИ

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v Q_{n,v}^\mu S_v^\mu(\mathbf{R}), \quad (11)$$

для коэффициентов которого имеется известное аналитическое выражение [17, 18]

$$Q_{n,v}^\mu = (-1)^\mu ik \sqrt{4\pi(2v+1)} \frac{(v-|\mu|)!}{(v+|\mu|)!} \times \quad (12)$$

$$\times j_v(kr_n) P_v^{|\mu|}(\cos\theta_n) e^{-i|\mu|\varphi_n},$$

где $(r_n, \theta_n, \varphi_n)$ – сферические координаты точки \mathbf{r}_n , $j_v(x)$ – сферические функции Бесселя первого рода [19].

Переобозначим C_v^μ , $Q_{n,v}^\mu$ и $S_v^\mu(\mathbf{R})$, заменив их соответственно на C_q , $Q_{n,q}$ и $S_q(\mathbf{R})$, где

$$q = 1 + v + v^2 + \mu. \quad (13)$$

Правило (13) устанавливает взаимно однозначное соответствие между парами индексов (v, μ) и индексами q , представленными натуральными числами. В новых обозначениях разложения (8) и (11) переходят соответственно в

$$u(\mathbf{R}) = \sum_{q=1}^{\infty} C_q S_q(\mathbf{R}) \quad (14)$$

и

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) = \sum_{q=1}^{\infty} Q_{nq} S_q(\mathbf{R}). \quad (15)$$

Вклады монопольной, дипольных и квадрупольных компонент поля $u(\mathbf{R})$ формируются слагаемыми ряда (8) с $v \leq 2$ [17, 18], которые образуют первые девять членов ряда (14). Наше предпо-

ложение о поле излучателя, сформулированное в конце предыдущего раздела, означает, что все слагаемые с $q > 9$ в правой части (14) малы и их можно отбросить. Поэтому достаточным условием представления $u(\mathbf{R})$ в виде суперпозиции полей ЭИ (1) является возможность приближенного представления каждой из функций $S_q(\mathbf{R})$ с $q \leq 9$ в виде

$$S_q(\mathbf{R}) \cong \sum_{n=1}^N P_{qn} G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n). \quad (16)$$

Коэффициенты P_{qn} нужно подобрать таким образом, чтобы левая и правая части были максимально близки в точках поверхности σ .

Для простоты будем рассматривать ситуацию, когда все ЭИ расположены так близко к началу координат, что

$$k|\mathbf{r}_n| \ll 1, \quad n = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Принимая во внимание асимптотическую формулу для функции $j_\nu(x)$ при малом значении аргумента [19]

$$j_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{(2\nu + 1)!!},$$

видим, что при условии (17) величина $|C_\nu^{\mu}|$ быстро спадает с ростом ν и, соответственно, $|C_q|$ уменьшается с ростом q .

Полагаем, что для всех точек \mathbf{R} поверхности σ выполняется условие

$$k|\mathbf{R}| > 1. \quad (18)$$

Благодаря этому значения сферических функций Ханкеля $h_\nu^{(1)}(k|\mathbf{R}|)$ в точках поверхности σ не растут неограниченно с ростом ν и при выполнении (17) в бесконечной сумме в правой части (15) можно ограничиться учетом конечного числа слагаемых. Тогда в качестве коэффициентов P_{qn} в (16) можно взять элементы матрицы \mathbf{P} , которая псевдообратна к матрице \mathbf{Q} с коэффициентами Q_{nq} . Найденные таким образом аппроксимации сферических функций $S_q(\mathbf{R})$ правыми частями (16) являются приближенными. Точность этого приближения для любого конкретного выбора точек \mathbf{r}_n легко оценить количественно. Полагая, что расстояния от центра излучателя до точек σ не сильно отличаются от некоторого среднего радиуса R_0 , в качестве оценки точности аппроксимации примем

$$\varepsilon_q = \int_{\sigma_0} |b_q(\mathbf{R})|^2 ds \Big/ \int_{\sigma_0} |S_q(\mathbf{R})|^2 ds, \quad (19)$$

где интегрирование идет по σ_0 – поверхности сферы радиуса R_0 , ds – элемент площади,

$$b_q(\mathbf{R}) = S_q(\mathbf{R}) - \sum_{n=1}^N P_{qn} G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n)$$

– невязка. Критерием правильности выбора позиций ЭИ является выполнение условий

$$\varepsilon_q \ll 1, \quad q = 1, \dots, 9. \quad (20)$$

4. ПОЛЯ, СОЗДАНЫЕ ОДНИМИ И ТЕМИ ЖЕ ЭИ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И В БАССЕЙНЕ

Перейдем к ответу на вопрос 2. Предполагается, что объемные скорости монополей, представляющих ЭИ, одинаковы и в свободном пространстве, и в бассейне. Кроме того, каждая точка поверхности калибруемого источника в бассейне и свободном пространстве осциллирует одинаково.

Поле $\tilde{u}(\mathbf{R})$, возбуждаемое ЭИ в бассейне, представим в виде $\tilde{u}(\mathbf{R}) = u(\mathbf{R}) + v(\mathbf{R})$, где $u(\mathbf{R})$ – поле, возбужденное теми же источниками в свободном пространстве, а $v(\mathbf{R})$ – компонента, формируемая отражениями от границ. Функция $v(\mathbf{R})$ представляет решение уравнения Гельмгольца в бассейне с граничными условиями, которые задаются значениями поля $u(\mathbf{R})$ и его производных вблизи стенок бассейна.

Поле, возбуждаемое в бассейне излучателем, обозначим $\tilde{u}'(\mathbf{R})$ и представим его в аналогичном виде $\tilde{u}'(\mathbf{R}) = u'(\mathbf{R}) + v'(\mathbf{R})$, где $u'(\mathbf{R})$ – поле в свободном пространстве, а $v'(\mathbf{R})$ – вклад волн, отраженных от границ. Поля $u(\mathbf{R})$ и $u'(\mathbf{R})$ различаются вблизи излучателя и ЭИ, но на поверхности σ они совпадают. Следовательно, они совпадают во всей области Γ между σ и границей бассейна. Поэтому функции $v(\mathbf{R})$ и $v'(\mathbf{R})$ являются решениями уравнения Гельмгольца с одинаковыми граничными условиями.

Различие между $v(\mathbf{R})$ и $v'(\mathbf{R})$ обусловлено тем фактом, что $v(\mathbf{R})$ представляет решение в пустом бассейне (рассеяния волн на точечных ЭИ не происходит), а $v'(\mathbf{R})$ – решение в присутствии излучателя конечного размера. Если рассеяние на излучателе пренебрежимо мало, то компоненты полей $v(\mathbf{R})$ и $v'(\mathbf{R})$ всюду совпадают за исключением небольшой области вблизи излучателя. При этом на измерительной поверхности σ суммарные поля $\tilde{u}(\mathbf{R})$ и $\tilde{u}'(\mathbf{R})$ тоже совпадают.

Интуитивно понятно, что рассеянием на излучателе можно пренебречь, если его объем достаточно мал. Количественный критерий малости получен в работе [6] в предположении, что разме-

ры излучателя меньше длины волны и при оценке интенсивности рассеянного поля его можно заменить твердой сферой такого же объема. В этом случае интенсивность рассеянного поля у границы бассейна будет много меньше интенсивности падающего, если

$$V_s \ll \lambda^2 b / \pi, \quad (21)$$

где V_s – объем излучателя, b – характерный размер бассейна. При выполнении данного условия одни и те же ЭИ аппроксимируют поле излучателя и в свободном пространстве, и в бассейне.

Отметим, что представление акустического поля суперпозицией полей ЭИ, как правило, неоднозначно [13]. Даже при фиксированном выборе точек расположения монополей \mathbf{r}_n может существовать бесконечно много векторов \mathbf{A} , “обеспечивающих” выполнение равенств (1) и (3). Это происходит, если $M < N$ и система (4) недоопределена. Такая ситуация часто возникает при использовании метода ЭИ, поскольку количество приемников обычно меньше количества ЭИ [13]. Однако неоднозначность выбора \mathbf{A} не противоречит получению однозначного решения нашей обратной задачи. Ведь любые два вектора \mathbf{A} и \mathbf{A}' , которые определяют поля u и u' в свободном пространстве, совпадающие на поверхности σ , задают поля \tilde{u} и \tilde{u}' в бассейне, тоже совпадающие на σ . В этом легко убедиться с помощью рассуждения, аналогичного приведенному выше, при сравнении полей излучателя и моделирующих его ЭИ. Оба рассуждения фактически основаны на однозначности решения уравнения Гельмгольца с граничными условиями, заданными на замкнутой поверхности [20]. Точно также можно показать, что любой вектор \mathbf{A} , который задает поле (3), аппроксимирующее поле излучателя на поверхности σ в бассейне, одновременно задает поле (1), аппроксимирующее поле излучателя в свободном пространстве.

5. ВЫБОР КООРДИНАТ ПРИЕМНИКОВ

Принимая во внимание соотношения (14) и (16), поле в бассейне можно представить в виде

$$\tilde{u}(\mathbf{R}) = \sum_{q=1}^9 C_q \tilde{S}_q(\mathbf{R}), \quad (22)$$

где

$$\tilde{S}_q(\mathbf{R}) \equiv \sum_{n=1}^N P_{qn} \tilde{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n). \quad (23)$$

Переход от (14) к (22) является аналогом перехода от (1) к (3). Использование априорной информации об излучателе (пренебрежение вкладом высших мультиполей) позволило свести задачу

отыскания N неизвестных коэффициентов A_n к отысканию девяти коэффициентов C_q . Связь между A_n и C_q выражается соотношением

$$A_n = \sum_{q=1}^9 P_{qn} C_q, \quad (24)$$

которое легко получить, подставляя (23) в (22) и сравнивая найденное выражение с (3).

Таким образом, от системы линейных уравнений (4) мы переходим к системе

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{C}, \quad (25)$$

где \mathbf{C} – вектор размера 9×1 с элементами C_q , $q = 1, \dots, 9$, а $\tilde{\mathbf{S}}$ – матрица размера $M \times 9$, столбцами которой служат векторы $[\tilde{S}_q(\mathbf{R}_1), \dots, \tilde{S}_q(\mathbf{R}_M)]^T$. Предполагается, что $M \geq 9$, т.е. поле в бассейне измеряется, как минимум, в девяти точках. В противном случае система (25) будет недоопределена, ее решение будет неоднозначным, и в отсутствие дополнительной априорной информации об источнике мы не сможем снять эту неопределенность. При $M \geq 9$ решение (25) равно $\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{S}}^+ \tilde{\mathbf{u}}$, где $\tilde{\mathbf{S}}^+$ – матрица, обратная или псевдообратная к $\tilde{\mathbf{S}}$. Для того чтобы решение было слабо чувствительно к влиянию шумов и погрешностей измерений, нужно, чтобы матрица $\tilde{\mathbf{S}}$ была хорошо обусловлена. Это значит, что число обусловленности, которое в данном случае выражается отношением первого (наибольшего) сингулярного числа $\tilde{\mathbf{S}}$ к девятому (наименьшему), должно быть не слишком велико. Точки приема $\mathbf{R} = \mathbf{R}_m$, удовлетворяющие условию (18), должны быть выбраны таким образом, чтобы это требование выполнялось. В совокупности с условиями, выраженными неравенствами (17) и (20), данное требование дает ответ на вопрос 3 из разд. 2 о достаточном условии правильной реконструкции амплитуд ЭИ. После того, как коэффициенты C_q найдены, амплитуды ЭИ A_n находятся по формуле (24).

Искомое поле калибруемого источника в свободном пространстве затем вычисляется подстановкой найденных A_n в (1) или, что эквивалентно, подстановкой найденных C_q в первые девять слагаемых суммы в правой части (14) и отбрасыванием остальных слагаемых.

6. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Для иллюстрации описанной процедуры рассмотрим реконструкцию поля идеализированной модели излучателя, имеющего форму куба с длиной ребра $a = 0.3$ м, две пары противоположных

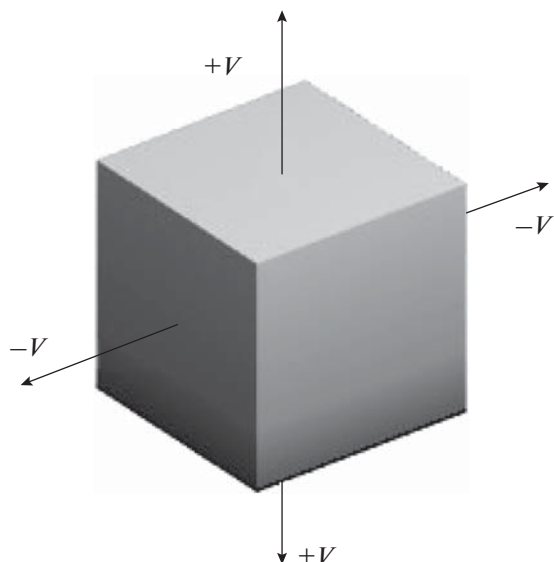


Рис. 2. Модель калибруемого излучателя.

граней которого осциллируют вдоль своих нормалей (рис. 2). Комплексные амплитуды скоростей у каждой пары одинаковы. Они равны V у одной пары и $-V$ у другой. Две оставшиеся грани неподвижны.

Излучатель работает на частоте $f = 1000$ Гц в бассейне, тоже имеющем форму куба с ребром длиной 3 м и твердыми границами. Бассейн заполнен водой со скоростью звука $c = 1500$ м/с. Поскольку длина волны $\lambda = 1.5$ м велика по сравнению с размером нашего источника, его поле в дальней зоне должно быть близко к полю квадрупля.

Поля, возбужденные в свободном пространстве и бассейне, рассчитывались методом конечных элементов. Грани излучателя располагались параллельно граням бассейна, а его центр был смещен на 0.5 м вдоль одного из ребер. При анализе поля использовалась сферическая система координат, центр которой совпадал с центром источника.

В качестве измерительной поверхности σ , на которой располагались точки приема, была взята сфера радиусом $R = 1.4$ м. Она приблизительно равномерно была покрыта $M = 150$ точками приема \mathbf{R}_m . ЭИ располагались в 27 точках, образующих куб размером $3 \times 3 \times 3$ см с расстоянием между ближайшими точками (шагом кубической решетки) 0.015 м. Для выбранных точек расположения ЭИ и приемников условия (17) и (18) выполняются.

При вычислении матрицы \mathbf{P} , псевдообратной к \mathbf{Q} , использован тот же метод, базирующийся на сингулярном разложении, который применялся при вычислении псевдообратной матрицы $\tilde{\mathbf{G}}^+$

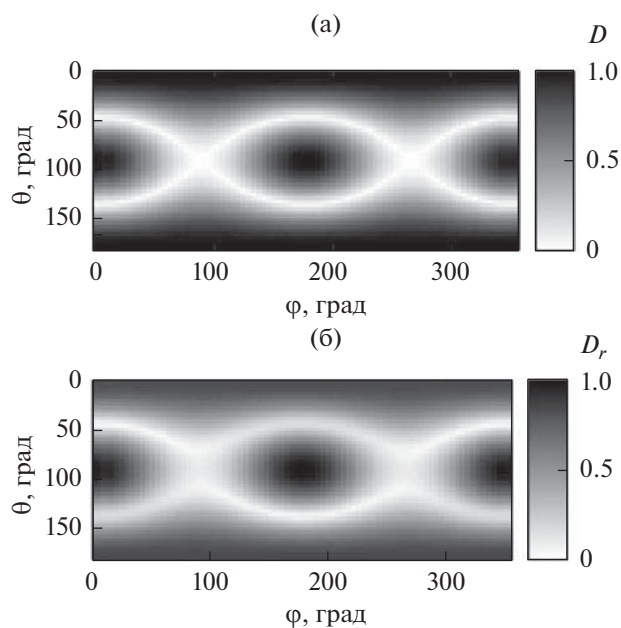


Рис. 3. Диаграмма направленности излучателя. (а) – Расчет в свободном пространстве. (б) – Результат реконструкции по измерениям в бассейне.

(см. (6)). Матрица \mathbf{Q} имеет размер $N \times K$, где K – количество слагаемых, удерживаемых в сумме (15). Величина K определяется тем, насколько быстро уменьшаются амплитуды коэффициентов $|Q_{nq}|$ с ростом q . В нашем примере значения $|Q_{nq}|$ резко спадают при $q > 9$, и поэтому мы выбрали $K = 9$. Результаты моделирования показывают, что увеличение K не повышает точности реконструкции.

Величины параметров ϵ_q , заданные (19), в нашем примере не превышают 0.01, т.е. критерий правильности выбора позиций ЭИ (20) выполняется. Отношение наибольшего сингулярного числа матрицы $\tilde{\mathbf{S}}$ к наименьшему равно 60, что свидетельствует о хорошей обусловленности данной матрицы.

На рис. 3 показан результат реконструкции диаграммы направленности нашего источника в свободном пространстве

$$D(\varphi, \theta) = \frac{|u(R, \theta, \varphi)|}{\max(|u(R, \theta, \varphi)|)_{R \rightarrow \infty}}$$

Поскольку амплитуда возбуждаемого поля прямо пропорциональна скорости пульсации граней V , диаграмма направленности от V не зависит. На рис. 3а показана диаграмма $D(\theta, \varphi)$, найденная путем прямого расчета поля в свободном пространстве, а на рис. 3б – диаграмма $D_r(\theta, \varphi)$, реконструированная по значениям \tilde{u} в

указанных выше точках \mathbf{R}_m . Точность реконструкции количественно характеризуется параметром

$$\mu = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta |D(\theta, \varphi) - D_r(\theta, \varphi)|}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta D(\theta, \varphi)},$$

который в нашем примере равен 0.13. Практически такой же результат получается, если из 150 точек приема \mathbf{R}_m оставить лишь 9. При этом нужно, чтобы эти точки были расположены достаточно далеко друг от друга, так как в противном случае у матрицы $\tilde{\mathbf{S}}$ могут оказаться близкие столбцы и она станет плохо обусловленной. Во всех рассмотренных нами примерах хорошо обусловленной матрицы $\tilde{\mathbf{S}}$ (с числом обусловленности менее 1000) параметр μ принимал значения, не превышающие 0.25. Аналогичные результаты были получены при реконструкции поля другого модельного источника, представляющего собой твердый цилиндр с пульсирующими основаниями.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Условия применимости метода ЭИ, неизвестные в общем случае [8, 12], в данной работе сформулированы для источника, в мультипольном разложении поля которого в свободном пространстве все компоненты, кроме монопольной, дипольных и квадрупольных, пренебрежимо малы. В этом случае реконструируемое поле представлено суммой первых девяти членов ряда (14), и задача заключается в отыскании неизвестных амплитуд C_1, \dots, C_9 . Для решения задачи ЭИ должны быть расположены таким образом, чтобы суперпозиции их полей могли аппроксимировать каждую из девяти функций $S_q(\mathbf{R})$ (условие (20)). При этом поле в бассейне будет представлено в виде суперпозиции девяти функций $\tilde{S}_q(\mathbf{R})$ с теми же амплитудами C_1, \dots, C_9 , что и в свободном пространстве. Для восстановления этих амплитуд достаточно, чтобы система уравнений (25) состояла всего из девяти уравнений. Поэтому при регистрации излученного поля нет необходимости в том, чтобы точки приема \mathbf{R}_m плотно покрывали поверхность σ . Достаточно иметь всего 9 правильно (с учетом введенных требований) выбранных точек приема.

Основным результатом данной статьи является формулировка достаточных условий применимости метода калибровки акустического излучателя, идея которого предложена в [6]. Следует отметить, что необходимость найденных условий здесь не доказана. Предполагается, что точки \mathbf{r}_i и

\mathbf{R}_m выбираются эмпирически с соблюдением неравенств (17) и (18). Правильность выбора затем проверяется с помощью критериев, установленных в разд. 3 и 5: должны выполняться неравенства (20) и матрица $\tilde{\mathbf{S}}$ должна быть хорошо обусловлена. Еще одним условием применимости обсуждаемого подхода является малость объема источника, который должен удовлетворять критерию (21).

В данной работе мы не рассматривали влияния внешних шумов и неточности измерений, приводящих к тому, что вектор $\tilde{\mathbf{u}}$ всегда известен с некоторой ошибкой. Этот вопрос требует специального изучения. Здесь мы отметим лишь, что вследствие хорошей обусловленности матрицы $\tilde{\mathbf{S}}$ малые изменения вектора $\tilde{\mathbf{u}}$ вызывают малые изменения решения системы (25) и, соответственно, приводят к относительно небольшим ошибкам в реконструкции поля источника.

Результаты численного моделирования подтверждают эффективность введенных критериев. Вместе с тем вопрос оптимального выбора количества ЭИ и их позиций остается открытым.

Неисследованным пока остается и вопрос об условиях применимости сделанного в начале разд. 4 предположения том, что отражения волн от границ бассейна не приводят к заметному изменению скорости осцилляций поверхности излучателя по сравнению со случаем свободного пространства. Ответ на этот вопрос для каждого конкретного источника должен быть получен с использованием соответствующих уравнений электромеханического преобразования и оценок радиационного импеданса источника в бассейне [21, 22].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН (проекты 0035-2019-0019 и 0035-2019-0006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боббер Р.* Гидроакустические измерения. М.: Мир, 1974. 361 с.
2. *Robinson S.P.* Review of methods for low frequency transducer calibration in reverberant tanks. NPL Report SMAM 034. 1999.
3. *Robinson S.P., Hayman G., Harris P.M., Beamiss G.A.* Signal-modeling methods applied to the free-field calibration of hydrophones and projectors in laboratory test tanks // Meas. Sci. Technol. 2018. 29:085001.
4. *Исаев А.Е., Матвеев А.Н.* Градуировка гидрофонов по полю при непрерывном излучении в ревербирующем бассейне // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 727–736.
5. *Исаев А.Е., Николаенко А.С., Черников И.В.* Подавление реверберационных искажений сигнала приемника с использованием передаточной функции

- бассейна // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 2. С. 165–174.
6. *Virovlyansky A.L., Deryabin M.S.* On the use of the equivalent source method for free-field calibration of an radiator in a reverberant tank // *J. Sound. Vibr.* 2019. V. 455. P. 69–81.
 7. *Koortmann G.H., Song L., Fahnlone J.B.* A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition // *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. V. 86. № 6. P. 2433–2438.
 8. *Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М.* Общие свойства и принципиальные погрешности метода эквивалентных источников // *Акуст. журн.* 1995. Т. 41. № 5. С. 737–750.
 9. *Johnson M.E., Elliott S.J., Baek K.-H., Garcia-Bonito J.* An equivalent source technique for calculating the sound field inside an enclosure containing scattering objects // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. V. 104. № 3. P. 1221–1231.
 10. *Zhang Y.-B., Jacobsen F., Bi C.-X., Chen X.-Z.* Near field acoustic holography based on the equivalent source method and pressure-velocity transducers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2009. V. 126. № 3. P. 1257–1263.
 11. *Gounot Y.J.R., Musafir R.E.* Simulation of scattered fields: some guidelines for the equivalent source method // *J. Sound. Vibr.* 2011. V. 330. № 15. P. 3698–3709.
 12. *Lee S.* Review: the use of equivalent source method in computational acoustics // *J. Comput. Acoustics.* 2017. V. 25. № 1. 1630001.
 13. *Fernandez-Grande E., Xenaki A., Gerstoft P.* A sparse equivalent source method for near-field acoustic holography // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 141. № 1. P. 532–542.
 14. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
 15. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология: теория и методы. Т. 2. М.: Мир, 1983. 360 с.
 16. *Rossing T.D.* Springer Handbooks of Acoustics. New York: Springer, 2007. 1182 p.
 17. *Williams E.G.* Fourier Acoustic. Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography. San Diego: Academic Press, 1999. 306 p.
 18. *Gumerov N., Duraiswami R.* Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions. Oxford: Elsevier Ltd, 2004. 520 p.
 19. *Абрамовиц М., Стиган И. (ред).* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
 20. *Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З.* Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. 272 с.
 21. *Свердлин Г.М.* Прикладная гидроакустика. Ленинград: Судостроение, 1990. 320 с.
 22. *Butler J.L., Sherman C.H.* Transducers and Arrays for Underwater Sound. CA: Peninsula Press, Springer, 2016. 716 p.