

УДК 539.3

## ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНЫХ СООСНЫХ ОБОЛОЧКАХ, ЗАПОЛНЕННЫХ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© 2021 г. Л. И. Могилевич<sup>а</sup>, \*, Ю. А. Блинков<sup>б</sup>, \*\*, С. В. Иванов<sup>б</sup>, \*\*\*

<sup>а</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., ул. Политехническая 77, Саратов, 410054 Россия

<sup>б</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, ул. Астраханская 83, Саратов, 410054 Россия

\*e-mail: mogilevichli@gmail.com

\*\*e-mail: blinkovua@gmail.com

\*\*\*e-mail: evilgraywolf@gmail.com

Поступила в редакцию 27.02.2021 г.

После доработки 04.05.2021 г.

Принята к публикации 10.06.2021 г.

Исследованы продольные волны деформации в физически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость как между ними, так и внутри. Учтено влияние инерции движения жидкости на амплитуду и скорость волны. При отсутствии влияния жидкости во внутренней оболочке скорость и амплитуда волн в оболочках не меняется. Движение профиля волны в сопровождающей системе координат происходит в отрицательном направлении. Это означает, что скорость движения дозвуковая. Учет влияния инерции движения жидкости во внутренней оболочке приводит к уменьшению скорости волны деформации, при этом вязкостное напряжение жидкости на оболочку приводит к падению амплитуд волн.

**Ключевые слова:** нелинейные волны, упругие цилиндрические оболочки, вязкая несжимаемая жидкость, разностная схема Кранка–Николсона

**DOI:** 10.31857/S0320791921050051

### ВВЕДЕНИЕ

Исследование волнового процесса в упругих оболочках имеет широкое применение в различных областях науки и техники. Распространение волн деформации в упругих и вязкоупругих оболочках рассмотрено в [1–5]. В этих работах не рассматривается случай взаимодействия оболочек с вязкой несжимаемой жидкостью. В [6–8] исследованы гидроупругие колебания оболочек, взаимодействующих с идеальной жидкостью. В [9, 10] рассмотрено взаимодействие оболочки с вязкой несжимаемой жидкостью без учета волновых явлений, не исследовано также влияние локальных инерционных членов. Исследование взаимодействия упругой оболочки с вязкой несжимаемой жидкостью с учетом волновых явлений и влияния локальных членов инерции движения жидкости проведено в [11]. Исследование волновых явлений для соосных упругих оболочек с вязкой несжимаемой жидкостью между ними проведено в [12].

Методами качественного анализа в случае заполнения оболочки вязкой несжимаемой жидкостью затруднительно исследовать модели волн

деформаций [11, 12]. Это приводит к необходимости применения численных методов [13].

В данной статье методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных физически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках. Они отличаются от известных учетом наличия несжимаемой вязкой жидкости как между оболочками, так и во внутренней оболочке. Эти модели рассмотрены на основе связанных задач гидроупругости в виде системы обобщенных модифицированных уравнений Кортевега–де Вриза (МКдВ). Выявлены эффекты влияния несжимаемой вязкой жидкости между оболочками на поведение волны деформаций в соосных оболочках. Наличие волны деформаций во внешней оболочке приводит к возникновению волны деформаций во внутренней оболочке, которой не было в начальный момент времени. В результате происходит “перекачка энергии” (через слой жидкости) от внешней оболочки к внутренней, сопровождающаяся немонотонным падением амплитуды волны во внешней оболочке и, как следствие, немонотон-

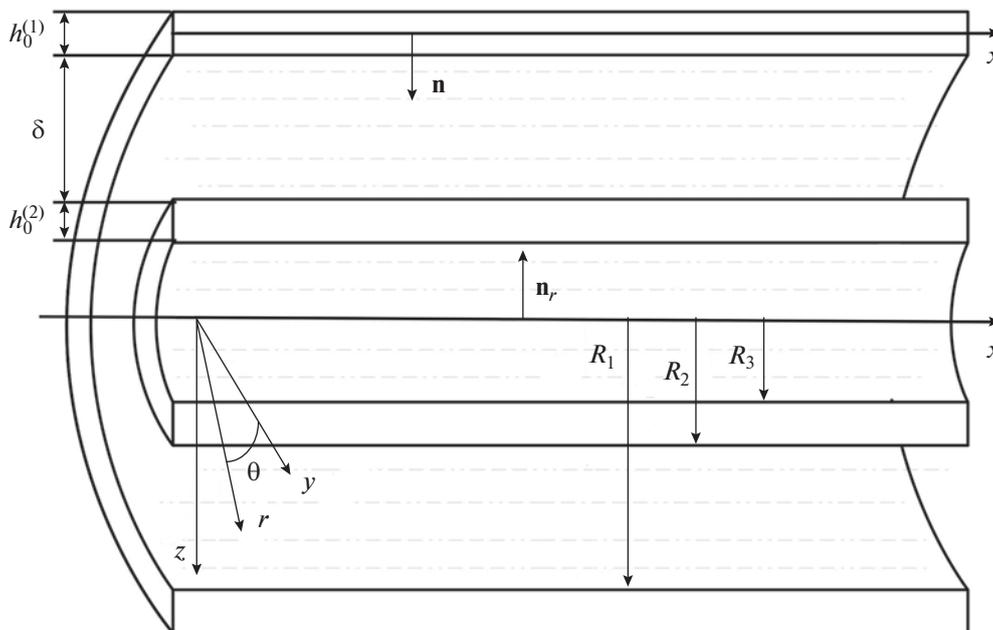


Рис. 1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки.

ным снижением скорости ее распространения. При этом во внутренней оболочке происходит немонотонное увеличение амплитуды. С течением времени, вследствие осцилляций скорости и амплитуды волн выравниваются. Наличие жидкости во внутренней оболочке приводит к уменьшению скорости и падению амплитуд волн в обеих оболочках.

Численное исследование модели, построенной в ходе данной работы, проводится с использованием разностной схемы, аналогичной схеме Кранка–Николсона в случае уравнения теплопроводности [13].

**ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ И РАЗРЕШАЮЩИЕ  
СООТНОШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИ  
НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК**

Рассмотрим две бесконечно длинные осесимметричные соосные упругие цилиндрические оболочки (рис. 1). Введем обозначения:  $R_1$  – радиус внутренней поверхности внешней оболочки;  $R_2$  – радиус внешней поверхности внутренней оболочки;  $R_3$  – радиус внутренней поверхности внутренней оболочки;  $\delta$  – толщина слоя жидкости при кольцевом сечении трубы;  $R^{(i)}$  – радиусы срединных поверхностей;  $h_0^{(i)}$  – толщины оболочки ( $i=1$  для внешней,  $i=2$  для внутренней оболочки).

Деформационная теория пластичности А.А. Ильюшина [14] связывает компоненты тензора напряжений  $\sigma_x, \sigma_\Theta$  с компонентами тензора

деформаций  $\epsilon_x, \epsilon_\Theta$  и квадратом интенсивности деформаций  $\epsilon_u$  [15, 16]:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(i)} &= \frac{E}{1-\mu_0^2} (\epsilon_x^{(i)} + \mu_0 \epsilon_\Theta^{(i)}) \left(1 - \frac{m}{E} \epsilon_u^{(i)2}\right), \\ \sigma_\Theta^{(i)} &= \frac{E}{1-\mu_0^2} (\epsilon_\Theta^{(i)} + \mu_0 \epsilon_x^{(i)}) \left(1 - \frac{m}{E} \epsilon_u^{(i)2}\right), \\ \epsilon_u^{(i)2} &= \frac{4}{9} (\mu_1 (\epsilon_x^{(i)2} + \epsilon_\Theta^{(i)2}) - \mu_2 \epsilon_x^{(i)} \epsilon_\Theta^{(i)}), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + \frac{\mu_0 (2\mu_0 - 1)}{(1 - \mu_0)^2}, \\ \mu_2 &= 1 - \frac{2\mu_0 (2\mu_0 - 1)}{(1 - \mu_0)^2}, \end{aligned}$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $m$  – константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие;  $\mu_0$  – коэффициент Пуассона материала оболочки.

Запишем связь компонент деформаций с упругими перемещениями в виде [14]

$$\epsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2}, \quad \epsilon_\Theta^{(i)} = -\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}, \tag{2}$$

где  $x$  – продольная координата вдоль срединной поверхности;  $z$  – нормальная координата в оболочке  $\left(-\frac{h_0^{(i)}}{2} \leq z \leq \frac{h_0^{(i)}}{2}\right)$ ;  $U^{(i)}$  – продольное упругое перемещение оболочки по оси  $x$ ;  $W^{(i)}$  – прогиб оболочки, положительный к центру кривизны.

Определим усилия в срединной поверхности оболочки и момент по следующим формулам

$$N_x^{(i)} = \int_{\frac{h_0^{(i)}}{2}}^{\frac{h_0^{(i)}}{2}} \sigma_x^{(i)} dz, \quad N_\Theta^{(i)} = \int_{\frac{h_0^{(i)}}{2}}^{\frac{h_0^{(i)}}{2}} \sigma_\Theta^{(i)} dz, \quad (3)$$

$$M_x^{(i)} = \int_{\frac{h_0^{(i)}}{2}}^{\frac{h_0^{(i)}}{2}} \sigma_x^{(i)} z dz.$$

Уравнения динамики для оболочек запишем аналогично [16]

$$\frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - [q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1)]_{R^{(i)}},$$

$$\frac{\partial^2 M_x^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} N_x^{(i)} \right) + \frac{1}{R^{(i)}} N_\Theta^{(i)} = \quad (4)$$

$$= \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} - [(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)]_{R^{(i)}},$$

где  $t$  – время;  $r, x$  – цилиндрические координаты;  $\rho_0$  – плотность материала оболочки;  $q_x^{(i)}, q_n$  – напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения,  $\tilde{q}_x, \tilde{q}_n$  – напряжения со стороны жидкости, находящейся во внутренней оболочке.

Подставляя (1)–(3) в (4), получим уравнения в перемещениях [16]

$$\frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{4m}{9E} \times \right.$$

$$\times \left\{ \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \times \right.$$

$$\times \left[ \mu_1 \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \right.$$

$$+ \mu_2 \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left. \right] + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \times$$

$$\times \left[ 3\mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left. \right\} =$$

$$= \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - [q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1)]_{R^{(i)}},$$

$$- \frac{Eh_0^{(i)3}}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \left[ 1 - \frac{4m}{9E} \left[ 3\mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \right. \right. \right. \quad (5)$$

$$+ 2(\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} +$$

$$+ (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + 3 \frac{h_0^{(i)2}}{20} \mu_1 \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left. \right] \left. \right\} +$$

$$+ \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \right. \right.$$

$$- \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{4m}{9E} \left[ \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \times \right.$$

$$\times \left[ \mu_1 \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \right.$$

$$+ \mu_2 \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left. \right] +$$

$$+ \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \times$$

$$\times \left[ 3\mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left. \right\} +$$

$$+ \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{1}{R^{(i)}} \left\{ \mu_0 \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \right.$$

$$- \frac{4m}{9E} \left[ \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \times \right.$$

$$\times \left[ \mu_1 \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \right.$$

$$+ \mu_2 \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left. \right] + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \times$$

$$\times \left[ 3\mu_1 \mu_0 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left. \right\} =$$

$$= \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - [(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)]_{R^{(i)}}.$$

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ОБОЛОЧЕК С ЖИДКОСТЬЮ**

Проводимые оценки в безразмерных переменных характеризуют рассматриваемые задачи. Для

волновых задач оболочку считаем бесконечной. Для продольных волн в оболочке вводятся безразмерные переменные и безразмерные параметры. Принимаем длину волны за характерную длину  $l$ , а  $u_m, w_m$  – характерные значения упругих перемещений

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad x^* = \frac{x}{l},$$

$$t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad r^* = \frac{r}{R^{(i)}}, \quad w_m = h_0, \quad u_m = \frac{h_0 l}{R^{(i)}}.$$

Здесь  $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu_0)}}$  – скорость распространения продольных упругих волн в оболочке. Определим порядки малости переменных:

$$\frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{R^{(i)2}}{l^2} = O(\varepsilon), \quad \frac{w_m}{h_0^{(i)}} = O(1),$$

$$\frac{u_m R^{(i)}}{l h_0^{(i)}} = O(1), \quad \frac{m\varepsilon}{E} = O(1),$$

$$\frac{h_0^{(i)2}}{l^2} = \frac{h_0^{(i)2}}{R^{(i)2}} \frac{R^{(i)2}}{l^2} = \varepsilon^3,$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр задачи. Введем независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - (1 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}} t^*, \quad \tau = \varepsilon t^*,$$

где  $\tau$  – медленное время. Зависимые переменные представим в виде асимптотического разложения

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (6)$$

Для первых членов асимптотического разложения (6) получим аналогично [11, 12] связь

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \quad (7)$$

и с учетом (7) систему разрешающих уравнений

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l}\right)^2 2\sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2} \varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)2} c_0^2} \times$$

$$\times \left[ (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1)) - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial \left( (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1) \right)}{\partial \xi} \right]. \quad (8)$$

Полученные уравнения есть обобщенные уравнения МКдВ для  $\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}$ . В случае отсутствия жидкости правые части уравнений равны нулю и получа-

ются два несвязанных уравнения МКдВ. Правую часть уравнений (5), (8) необходимо определить из решения уравнений гидродинамики.

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ОБОЛОЧКИ СО СТОРОНЫ ЖИДКОСТИ

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат  $(r, \Theta, x)$  в случае осесимметричного течения записываются в виде:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} =$$

$$= \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right),$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} =$$

$$= \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right),$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Здесь  $V_r, V_x$  – проекции на оси цилиндрической системы координат вектора скорости;  $p$  – давление в жидкости;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости.

На границе оболочек и жидкости в кольцевом сечении на рис. 1 при  $r = R_i - W^{(i)}$  выполняются условия прилипания жидкости

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}, \quad V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}. \quad (10)$$

В круговом сечении на рис. 1 имеем при  $r = R_3 - W^{(2)}$

$$V_x = \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t}, \quad V_r = -\frac{\partial W^{(2)}}{\partial t}. \quad (11)$$

При  $r = 0$  функции  $V_r, V_x$  ограничены.

Напряжения со стороны слоя жидкости, снеженные на невозмущенную поверхность в кольцевом сечении, определяются формулами

$$q_n = P_{rr}|_{r=R_i}, \quad q_x^{(i)} = -P_{rx}|_{r=R_i},$$

$$P_{rr} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad P_{rx} = \rho\nu \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right). \quad (12)$$

Напряжения  $\tilde{q}_x, \tilde{q}_n$  со стороны жидкости, которая находится во внутренней оболочке, определяются теми же формулами (12) при  $r = R_3$ , в которых  $\tilde{\rho}$  – плотность жидкости, а  $\tilde{\nu}$  – коэффициент кинематической вязкости.

Рассмотрим кольцевое сечение. Введем безразмерные переменные и параметры аналогично [9]

$$\begin{aligned} V_r &= w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x, \quad r = R_2 + \delta r^*, \\ t^* &= \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad p = \frac{\rho v c_0 R_2 w_m}{\delta^3} P, \\ \psi &= \frac{\delta}{R_2} = o(1), \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta} = o(1), \quad \frac{w_m}{R_2} = \lambda \psi, \\ \frac{w_m}{l} &= \lambda \psi \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\delta}{l} = \psi \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Разложим давление и компоненты скорости по степеням малого параметра  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} P &= P^0 + \lambda P^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \\ v_x &= v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

С точностью до малых параметров  $\psi, \lambda$  получаем

$$q_x^{(i)} \approx -\rho v \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}, \quad q_n \approx -\rho v \frac{w_m c_0 l}{\delta^3} P^0.$$

Используя прямое разложение по степеням малых параметров  $\frac{\delta}{R_2}$  и  $\lambda$  для первых членов разложения (14) из уравнений динамики жидкости (9) и граничных условий (10), получим задачу для уравнения теории смазки с учетом локального члена инерции. Решение уравнения теории смазки методом итерации с его обоснованием найдено в [12, 17]. В этих работах получено выражение  $q_x^{(i)} = \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (i-1)$ .

Рассмотрим круговое сечение. Введем безразмерные переменные и параметры аналогично [11]:

$$\begin{aligned} V_r &= w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{R_3} v_x, \quad r^* = \frac{r}{R_3}, \\ t^* &= \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{1}{l} x, \quad p = \frac{\tilde{\rho} \tilde{v} c_0 l w_m}{R_3^3} P + p_0, \\ \frac{R_3}{l} &= \tilde{\psi} = O(\varepsilon^2), \quad \tilde{\lambda} = \frac{w_m}{R_3} = O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (15)$$

Раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра  $\tilde{\lambda}$ , получим

$$\begin{aligned} P &= P^0 + \tilde{\lambda} P^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \tilde{\lambda} v_x^1 + \dots, \\ v_r &= v_r^0 + \tilde{\lambda} v_r^1 + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

С точностью до  $\tilde{\lambda}, \tilde{\psi}$  имеем

$$\tilde{q}_x = -\tilde{\lambda} \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}, \quad \tilde{q}_n = -\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\psi}} \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho}_0 c_0^2 P^0.$$

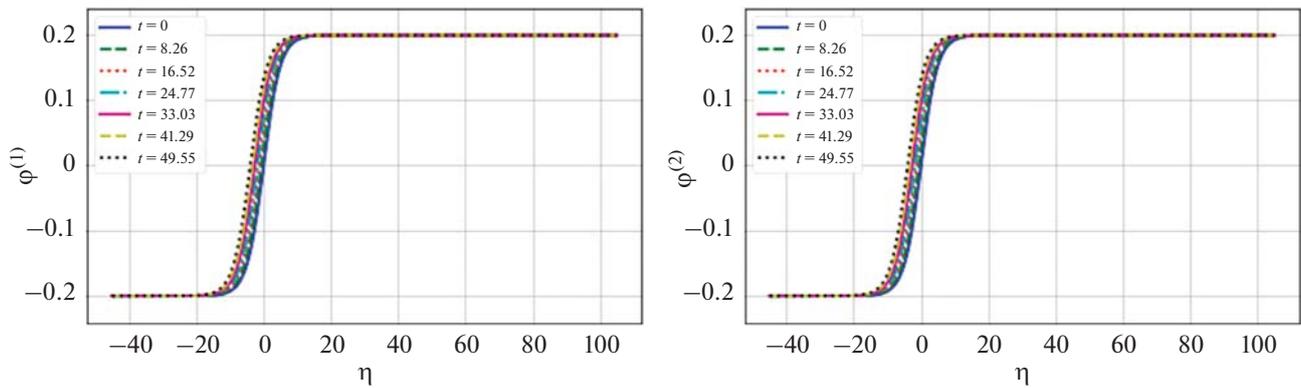
Аналогично предыдущему, используя прямое разложение по степеням  $\tilde{\psi}, \tilde{\lambda}$  для первых членов разложения (16) из уравнений динамики жидкости (9) и граничных условий (11), получим краевую задачу для уравнения теории смазки с учетом инерции движения жидкости. Решение уравнения теории смазки методом итерации с его обоснованием найдено в [11, 17]. В этих работах получено выражение  $\tilde{q}_x = \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi}$ .

### УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ СООСНЫХ ОБОЛОЧЕК

Система уравнений (5), с учетом найденных выше правых частей, приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E \varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \times \\ \times \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2 \mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{l^2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^4} = \\ = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \times \\ \times \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{10} \tilde{R} \varepsilon \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E \varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \times \\ \times \left( \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2 \mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{l^2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^4} = \\ = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \times \\ \times \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{10} \tilde{R} \varepsilon \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \right] - \\ - \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \left\{ \frac{\tilde{v}}{R c_0 \varepsilon} 2[1-2\mu_0]^2 \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \right. \\ \left. - \frac{R}{\varepsilon l 12} \sqrt{1-\mu_0^2} [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Введем обозначения  $u_{10\xi}^{(1)} = c_3 \phi^{(1)}, \quad u_{10\xi}^{(2)} = c_3 \phi^{(2)},$   
 $\eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau,$  где



**Рис. 2.** Проверка адекватности разностной схемы и системы разрешающих уравнений. Начальные условия (21) при  $t = 0$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = 0$ .

$$c_1 = \left[ c_2 \varepsilon \left( \frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right]^{\frac{1}{3}},$$

$$c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^2 \frac{v}{\delta c_0}, \quad (18)$$

$$c_3 = \left[ 6 \frac{c_2 E \varepsilon}{c_1 m} \left( \frac{l}{u_m} \right)^2 \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим также

$$\sigma_1 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \left( \frac{R}{\delta} \right)^2 \frac{\delta \sqrt{1 - \mu_0^2} c_1}{l \varepsilon 10 c_2},$$

$$\sigma_2 = \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0 \varepsilon R c_0} 2(1 - 2\mu_0)^2 \frac{1}{c_2}, \quad (19)$$

$$\sigma_3 = \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0 l \varepsilon} \frac{R \sqrt{1 - \mu_0^2}}{12} \left[ (1 - 2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2 \right] \frac{c_1}{c_2},$$

и получим из (17)–(19) систему уравнений

$$\begin{aligned} \phi_t^{(1)} - 6\phi^{(1)2} \phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \phi^{(1)} - \\ - \phi^{(2)} - \sigma_1 (\phi_\eta^{(1)} - \phi_\eta^{(2)}) = 0, \\ \phi_t^{(2)} - 6\phi^{(2)2} \phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \\ - \sigma_1 (\phi_\eta^{(2)} - \phi_\eta^{(1)}) + \sigma_2 \phi^{(2)} - \sigma_3 \phi_\eta^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Система уравнений (20) при  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  (отсутствие жидкости во внутренней оболочке) имеет следующее точное решение,

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = k \operatorname{th}(k\eta + 2k^2 t), \quad (21)$$

которое при  $t = 0$  можно использовать в качестве начального условия.

Рассмотрим случай, когда возмущение присутствует во внешней оболочке и отсутствует во внутренней в начальный момент времени. Эта за-

дача требует численного решения уравнений (20) с начальными условиями вида

$$\phi^{(1)} = k \operatorname{th}(k\eta), \quad \phi^{(2)} = 0. \quad (22)$$

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для численного моделирования рассмотрим разностную схему для уравнений (20), аналогичную схеме Кранка–Николсона для уравнения теплопроводности [13]. Графики для численного решения уравнений (20) представлены на рис. 2–4. Проведенные вычислительные эксперименты позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости во внутренней оболочке на поведение нелинейной волны деформации с учетом силы трения и инерции движения жидкости. Во всех случаях  $k = 0.2$ .

Согласно рис. 2, поведение волны совпадает с поведением точного решения (21). Это означает эквивалентность разностной схемы и разрешающих уравнений динамики. Движение профиля волны происходит в отрицательном направлении, следовательно, скорость волны дозвуковая.

Согласно рис. 3, инерция движения жидкости во внутренней оболочке ( $\sigma_3$ ) снижает скорость движения волны, а график смещается влево быстрее, чем в предыдущем случае (рис. 2). Это справедливо для оболочки из несжимаемого материала  $\mu_0 = \frac{1}{2}$ , т.е.  $\sigma_2 = 0$ , что свидетельствует об отсутствии влияния жидкостного трения во внутренней оболочке.

Согласно рис. 4, при наличии волны во внешней оболочке и отсутствии волны во внутренней оболочке в начальный момент времени, влияние силы трения ( $\sigma_2$ ) и инерции движения жидкости во внутренней оболочке ( $\sigma_3$ ) привело к следующему: во внутренней оболочке амплитуда волны увеличивалась от нуля до некоторого значения,

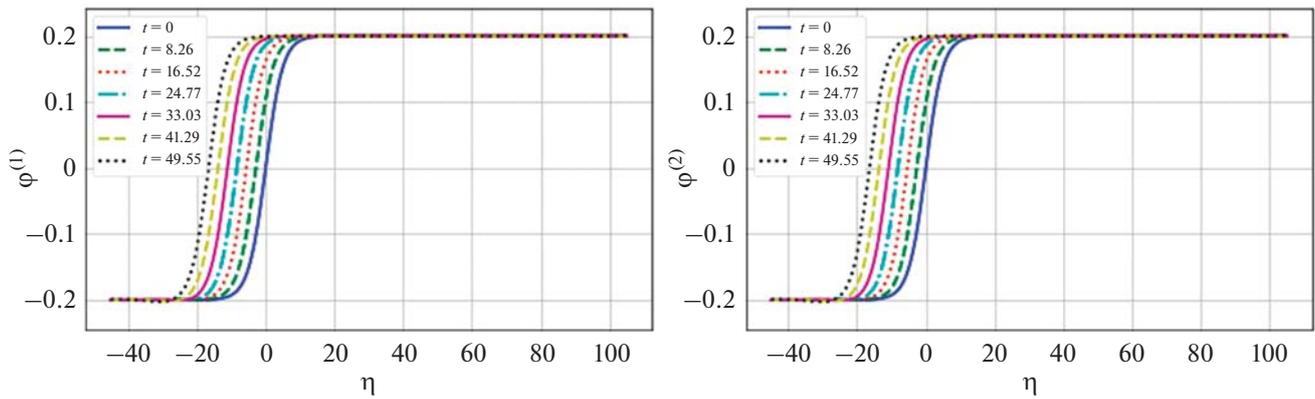


Рис. 3. Влияние инерции движения жидкости во внутренней оболочке. Начальные условия (21) при  $t = 0$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = 1$ .

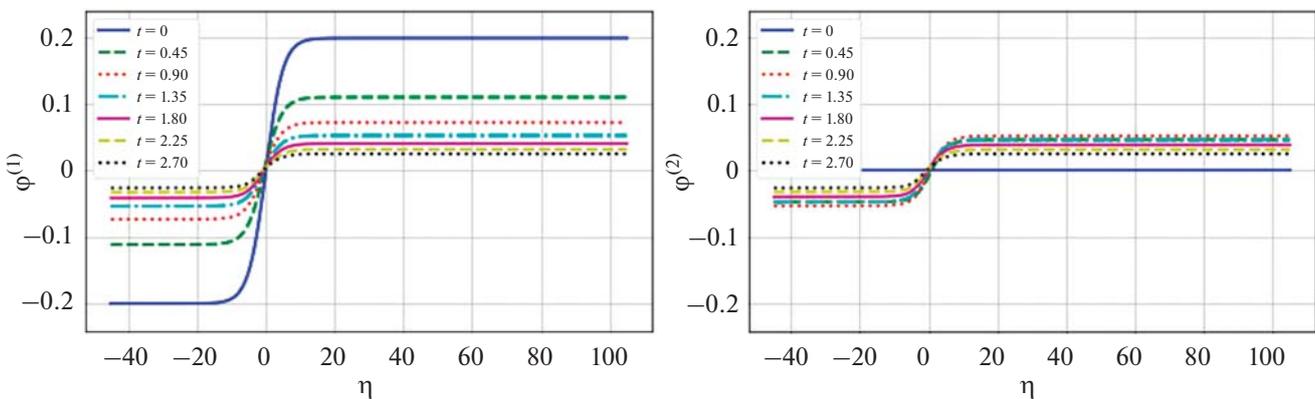


Рис. 4. Влияние силы трения и инерции движения жидкости во внутренней оболочке. Начальные условия (22) при  $\sigma_2 = 1$ ,  $\sigma_3 = 1$ .

меньшего, чем амплитуда волны во внешней оболочке, после этого амплитуда волны падает до значения, близкого к нулю. Во внешней оболочке амплитуда волны падает до значения, близкого к амплитуде волны во внутренней оболочке.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уединенная продольная волна деформации в упругой оболочке может возникать за счет действия пьезоэлемента. Распространение таких волн в соосных упругих оболочках, взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкостью, является предметом настоящего исследования, которое сводится к решению системы двух обобщенных модифицированных уравнений Кортевега—де Вриза. При этом учитывались эффекты трения и инерции движения жидкости как между оболочками, так и во внутренней оболочке.

Численный эксперимент позволил учесть влияние всех факторов рассматриваемой задачи. Наличие жидкости между оболочками приводит к

передаче энергии между ними. С течением времени при наличии волны во внешней оболочке и отсутствии волны во внутренней оболочке в начальный момент времени амплитуда волны уменьшается во внешней оболочке, а амплитуда волны во внутренней оболочке увеличивается от нуля до некоторого значения. Затем амплитуда волн в обеих оболочках уменьшается, и они асимптотически приближаются к нулю, при этом скорости волн также уменьшаются. Это происходит под действием трения и инерции движения жидкости во внутренней оболочке.

Полученные результаты являются новыми и показывают возможность использования нелинейных волн в оболочках для передачи информации на большие расстояния или для акустической диагностики трубопроводов.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-01-00014а.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ерофеев В.И., Потапов А.И.* Нелинейные продольные волны в упругих средах с моментными напряжениями // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 3. С. 477–483.
2. *Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 3. С. 359–363.
3. *Ерофеев В.И., Ключева Н.В.* Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 6. С. 725–740.
4. *Землянухин А.И., Бочкарев А.В.* Осесимметричные нелинейные модулированные волны в цилиндрической оболочке // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 4. С. 417–423.  
<https://doi.org/10.1134/S0320791918040135>
5. *Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkaev A.V., Mogilevich L.I.* The generalized schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Nonlinear Dyn. 2019. V. 98. № 1. P. 185–194.  
<https://doi.org/10.1007/s11071-019-05181-5>
6. *Мнев Е.Н., Перцев А.К.* Гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1970. 365 с
7. *Ильгамов М.А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 184 с.
8. *Попов А.Л., Чернышев Г.Н.* Механика звукоизлучения пластин и оболочек. М.: Наука, 1994. 208 с.
9. *Avramov K.V., Mikhlin Y.V., Kurilov E.* Asymptotic analysis of non-linear dynamics of simply supported cylindrical shells // Nonlinear Dyn. 2007. V. 47. P. 331–352.  
<https://doi.org/10.1007/s11071-006-9032-1>
10. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.
11. *Mogilevich L., Ivanov S.* The study of wave propagation in a shell with soft nonlinearity and with a viscous liquid inside // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15. № 3. P. 233–250.  
<https://doi.org/10.20537/nd190303>
12. *Mogilevich L., Ivanov S.* Waves in two coaxial elastic cubically nonlinear shells with structural damping and viscous fluid between them // Symmetry. 2020. V. 12. P. 335.  
<https://doi.org/10.3390/sym12030335>
13. *Gerdt V.P., Blinkov Y.A., Mozghilkin V.V.* Grobner bases and generation of difference schemes for partial differential equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2006. Т. 26. № 2. <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html>
14. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
15. *Каудерер К.* Нелинейная механика. М.: Издательство иностранной литературы, 1961. 778 с.
16. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек: учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры. 2-е изд. стер. М.: Издательство Юрайт, 2018. 439 с.
17. *Агеев Р.В., Евдокимова Е.В., Ковалева И.А., Могилевич Л.И.* Динамика осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубе кругового и кольцевого сечений // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. № 3. <http://mathmod.esrae.ru/15-50>