

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ
В УПРУГИХ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

© 2021 г. А. О. Ватульян^{a, b, *}, Л. И. Паринова^{a, **}

^aЮжный федеральный университет,
ул. Большая Садовая 105/42, Ростов-на-Дону, 344006 Россия

^bЮжный математический институт-филиал ВЦ РАН,
ул. Маркуса 22, Владикавказ, 362027 Россия

*e-mail: vatuilyan@math.rsu.ru

**e-mail: parinova@mail.ru

Поступила в редакцию 08.07.2020 г.

После доработки 06.11.2020 г.

Принята к публикации 22.12.2020 г.

Изучены особенности распространения акустических волн в ортотропных упругих топографических волноводах — протяженных цилиндрических структурах с симметричными поперечными сечениями различных форм (прямоугольным, трапециевидным). Предложен способ приближенного исследования задач в рамках моделей пластин переменной жесткости, опирающийся на вариационный принцип Гамильтона—Остроградского. В рамках гипотезы о структуре полей, аналогичной модели Тимошенко в теории пластин, построен функционал, зависящий от 3 функций одной переменной. Стационарное значение функционала находилось с помощью метода Рунге. Исследована его сходимости в зависимости от числа координатных функций. Сформирована алгебраическая система, равенство нулю определителя которой дает возможность построить дисперсионное уравнение задачи. Построены дисперсионные зависимости для сечений различной геометрии. Проведено сравнение дисперсионных кривых, построенных в рамках модели типа Тимошенко и в рамках изученной ранее модели Кирхгофа. Определены частоты запирающие для упругих волноводов с треугольным, прямоугольным и трапециевидным поперечным сечением, проведен сравнительный анализ.

Ключевые слова: топографический волновод, упругая волна, пластина переменной жесткости, дисперсионное соотношение, модель типа Тимошенко

DOI: 10.31857/S0320791921020106

ВВЕДЕНИЕ

Изучение кинематики волновых процессов, возникающих в топографических волноводах, актуально для совершенствования методов неразрушающего контроля, широко применяющихся для выявления дефектов. Исследование упругих волн с различными типами локализации имеет практический интерес для разработки эффективных фильтров и линий задержки, мониторинга состояния режущего инструмента и выявления дефектов в сварочных и спаячных структурах.

К настоящему времени в научной литературе достаточно подробно описаны особенности формирования волновых процессов в изотропных и анизотропных волноводах, проанализированы дисперсионные зависимости и особенности их строения для слоистых и цилиндрических структур, в том числе и для неоднородных по поперечной координате. Гораздо меньше изучены волновые процессы в топографических волноводах, для

которых построение дисперсионных зависимостей является непростой задачей; при построении ветвей дисперсионного множества обычно используются КЭ—пакеты. Отметим, что практически отсутствуют работы, посвященные изучению волновых процессов в клиновидных структурах из ортотропных материалов.

Изучение волновых процессов, возникающих в упругих клиновидных волноводах в изотропном случае, тесно связано с исследованиями особенностей распространения акустических волн вдоль ребра пространственного клина, которые проводились еще в 70-годах прошлого века. В работах [1, 2] при помощи метода конечных элементов исследованы колебания изотропного бесконечного клиновидного волновода с произвольным углом раскрытия. Установлено, что в рассматриваемом случае отсутствует дисперсия и волновое поле локализуется вдоль ребра пространственного клина.

В [3] в рамках теории возмущений исследованы некоторые факторы, влияющие на возникно-

вление дисперсии в бесконечном клине: усечение вершины клина и замена острия другим материалом, покрытие одной или обеих поверхностей клина, модификация упругих постоянных материала в области около вершины клина.

Локализация упругих волновых полей, бегущих вдоль вершин анизотропных клиньев с различными видами симметрии, и взаимодействие локализованных волн с другими видами волн, изучены в работе [4], где проведено экспериментальное измерение фазовых скоростей и распределения волновых полей, а также выполнено теоретическое исследование клиновых мод, опирающееся на функции Лагерра.

В [5] с использованием вариационного подхода получены условия существования симметричных и антисимметричных мод для бесконечного клинообразного волновода. Существование клиновых волн в некотором диапазоне изменения угла раскрытия было строго доказано в работах [6, 7], а в [8] представлено доказательство существования волн в топографических волноводах с более сложной формой поперечного сечения. В [9] строгое доказательство существования локализованных акустических клиновых волн, предложенное Камоцким, Заворохиным и Назаровым, распространяется на случай клина с прямым углом.

Отметим также, что особое внимание при исследовании волновых процессов в топографических волноводах уделяется изучению пластинчатых и балочных моделей. Первопроходцем в изучении волн у кромки пластин считается Коненков. В работе [10], опубликованной в 1960 году, приведено пионерское исследование распространения изгибающей краевой волны вдоль свободного края полубесконечной пластины.

Исследование акустического отклика жестко заземленной по контуру пластины в рамках моделей Тимошенко и Кирхгофа–Лява представлено в работе [11], где для сравнения значений функции прогиба для различных вариантов параметров применялся метод Галеркина.

В [12] с использованием бесконтактного метода оптического зондирования изучены линейные одномерные сверхзвуковые и основные моды клиновой волны, направляемой краем кристалла кремния, определены скорость клиновых волн и глубина их проникновения, проведено сравнение теоретических и экспериментальных данных.

В работе [13] показано, что, анализируя особенности колебаний неоднородных цилиндрических волноводов и зная информацию о поле смещений на поверхности, можно определить неоднородные упругие свойства этой структуры.

Периодический гофрированный волновод из пористого материала исследуется в работе [14], где показано, что дополнительная извилистость усиливает звукопоглощение для низких частот.

Закономерности, возникающие при нахождении дисперсионных соотношений для неоднородного пьезоэлектрического волновода с затуханием, обсуждены в [15], где для исследования применяется асимптотический метод.

В предыдущих работах авторов настоящей работы [16–19] в рамках теории пластин переменной жесткости Кирхгофа были проанализированы волновые процессы в топографических волноводах из изотропных и ортотропных материалов. Для изотропного случая проведено сравнение скоростей клиновых волн, полученных в рамках вариационного подхода, с аналогичными результатами, но найденными по геометроакустической теории, представленной в [20]. Для антисимметричных мод в клиновидных структурах с ортотропным типом анизотропии построены дисперсионные соотношения.

Исследования волновых процессов в топографических волноводах можно проводить на основе моделей пластин переменной жесткости Кирхгофа или типа Тимошенко, для которых можно сформулировать краевые задачи для операторов с переменными коэффициентами. В работе [21] с использованием обобщенных гипотез теории пластин переменной жесткости типа Тимошенко авторы настоящей работы изучили особенности волновых процессов в клиновидных волноводах конечной высоты с закрепленным основанием.

Цель настоящей работы – в рамках теории пластин переменной жесткости типа Тимошенко разработать подход для изучения дисперсионных зависимостей для топографических волноводов, представляющих собой упругие структуры с трапециевидным поперечным сечением конечных размеров, а также совершить предельный переход к треугольному и прямоугольному случаю. В настоящем исследовании на основе вариационной трактовки исходной задачи при анализе дисперсионного множества использован метод Ритца.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Под топографическим волноводом будем понимать бесконечную упругую структуру, ограниченную цилиндрической поверхностью, в поперечном сечении которой находится многоугольник (в настоящем исследовании в общем случае это трапеция); одна из граней волновода закреплена. Особенности распространения упругих волн в волноводах с конечным поперечным сечением изучены недостаточно. Для бесконечного клина известно о локализации энергии в поперечном сечении около ребра и отсутствии дисперсии; интерес представляет исследование волновых процессов и дисперсионных соотношений для волноводов с прямоугольным и трапециевидным поперечным сечением.

Задача для ограниченного по высоте клиновидного волновода, поперечное сечение которого – конечный треугольник, подробно изучена в работе [21]. В настоящем исследовании рассмотрим упругие волны, распространяющиеся вдоль оси упругого топографического волновода из ортотропного материала с сечением S , которое в общем случае представляет собой равнобедренную трапецию с высотой h , углом при основании $\pi/2 - \alpha$ и меньшим основанием длины $2l$ (рис. 1). Введем связанную с осями упругой симметрии декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. Будем считать, что ось Ox_3 направлена перпендикулярно плоскости поперечного сечения волновода и проходит через середину меньшего основания трапеции. Нижняя граница волноводной структуры заземлена. Нагрузки на верхней и боковых гранях отсутствуют.

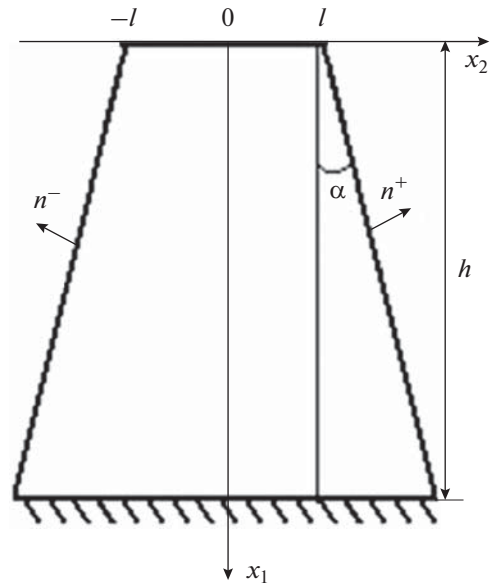


Рис. 1. Поперечное сечение волновода.

Как и в работе [21], решение задачи для цилиндрического волновода с сечением в виде трапеции будем искать в виде волн, распространяющихся вдоль оси Ox_3 изучаемой упругой структуры:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3, t) &= U_1(x_1, x_2) \cos(\gamma x_3 - \omega t), \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) &= U_2(x_1, x_2) \cos(\gamma x_3 - \omega t), \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= U_3(x_1, x_2) \sin(\gamma x_3 - \omega t), \end{aligned}$$

где γ – волновое число, $U_m(x_1, x_2)$, $m = 1, 2, 3$ – проекции вектора смещений в плоскости Ox_1x_2 , ω – частота вибраций волновода.

Для перехода к безразмерной задаче введем следующие параметры: $\gamma_i = C_{ij}/C_{55}$, где $i = 1-4, 6$, $\gamma_5 = C_{12}/C_{55}$, $\gamma_7 = C_{23}/C_{55}$, $\gamma_8 = C_{13}/C_{55}$, $\beta = \rho\omega^2 h^2 / C_{55}$, $\mu = \gamma^2 h^2$, где ρ – плотность материала, C_{ij} – упругие постоянные ортотропного материала. Задачу о распространении волны для усеченного клиновидного волновода сводим к определению стационарного значения квадратичного функционала M :

$$M[U_i] = \int_S M_0 dS, \quad (1)$$

который после отделения временного множителя формируется на основе принципа Гамильтона–Остроградского [18].

Подынтегральная функция в (1) есть квадратичная функция амплитуд и их производных и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} M_0 &= (\gamma_1 U_{1,1} + \gamma_3 U_{2,2} + \gamma_8 U_{3,3}) U_{1,1} + \\ &+ (\gamma_5 U_{1,1} + \gamma_2 U_{2,2} + \gamma_7 U_{3,3}) U_{2,2} + \\ &+ (\gamma_8 U_{1,1} + \gamma_7 U_{2,2} + \gamma_3 U_{3,3}) U_{3,3} + \gamma_6 (U_{1,2} + U_{2,1})^2 + \\ &+ (U_{1,3} + U_{3,1})^2 + \gamma_4 (U_{2,3} + U_{3,2})^2 - \\ &- \beta (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2). \end{aligned}$$

Здесь нижний индекс после запятой обозначает производную по соответствующей координате.

Из условия стационарности функционала $\delta M[U_i] = 0$ можно получить однородную краевую задачу с двумя спектральными параметрами μ и β ; те соотношения между спектральными параметрами μ и β , при которых эта задача имеет нетривиальное решение, порождает дисперсионное множество задачи. Построим первые ветви этого множества, используя вариационную трактовку и упрощения функционала.

МОДЕЛЬ ПЛАСТИНЫ ТИПА ТИМОШЕНКО

Для нахождения приближенного решения задачи в случае малого угла раскрытия используем гипотезы, подобные гипотезам теории пластин.

Отметим, что колебания волновода по типу движений подразделяются на два типа: симметричные и антисимметричные. Учитывая, что свободные симметричные колебания топографического волновода с симметричным поперечным сечением обычно отсутствуют [5], подробно исследуем антисимметричный случай.

Считая, что углы при основании трапециевидного поперечного сечения мало отличаются от $\pi/2$, предположим, что компоненты амплитуд смещений соответствуют гипотезам, аналогичным гипотезам теории пластин для модели Тимошенко [11]:

$$U_1 = x_2 W_1(x_1), \quad U_2 = h W_2(x_1), \quad U_3 = \gamma x_2 h W_3(x_1).$$

Совершая переход к безразмерным величинам, сделаем замену переменных: $z = x_1/h$ и учтем обобщенные гипотезы. В выражении для функционала (1) осуществим интегрирование по x_2 . Таким образом, найдем упрощенное значение

функционала (1) и задачу об анализе волновых полей для топографических волноводов сведем к задаче об исследовании стационарного значения функционала M :

$$M[W_j] = \int_0^1 M_0^* dz, \quad (2)$$

где

$$M_0^* = 2h \left(\frac{1}{3} (zt + s)^3 \left(\gamma_1 W_1'^2 + 2\mu \gamma_8 W_1' W_3 + \mu^2 \gamma_3 W_3^2 + \mu (-W_1 + W_3')^2 \right) - \beta (W_1^2 + \mu W_3^2) \right) + (zt + s) \left(\gamma_6 (W_1 + W_2^1)^2 + \gamma_4 \mu (-W_2 + W_3)^2 - \beta W_2^2 \right)$$

и введены обозначения $t = \operatorname{tg} \alpha$, $s = l/h$. Отметим, что исходя из представления (2), можно с единых позиций исследовать дисперсионные множества для различных поперечных сечений, варьируя параметры. Так, например, задавая $s = 0$, можно получить функционал для волновода с треугольным поперечным сечением, исследование которого осуществлено в работе [21].

Определим стационарное значение функционала $M[W_j]$, основываясь на методе Ритца. Учитывая известные требования к координатным функциям, выберем решение из класса функций $W(z)$, ограниченных при $z = 0$ и удовлетворяющих граничным условиям жесткого защемления при $z = 1$. Решение о нахождении стационарного значения функционала (2) будем искать в следующем виде:

$$W_1 = (1 - z)^2 \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(z),$$

$$W_2 = (1 - z)^2 \sum_{n=1}^N b_n \varphi_n(z),$$

$$W_3 = (1 - z)^2 \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n(z).$$

В качестве координатных функций выберем систему функций $\varphi_n(z) = z^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Тогда функционал (2) можно представить в виде квадратичной формы $3N$ переменных относительно коэффициентов разложений.

Условие стационарности функционала (2) позволяет сформулировать однородную систему линейных однородных уравнений; приравняв к нулю ее определитель, получим приближенный вид дисперсионного уравнения. Определяя его нули в окрестности начала координат, найдем ветви дисперсионного множества.

В качестве примера рассмотрим частный случай при $N = 2$. Проинтегрировав (2) по z , получаем функционал, представляющий собой квадратичную форму 6 переменных.

$$M(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2) = k_{11} a_1^2 + k_{12} a_1 b_1 + k_{13} a_1 c_1 + k_{14} a_1 a_2 + k_{15} a_1 b_2 + k_{16} a_1 c_2 + k_{22} b_1^2 + k_{23} b_1 c_1 + k_{24} b_1 a_2 + k_{25} b_1 b_2 + k_{26} b_1 c_2 + k_{33} c_1^2 + k_{34} c_1 a_2 + k_{35} c_1 b_2 + k_{36} c_1 c_2 + k_{44} a_2^2 + k_{45} a_2 b_2 + k_{46} a_2 c_2 + k_{55} b_2^2 + k_{56} b_2 c_2 + k_{66} a_6^2,$$

где все $k_{ij} = k_{ij}(\beta, \mu)$, $i, j = 1-6$ полиномиальным образом зависят от спектральных параметров. В силу громоздкости они не приводятся; приведем, например:

$$k_{11} = \left(-\frac{1}{15} s^3 - \frac{1}{30} s^2 t - \frac{1}{840} t^3 - \frac{1}{105} s t^2 \right) \beta + \frac{1}{30} \gamma_6 t + \frac{1}{5} \gamma_6 s + \left(\frac{2}{15} \gamma_1 + \frac{1}{105} \mu \right) s t^2 + \left(\frac{1}{3} \gamma_1 + \frac{1}{30} \mu \right) s^2 t + \left(\frac{1}{45} \gamma_1 + \frac{1}{840} \mu \right) t^3 + \left(\frac{4}{9} \gamma_1 + \frac{1}{15} \mu \right) s^3.$$

Стоит отметить, что, совершая предельный переход при $s \rightarrow 0$, при нахождении стационарного значения функционала (2) можно получить уравнение для определения дисперсионного множества такое же, как и при исследовании волновых процессов для клиновидного волновода, представленного в [21].

Можно также заметить, что при наличии связей $W_1 = -W$, $W_2 = W_3 = W$ модель пластины переменной жесткости типа Тимошенко сводится к частному случаю — к модели типа Кирхгофа. Функционал (2) преобразуется в функционал, который зависит от одной переменной W и имеет вид:

$$M_0^* = 2h \left(\frac{1}{3} (zt + s)^3 \times \left(\gamma_1 W''^2 - 2\mu \gamma_8 W'' W + \mu^2 \gamma_3 W^2 + 4\mu (W')^2 \right) - \beta \left((W')^2 + \mu W^2 \right) \right) - (zt + s) \beta W^2.$$

Полученное дисперсионное множество для пластины Кирхгофа исследовано в работе [18].

Таблица 1. Значения μ для первой и второй моды

№ моды	β	Число координатных функций				
		$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$	$N = 10$
1 мода	1	34.442	34.451	34.475	34.483	34.499
	2	60.671	60.681	60.708	60.723	60.745
	3	82.798	82.821	82.859	82.889	82.922
	4	102.614	102.653	102.703	102.750	102.798
	5	120.841	120.943	120.959	121.024	121.088
2 мода	2	8.894	9.073	9.167	9.240	9.293
	3	19.857	20.068	20.137	20.207	20.251
	4	29.737	29.563	29.611	29.677	29.714
	5	37.825	38.088	38.120	38.184	38.216

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В ходе исследований рассматриваются топографические волноводы со следующими геометрическими параметрами $\alpha = 5^\circ$ и $s = 0.01$. На основе приближенного подхода с использованием метода Ритца получены дисперсионные зависимости для различного числа координатных функций. Серия вычислительных экспериментов проводится для ортотропного материала – аустенитной стали, которая характеризуется следующими безразмерными параметрами [22]: $\gamma_1 = 2.036$, $\gamma_2 = 2.036$, $\gamma_3 = 1.674$, $\gamma_4 = 1.000$, $\gamma_5 = 0.761$, $\gamma_6 = 0.598$, $\gamma_7 = 1.124$, $\gamma_8 = 1.124$.

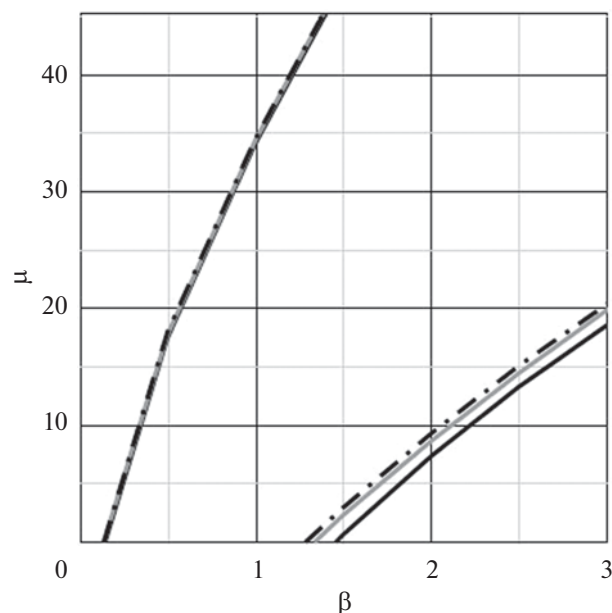
В табл. 1 для различного числа координатных функций показаны найденные значения $\mu(\beta)$. Отметим, что значения безразмерного параметра μ монотонно увеличиваются с увеличением числа координатных функций, что подтверждает характер сходимости при реализации метода Ритца [23]. Стабилизация значений параметра μ для первой моды и для второй моды достигнута при $N = 10$. При этом относительная разница между значениями μ , которые соответствуют $N = 9$ и $N = 10$, не превосходит 1%.

Графики дисперсионных зависимостей μ от параметра β для первых двух мод приведены на рис. 2 для различного числа координатных функций. Черной сплошной линией показаны зависимости для $N = 3$, серой сплошной – для $N = 5$ и черной штрихпунктирной – для $N = 10$.

Сравнение дисперсионных соотношений для модели Кирхгофа и модели типа Тимошенко для волноводов из аустенитной стали с различными поперечными сечениями представлено на рис. 3. Метками 1–5 отмечены соответствующие моды. Дисперсионные ветви для модели типа Тимошенко показаны черной сплошной линией, а для

модели Кирхгофа – точками. Результаты вычислительных экспериментов показали, что дисперсионные множества, найденные в рамках различных гипотез, отличаются незначительно в низкочастотной области.

Из общей теории волноводов известно, что для слоистого волновода имеется частота запираения, т.е. такое критическое значение β , при котором в волноводе отсутствует распространение мод $\mu = 0$ и имеется стоячая волна. Для изучаемого топографического волновода также были проанализированы аналогичные ситуации. Для волноводов с поперечным сечением в виде равнобедрен-

**Рис. 2.** Графики дисперсионных зависимостей $\mu(\beta)$.

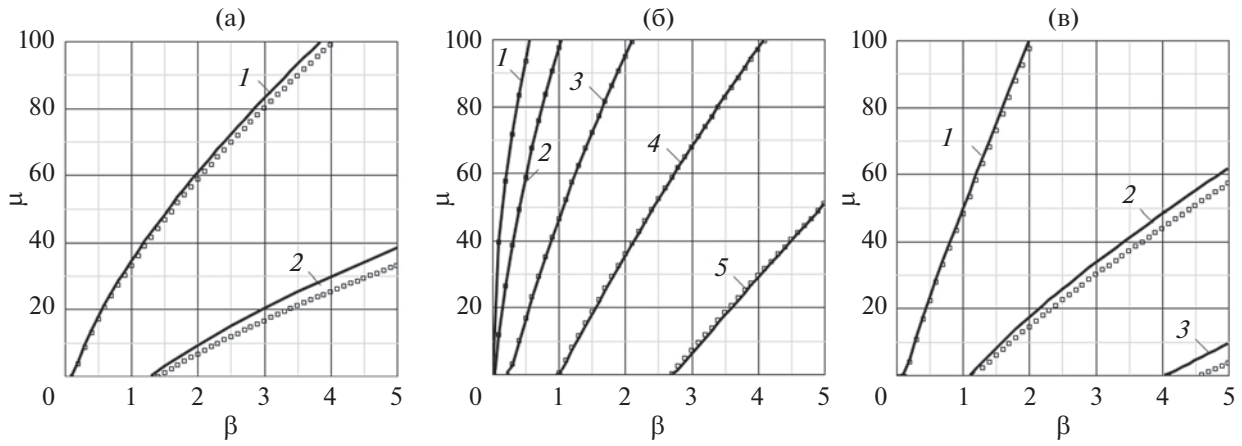


Рис. 3. Графики зависимости $\mu(\beta)$ для модели Кирхгофа и модели типа Тимошенко для случая $N = 10$ для топографического волновода с сечением в виде (а) – трапеции, (б) – прямоугольника и (в) – треугольника.

ного треугольника, прямоугольника и равнобочной трапеции были найдены критические значения, которые представлены в табл. 2.

В табл. 3 представлена зависимость для частот записания $\beta(s)$ при фиксированном значении $\alpha = 5^\circ$. Из анализа полученных значений следует, что с увеличением значения параметра s , представляющего собой отношение половины длины меньше-

го основания трапеции к ее высоте, монотонно возрастают и значения спектрального параметра β , при котором в волноводе отсутствует распространение мод и имеется стоячая волна.

Представленная в табл. 4 зависимость значений частот записания β от параметра α при фиксированном значении $s = 0.01$ демонстрирует, что с увеличением угла раскрыва значения спек-

Таблица 2. Значения частот записания β для изучаемых сечений

Трапециевидное сечение	0.133	1.286	5.536	15.497	33.706
Треугольное сечение	0.143	1.112	4.061	10.370	21.446
Прямоугольное сечение	0.001	0.034	0.266	1.015	2.749

Таблица 3. Значения частот записания β для волновода с трапециевидным поперечным сечением при фиксированном значении $\alpha = 5^\circ$

s	Значения частот записания β				
0.01	0.133	1.286	5.536	15.497	33.706
0.02	0.141	1.623	7.388	20.663	44.124
0.03	0.155	1.981	9.145	25.168	52.583
0.04	0.171	2.339	10.776	29.087	59.605
0.05	0.189	2.690	12.273	32.494	65.471

Таблица 4. Значения частот записания β для волновода с трапециевидным поперечным сечением при фиксированном значении $s = 0.01$

α	Значения частот записания β				
$\pi/180$	0.008	0.152	0.925	3.212	8.193
$\pi/90$	0.025	0.342	1.841	5.989	14.572
$\pi/60$	0.051	0.600	2.953	9.081	21.216
$\pi/45$	0.087	0.917	4.202	12.294	27.656
$\pi/36$	0.133	1.286	5.536	15.497	33.706

трального параметра β , при котором в волноводе отсутствует распространение мод и имеется стоячая волна, возрастают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе вариационного принципа Гамильтона—Остроградского, приближенного подхода Ритца и модели пластины переменной жесткости типа Тимошенко разработан полуаналитический метод для нахождения дисперсионных зависимостей и проведены вычислительные эксперименты. Для топографических волноводов из ортотропного материала с треугольным, прямоугольным и трапециевидным поперечным сечением получены дисперсионные зависимости и найдены точки, соответствующие частотам запираания. Проведен анализ частот запираания в зависимости от угла раскрытия и от параметра, представляющего собой отношение половины длины меньшего основания трапеции к ее высоте. Проведено сравнение полученных результатов в рамках модели пластины типа Тимошенко с результатами для изученной ранее модели Кирхгофа. Показано, что при малых частотах касательные напряжения практически не влияют на дисперсионное множество для первой и второй моды. Для третьей моды появляется более существенное различие и учет касательных напряжений весьма существен для расчета волновых полей.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90079-А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ash E.A., Rue R.M.D.L., Humphryes R.F. Microsound surface waveguide // IEEE Trans. Microw. Theory. Tech. 1969. V. 17. № 11. P. 882–892.
2. Lagasse P.E., Mason I.M., Ash E.A. Acoustic surface waveguides – analysis and assessment // IEEE Trans. Microw. Theory Tech. 1973. V. MTT-21. P. 225–226.
3. Sokolova E.S., Timler R., Mayer A.P., Kovalev A.S. On the dispersion of wedge acoustic waves // Wave Motion. 2013. T. 50. № 2. P. 233–245.
4. Pupyrev P.D., Lomonosov A.M., Mayer A.P., Hess P. Symmetry effects on elastic wedge waves at anisotropic edges // J. Appl. Phys. 2014. V. 115. № 24. P. 243504.
5. Tiersten H.F., Rubin D. On the fundamental antisymmetric mode of the wedge guide // Proc. IEEE Ultrasonic Symposium. 1974. P. 117–120.
6. Заворохин Г.Л., Назаров А.И. Об упругих волнах в клине // Записки научных семинаров ЛОМИ. 2010. Т. 380. С. 45–52.
7. Камоцкий И.В. О поверхностной волне, бегущей вдоль ребра упругого клина // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 1. С. 86–92.
8. Бабич В.М. Об одном классе топографических волноводов // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 1. С. 98–107.
9. Pupyrev P.D., Lomonosov A.M., Nikodijevic A., Mayer A.P. On the existence of guided acoustic waves at rectangular anisotropic edges // Ultrasonics. 2016. V. 71. P. 278–287.
10. Коненков Ю.К. Об изгибной волне “рэлеевского” типа // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 1. С. 124–126.
11. Богачев И.В., Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Идентификация свойств неоднородной пластины в рамках модели Тимошенко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17. № 4. С. 419–430.
12. Lomonosov A.M., Hess P., Mayer A.P. Silicon edges as one-dimensional waveguides for dispersion-free and supersonic leaky wedge waves // Appl. Phys. Lett. 2012. V. 101. № 3. P. 031904.
13. Ватульян А.О., Юров В.О. Об оценке законов радиальной неоднородности в цилиндрическом волноводе // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 2. С. 119–127.
14. Changyong Jiang, Lixi Huang. Characterization of low-frequency acoustic wave propagation through a periodic corrugated waveguide // J. Sound Vib. 2018. V. 418. P. 79–99.
15. Ватульян А.О., Юров В.О. Исследование дисперсионных свойств неоднородного пьезоэлектрического волновода при наличии затухания // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 4. С. 339–348.
16. Ватульян А.О., Паринова Л.И. Исследование клиновых волн в ортотропной среде // Вестник ДГТУ. 2005. Т. 5. № 4(26). С. 491–499.
17. Vatulyan A.O., Parinova L.I. On the elastic waves propagating along the edge of the wedge with small opening angle // Advanced Materials—Techniques, Physics, Mechanics and Applications. Springer Proceeding in Physics. Eds. Ivan A. Parinov, Shun-Hsyung Chang, Muaffaq A. Jani. Springer, Cham, 2017. V. 193. P. 309–319.
18. Ватульян А.О., Паринова Л.И. Об исследовании дисперсионных свойств топографических волноводов // Изв. вузов. Сев-Кавк. регион. Естеств. науки. 2018. № 3. С. 10–17.
19. Parinova L.I. On the wave propagating along the plate-like waveguide // Advanced Materials – Proc. of the Int. Conf. on “Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications”, PHENMA 2018, Springer Proceeding in Physics, V. 224. Eds. Ivan A. Parinov, Shun-Hsyung Chang, Yun-Hae Kim. 2019. P. 487–494.
20. Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991. 414 с.
21. Vatulyan A., Parinova L. On the use of models of the Timoshenko type in the analysis of wave processes in wedge-shaped waveguides // Advanced Materials – Proc. of the Int. Conf. on “Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications”, PHENMA 2019, Springer Proceedings in Materials. Eds. Ivan A. Parinov, Shun-Hsyung Chang, Banh Tien Long. Springer Nature, Cham, Switzerland, 2020. V. 6. P. 383–389.
22. Блистанов В.С., Бондаренко В.С., Перемолова Н.В., Стрижевская Ф.Н., Чкалова В.В., Шаскольская М.П. Акустические кристаллы: Справочник / Под ред. Шаскольской М.П. М.: Наука, 1982. 632 с.
23. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957. 476 с.