АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 2, с. 129–138

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23

О ВОЗМОЖНОСТИ БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКИХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕПРЕРЫВНО-СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕДАХ

Ю. В. Петухов*

Институт прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, БОКС-120, 603950 Россия

**e-mail: yuvpetukhov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.
После доработки 20.05.2021 г.
Принята к публикации 30.11.2021 г.

На примере вертикального распространения плоских акустических волн в атмосфере установлено, что безотражательное распространение акустических волн реализуется лишь только в тех непрерывно-стратифицированных средах, для которых волновые уравнения с переменными коэффициентами для возмущения давления и колебательной скорости одним и тем же преобразованием при одном и том же профиле волнового акустического сопротивления, обратно пропорционального показателю преломления, сводятся к волновому уравнению сравнения с постоянными коэффициентами. Показано, что соответствующие преобразования волновых уравнений возможны лишь для непрерывно-стратифицированных сред с постоянной величиной волнового акустического сопротивления.

Ключевые слова: распространение акустических волн, непрерывно-стратифицированные среды

DOI: 10.31857/S0320791922020071

ВВЕДЕНИЕ

Достаточно подробный анализ результатов исследований, посвященных рассматриваемым в настоящей статье вопросам, выполнен в [1–5]. По мнению авторов этих работ, ими предложен достаточно новый подход к описанию процессов безотражательного распространения волн в непрерывно-стратифицированных средах, заключающийся в том, что для какой-либо физической величины исходное волновое уравнение с переменными коэффициентами сводится определенными преобразованиями к соответствующему ему волновому уравнению с постоянными коэффициентами. При этом стратификация скорости распространения волн должна удовлетворять определенному обыкновенному дифференциальному уравнению, которое характерно именно для конкретной исследуемой физической величины, удовлетворяющей исходному волновому уравнению. После таких преобразований в [1–5] на основании принципа причинности, применительно уже к преобразованному волновому уравнению с постоянными коэффициентами, формулируется вывод об однонаправленном – безотражательном характере распространения волн, при котором в среде с соответствующей стратификацией независимо друг от друга (т.е. без взаимного влияния) распространяются волны в противоположных направлениях от источника.

Если предложенный в [1–5] подход и полученные с его использованием результаты справедливы, то следует ожидать, что, например, при строго вертикальном распространении плоской импульсной акустической волны в атмосфере с безотражательным профилем скорости звука (см. [2–5]), определенным с использованием соответствующего преобразования волнового уравнения для возмущения давления, безотражательным будет также распространение и волны колебательной скорости, а также отвечающей ей волны дивергенции колебательной скорости.

Однако из приведенных в [2–5] результатов следует, что при "безотражательном" распространении в атмосфере импульсной волны колебательной скорости обыкновенное дифференциальное уравнение для соответствующего профиля скорости звука существенно отличается от аналогичного уравнения для профиля скорости звука, отвечающего "безотражательному" распространению волны дивергенции колебательной скорости. Вполне естественно, что из этих двух различающихся дифференциальных уравнений (см. [2–5]) получаются и существенно отличающиеся друг от друга решения для зависимостей скорости звука от вертикальной координаты (см. [2–5]). В то же время, из достаточно общих физических соображений очевидно, что они должны быть одинаковыми для одной и той же безотражательно распространяющейся акустической волны, поскольку ей должны соответствовать одновременно безотражательно распространяющиеся волны колебательной скорости и градиента колебательной скорости, а также возмущения давления и плотности.

Кроме того, здесь представляется также важным отметить, что ранее в [6] с целью получения обобщенных ВКБ-решений использовался более общий, чем в [1–5], метод преобразования дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами к характерным дифференциальным уравнениям сравнения [7], в том числе и с постоянными коэффициентами (см. [6]); но при этом в [6] вполне обоснованно не делались выводы о каком-либо безотражательном распространении волн.

Из сказанного выше следует, что существует очевидная необходимость в проведении дальнейших исследований, касающихся определения корректных условий для реализации безотражательных процессов распространения акустических волн в непрерывно-стратифицированных средах.

Настоящая работа посвящена именно таким исследованиям, при этом она имеет в определенном смысле и заметно выраженный методический характер с достаточно подробным изложением соответствующего материала, поскольку затронутые в ней вопросы обсуждались на протяжении весьма значительного периода времени в работах по теории волновых процессов в различных средах (см. § 6.3 в [8] и цитированную там литературу).

СРЕДЫ С ПОСТОЯННОЙ ВЕЛИЧИНОЙ ВОЛНОВОГО АКУСТИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

С целями упрощения аналитических расчетов и анализа получаемых результатов рассмотрим, как и в [2–5], строго вертикальное (по направлению оси z) распространение плоских акустических волн в непрерывно-стратифицированной среде, но, в отличие от [2–5], без учета влияния силы тяжести. В этом случае из двух уравнений (см. § 1.1 в [8])

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial p'}{\partial t}, \tag{1}$$

в которых v – колебательная скорость, p' – возмущение давления в акустической волне, $\rho(z)$ и $c(z)$ – равновесные плотность и скорость звука в среде, t – время, z – вертикальная координата, находим замкнутые уравнения для p' и v:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \rho c^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}\right) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho c^2 \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0. \tag{3}$$

Если ввести новую пространственную координату (см. § 1.2 в [8])

$$\xi = \frac{1}{\rho_0}\int_{z_0}^{z} \rho(z) dz, \tag{4}$$

то уравнения (2), (3) приводятся к следующему виду:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial \xi^2} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(a^2 \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) = 0. \tag{6}$$

В выражениях (4)–(6) $\rho_0 = \rho(z_0)$ и $c_0 = c(z_0)$ – значения равновесных плотности и скорости звука на произвольно выбранной границе $z = z_0$;

$$a = \rho c / \rho_0 c_0 \tag{7}$$

– величина, характеризующая относительное изменение волнового акустического сопротивления (импеданса) среды.

При неизменной величине волнового акустического сопротивления среды (7), т.е. при $a(\xi) \equiv 1$ для $-\infty < \xi < +\infty$, уравнения (5), (6) сводятся к одному и тому же волновому уравнению с постоянными коэффициентами. Последнее означает, что если при $z = z_0$ ($\xi = 0$) задан импульс возмущения давления $p' = p_0\Psi(t, \xi = 0)$ или колебательной скорости $v = v_0\Phi(t, \xi = 0)$, то соответствующие решения уравнений (5), (6) будут описывать распространение в противоположных направлениях без взаимного влияния друг на друга как импульсных волн давления, так и волн колебательной скорости:

$$\begin{aligned} p'(t, \xi) &= p_0^{(+)}\Psi\left(t - \frac{\xi}{c_0}\right) + p_0^{(-)}\Psi\left(t + \xi\right), \\ v(t, \xi) &= v_0^{(+)}\Phi\left(t - \frac{\xi}{c_0}\right) + v_0^{(-)}\Phi\left(t + \frac{\xi}{c_0}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку при $a = \mathrm{const}$ имеет место соотношение $\frac{p_0}{\rho_0 c_0}\Psi(t,\xi=0) = v_0\Phi(t,\xi=0)$, то выполняются следующие очевидные равенства:

$$\begin{aligned} \frac{p_0^{(+)}}{\rho_0 c_0}\Psi\left(t-\frac{\xi}{c_0}\right) &= v_0^{(+)}\Phi\left(t-\frac{\xi}{c_0}\right), \\ \frac{p_0^{(-)}}{\rho_0 c_0}\Psi\left(t+\frac{\xi}{c_0}\right) &= v_0^{(-)}\Phi\left(t+\frac{\xi}{c_0}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

В выражениях (8), (9) $p_0, p_0^{(+)}, p_0^{(-)}$ и $v_0, v_0^{(+)}, v_0^{(-)}$ – постоянные амплитудные множители с соответственной размерностью; $p_0 = p_0^{(+)} + p_0^{(-)}$, $v_0 = v_0^{(+)} + v_0^{(-)}$. Следовательно, именно при постоянном волновом акустическом сопротивлении непрерывно-стратифицированной среды в ней реализуется безотражательное распространение акустических волн, при котором пространственно-временные профили волн давления и колебательной скорости (8) остаются неизменными, а также описываются одинаковыми функциями, отличающимися друг от друга лишь (что принципиально важно) постоянными амплитудными множителями (см. (9)).

Покажем теперь, что наличие любой зависимости $a(\xi) \neq \mathrm{const}$ приводит к появлению отражений при распространении акустической волны и, тем самым, к изменениям пространственно-временных профилей волн давления и колебательной скорости вследствие естественного проявления топологической дисперсии.

С этой целью воспользуемся преобразованиями Фурье

$$\begin{aligned} p'(t,\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{p}(\omega,\xi)e^{i\omega t}d\omega, \\ v(t,\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v}(\omega,\xi)e^{i\omega t}d\omega, \end{aligned} \tag{10}$$

с помощью которых, а также выражения (4), из (1) получим для безразмерных величин

$$\Pi = i\,\overline{p}(\omega,\xi)\big/\rho_0 c_0^2,\ U = \overline{v}(\omega,\xi)\big/c_0 \tag{11}$$

следующие уравнения:

$$U = \frac{1}{k_0}\frac{d\Pi}{d\xi}, \quad \frac{dU}{d\xi} = -k_0 n^2 \Pi. \tag{12}$$

Теперь, как и в [8] (см. § 8.3), решения системы уравнений (12) отыскиваем в удобном для сравнительного анализа с геометроакустическим приближением виде:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{\sqrt{n}}\times \\ &\times\left(\alpha_1 \exp\left\{-ik_0\int_0^\xi n d\zeta\right\} + \alpha_2 \exp\left\{ik_0\int_0^\xi n d\zeta\right\}\right), \\ U &= -i\sqrt{n}\times \\ &\times\left(\alpha_1 \exp\left\{-ik_0\int_0^\xi n d\zeta\right\} - \alpha_2 \exp\left\{ik_0\int_0^\xi n d\zeta\right\}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

где $n = 1\big/a(\xi)$ – эффективный показатель преломления акустических волн, α_1 и α_2 – функции, подлежащие определению. Подставляя представление (13) в уравнения (12), получим для определения коэффициентов α_1 и α_2 следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{d\xi} &= \frac{dn/d\xi}{2n}\alpha_2 \exp\left\{2ik_0\int_0^\xi n d\zeta\right\}, \\ \frac{d\alpha_2}{d\xi} &= \frac{dn/d\xi}{2n}\alpha_1 \exp\left\{-2ik_0\int_0^\xi n d\zeta\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Как видно из (13), (14), именно при постоянной величине волнового акустического сопротивления среды $(dn/d\xi = 0)$ акустические волны распространяются в противоположных направлениях без взаимного влияния друг на друга, что является следствием отсутствия непрерывного их переотражения на соответствующих неоднородностях $\rho(z)$ и $c(z)$. Поскольку же только в этом случае коэффициенты α_1 и α_2 принимают постоянные значения (см. (14)), то из (10), (11), (13) следует, что лишь при безотражательном распространении акустических возмущений остаются неизменными пространственно-временные профили волн давления и колебательной скорости. Очевидно, что если $a(\xi) \neq \mathrm{const}$, то в случае достаточной малости в (14) величины $(dn/d\xi)/n \ll 1$ в соответствующем нулевом – геометроакустическом приближении при $\alpha_1 \approx \mathrm{const}$ и $\alpha_2 \approx \mathrm{const}$ выражения (10), (11), (13) также описывают распространение импульсных волн давления и колебательной скорости без изменений их пространственно-временных профилей, но с изменяющимися амплитудами и временем распространения. Таким образом, безотражательные профили скорости звука определяются следующим из (7) при $a = 1$ очевидным равенством $c(z) = c_0\rho_0/\rho(z)$, причем, как отмечалось в [8] (см. § 6.3), в этом случае отсутствие отражения для всех частот $0 < \omega < \infty$ вызвано тем, что оно не обусловлено интерференцией волн.

Из всего сказанного выше следует, что при определении безотражательных профилей волнового акустического сопротивления в непрерывно-стратифицированных средах необходим совместный, согласованный анализ волновых уравнений с переменными коэффициентами для возмущения давления и колебательной скорости в акустической волне. При этом соответствующие уравнения должны одним и тем же преобразованием и при одном и том же профиле волнового акустического сопротивления (являющемся безотражательным) сводиться к волновому уравнению сравнения с постоянными коэффициентами, поскольку безотражательно распространяющейся акустической волне должны соответствовать (“одновременно”) безотражательно распространяющиеся волны давления и колебательной скорости. Естественно, что определяемый с использованием условий непрерывности величин $p'(\xi,t)$ и $v(\xi,t)$ на произвольном горизонте z коэффициент отражения акустических волн V будет принимать нулевое значение лишь только при постоянной величине волнового акустического сопротивления среды.

В заключение этого раздела представляется важным отметить, что при распространении плоских волн из однородной среды в среду с определенной анизотропией ее акустических характеристик возможно отсутствие отражения во всем допустимом диапазоне углов падения (см. [10] и § 6.3 в [8]).

АНАЛОГ МЕТОДА ЭТАЛОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫХ ПРОФИЛЕЙ ВОЛНОВОГО АКУСТИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Как отмечалось во Введении, из анализа полученных в [1–5] результатов следует, что даже при изменяющейся величине волнового акустического сопротивления среды $a(z) \neq \text{const}$ возможно, тем не менее, существование определенных зависимостей $a(\xi) = a_p(\xi)$ и $a(\xi) = a_v(\xi)$, при которых реализуется безотражательное распространение акустических волн для всех частот излучения. Поскольку такой вывод явно противоречит приведенным в предыдущем разделе результатам, то ниже остановимся на рассмотрении вопроса о существовании соответствующих зависимостей $a_p(\xi)$ и $a_v(\xi)$, которым должны отвечать корректные (имеющие физический смысл конечные значения) решения для $p'(t,\xi)$ и $v(t,\xi)$, описывающие безотражательное распространение волн давления и колебательной скорости одновременно для каждой из двух зависимостей $a_p(\xi)$ и $a_v(\xi)$.

С этой целью, по аналогии с [6–8], для решения поставленной задачи воспользуемся известным методом сопоставления уравнениям (5), (6) характерных для них модельных уравнений сравнения. Поскольку в данном случае представляют интерес решения уравнений (5), (6), описывающие при $a(\xi) \neq \text{const}$ только безотражательное распространение акустических волн во всем диапазоне частот излучения, то очевидно, что модельным для (5) и (6) будет волновое уравнение с постоянными коэффициентами [8]. Вполне естественно, что соответствующие преобразования уравнений (5), (6) к такому модельному уравнению возможно осуществить при выполнении некоторых условий, которые могут удовлетворяться лишь для выделенных специфических зависимостей $a(\xi) = a_p(\xi)$ и $a(\xi) = a_v(\xi)$.

Как и в [1–5], при определении этих зависимостей $a_p(\xi)$ и $a_v(\xi)$ воспользуемся представлением решений уравнений (5) и (6) в следующем виде

$$p'(t,\xi) = p_0 A(\xi)\Psi\left(t,\tau(\xi)\right), \quad (15)$$

$$v(t,\xi) = v_0 B(\xi)\Phi\left(t,\tau(\xi)\right), \quad (16)$$

в которых переменные величины $\tau(\xi)$, $A(\xi)$ и $B(\xi)$ должны удовлетворять некоторым условиям, для того чтобы функции $\Psi(t,\tau(\xi))$ и $\Phi(t,\tau(\xi))$ являлись решениями соответствующих волновых уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} = 0. \quad (18)$$

С использованием следующих из (5), (15), (17) соотношений

$$\tau = \int_0^{\xi}\frac{d\zeta}{a(\zeta)}, \quad A(\xi) = \sqrt{a(\xi)} \quad (19)$$

находим искомую зависимость

$$a(\xi) = a_p(\xi) = \left(1 + \xi/H\right)^2, \quad (20)$$

в которой $|H|$ – характерный масштаб неоднородности среды.

Таким образом, с учетом (1), (4) и принципа причинности, а также полученных выше зависимостей (19), (20) решения, описывающие распространение акустических волн давления и колебательной скорости, можно представить в достаточно простом аналитическом виде:

$$\begin{gathered} p'(t,\xi) = p_+\left(\eta_p^{(+)}\right) + p_-\left(\eta_p^{(-)}\right), \\ p_+\left(\eta_p^{(+)}\right) = p_0^{(+)}\sqrt{a_p}\Psi\left(\eta_p^{(+)}\right), \\ p_-\left(\eta_p^{(-)}\right) = p_0^{(-)}\sqrt{a_p}\Psi\left(\eta_p^{(-)}\right); \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} v(t,\xi) = \frac{1}{\rho_0 c_0 a_p}\times \\ \times\left\{p_+\left(\eta_p^{(+)}\right) - p_-\left(\eta_p^{(-)}\right) - \frac{c_0}{2}\frac{da_p}{d\xi}\int p'(t,\xi)dt\right\}. \end{gathered} \tag{22}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \eta_p^{(+)} = t - \tau_p/c_0, \quad \eta_p^{(-)} = t + \tau_p/c_0, \\ \tau_p = \xi/(1+\xi/H). \end{gathered} \tag{23}$$

Аналогичным образом, а именно с использованием следующих из (6), (16), (18) соотношений

$$\tau = \int_0^\xi \frac{d\zeta}{a(\zeta)}, \quad B(\xi) = 1/\sqrt{a(\xi)}, \tag{24}$$

находим существенно отличающуюся от $a(\xi) = a_p(\xi)$ (20) зависимость

$$a(\xi) = a_v(\xi) = (1+\xi/H)^{2/3}. \tag{25}$$

Поэтому с учетом (1), (4) и принципа причинности, а также полученных зависимостей (24), (25) решения, описывающие распространение акустических волн колебательной скорости и давления, можно представить в заметно отличающемся от решений (21), (22) аналитическом виде:

$$\begin{gathered} v(t,\xi) = v_+\left(\eta_v^{(+)}\right) + v_-\left(\eta_v^{(-)}\right), \\ v_+\left(\eta_v^{(+)}\right) = \frac{v_0^{(+)}}{\sqrt{a_v}}\Phi\left(\eta_v^{(+)}\right), \\ v_-\left(\eta_v^{(-)}\right) = \frac{v_0^{(-)}}{\sqrt{a_v}}\Phi\left(\eta_v^{(-)}\right); \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} p'(t,\xi) = \rho_0 c_0 a_v \times \\ \times\left\{v_+\left(\eta_p^{(+)}\right) - v_-\left(\eta_v^{(-)}\right) + \frac{c_0}{2}\frac{da_v}{d\xi}\int v(t,\xi)dt\right\}. \end{gathered} \tag{27}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \eta_v^{(+)} = t - \tau_v/c_0, \quad \eta_v^{(-)} = t + \tau_v/c_0, \\ \tau_v = 3H\left\{(1+\xi/H)^{1/3} - 1\right\}. \end{gathered} \tag{28}$$

Таким образом, из анализа уравнения (5) (см. (15), (17)), описывающего распространение акустических волн давления, следует (см. (19), (20)) возможность их “безотражательного” распространения в среде с изменяющимся волновым акустическим сопротивлением лишь при определенной его зависимости $a(\xi) = a_p(\xi)$ (20). В то же время из анализа уравнения (6) (см. (16), (18)), описывающего распространение акустических волн колебательной скорости, следует возможность их “безотражательного” распространения в среде с изменяющимся волновым акустическим сопротивлением при его зависимости $a(\xi) = a_v(\xi)$ (25), существенно отличающейся от $a(\xi) = a_p(\xi)$ (20). Однако, как показано в предыдущем разделе, если акустическая волна распространяется без отражений в непрерывно-стратифицированной среде, то режим безотражательного распространения должен быть одновременно присущ волне возмущения давления и соответствующей ей волне колебательной скорости для одной и той же зависимости волнового акустического сопротивления среды $a(\xi)$, при которой уравнения (5) и (6) соответствующими преобразованиями (15) и (16) должны сводиться к модельным уравнениям сравнения (17) и (18). Поэтому в рассматриваемой здесь ситуации необходимо потребовать выполнения очевидного равенства $a_p(\xi) = a_v(\xi)$, которое имеет место лишь при $1/H = 0$, т.е. в непрерывно-стратифицированной среде с постоянным волновым акустическим сопротивлением, в которой только и возможна реализация безотражательного распространения акустических волн во всем диапазоне частот излучения.

Проанализируем теперь, какие же процессы на самом деле описывают полученные с использованием предложенного в [1–5] подхода решения (21), (22) и (26), (27), являющегося, как будет показано в следующем разделе, лишь частным случаем сравнительно давно известного метода нахождения обобщенных ВКБ-решений [6, 11]. При этом здесь следует обратить внимание на следующие основные закономерности.

Во-первых, в среде с зависимостью волнового акустического сопротивления $a_p(\xi)$ (20) форма профиля волн давления остается самоподобной (по аналогии с автомодельным решением), поскольку изменяется лишь их амплитуда и время распространения (см. (21)). Кроме того, если справедливо асимптотическое поведение $\xi \to \infty$ при $z \to \infty$, то, как следует из выражения для $\tau(\xi)$ (23), распространяющаяся вверх импульсная волна давления за конечное время $t = t_0 = H/c_0$ $(H > 0)$ достигнет бесконечно удаленного горизонта поворота $\xi = \infty$, после отражения от которого вернется за то же время $t = t_0$ на исходный горизонт $\xi = 0$. Форма профиля же волны колебательной скорости не является самоподобной, причем соответствующие различия возрастают при $H > 0$ (см. (22)). В уходящей же вниз волне при $H > 0$

отличия формы профиля колебательной скорости от самоподобного будут уменьшаться, однако такая волна не отразится от бесконечно удаленного горизонта поворота $\xi = -\infty$, поскольку не сможет достигнуть даже горизонта $\xi = -H$ вследствие того, что $\tau_p \to \infty$ при $\xi \to -H$ (см. (23)). Представляет интерес отметить, что подобные ситуации, характеризующиеся возрастанием до бесконечности времени распространения волны в ограниченной пространственной области среды, реализуются в определенных технических устройствах, волновые процессы в которых впервые описаны в [12–15] с использованием приближения ВКБ и точных аналитических решений. Очевидно, что при $H < 0$ (20) у распространяющихся вверх и вниз акустических волн будут проявляться закономерности, описанные выше для распространяющихся соответственно вниз и вверх акустических волн при $H > 0$ в (20).

Во-вторых, в среде с зависимостью волнового акустического сопротивления $a_v(\xi)$ (25) самоподобной остается форма профиля волн колебательной скорости (см. (26)); отличия же формы профиля распространяющейся вверх волны давления от самоподобного уменьшаются при $H > 0$ (см. (27)), причем такая волна не возвращается на исходный горизонт $\xi = 0$, поскольку $\tau_v \to \infty$ при $\xi \to \infty$ (см. (28)). Однако распространяющаяся вниз акустическая волна, в которой отличия формы профиля возмущения давления возрастают при $H > 0$ (см. (27)), будет испытывать отражение при достижении за время $t = 3H/c_0$ горизонта $\xi = -H$, где терпит разрыв производная $da_v/d\xi$. Естественно, что при $H < 0$ в $a_v(\xi)$ (25) у распространяющихся вверх и вниз акустических волн будут проявляться закономерности, описанные выше для распространяющихся соответственно вниз и вверх акустических волн при $H > 0$ в $a_v(\xi)$ (25).

Из сказанного относительно поведения решений (21), (22) и (26), (27) следует, что они не описывают безотражательное распространение акустических волн при $a(\xi) \neq \text{const}$; тем не менее, эти решения представляют очевидный интерес, поскольку в явном аналитическом виде в классе элементарных функций описывают бегущие волны, у которых остается самоподобной форма профиля волн либо возмущения давления, либо колебательной скорости, но лишь при определенных зависимостях волнового акустического сопротивления среды $a_p(\xi)$ (20) или $a_v(\xi)$ (25) соответственно.

В заключение этого раздела представляется важным отметить следующее. В работе [16], где исследовалась трансформация длинных поверхностных волн в зоне переменной глубины, “безотражательный” профиль которой $h_\eta(x)$ определялся с использованием предложенного в [1–5] подхода из анализа волнового уравнения только для возвышенности $\eta(x,t)$ водной поверхности, было установлено существование, тем не менее, распределенного характера отражения импульсной волны от донного рельефа с соответствующей “безотражательной” зависимостью глубины водного слоя $h_\eta(x) = h_0\left(1 + x/H\right)^{4/3}$ от горизонтального расстояния $x \geq 0$ ($H > 0$). С учетом полученных выше результатов (см. (20)–(23) и (25)–(28)) это, противоречащее выводам работ [1–5], утверждение в [16] является вполне естественным. В самом деле, с использованием аналогичного [1–5] подхода при анализе волнового уравнения для горизонтальных скоростей частиц жидкости $w(x,t)$ в поверхностной волне можно получить существенно отличающуюся от $h_\eta(x)$ “безотражательную” зависимость глубины водного слоя $h_w(x) = h_0\left(1 + x/H\right)^4$. Поскольку же коэффициент отражения V поверхностных волн определяется (по аналогии с акустическими волнами) с использованием условий непрерывности величин $\eta(x,t)$ и $w(x,t)$ (в данном случае при $x = 0$, см. [16]), то совершенно очевидно, что его значение будет отличаться от нулевого при $h(x) = h_\eta(x)$ или $h(x) = h_w(x)$ с естественным асимптотическим поведением $V \to 0$ при $H \to \infty$.

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ВКБ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫХ ПРОФИЛЕЙ ВОЛНОВОГО АКУСТИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Как показано в [8] (см. § 3.1 и § 6.3) при корректной постановке задачи о нахождении безотражательных профилей показателя преломления акустических волн, в данном случае $n(\xi) = 1/a(\xi)$, при решении уравнений (5), (6) требуется задание корректных граничных условий при $\xi \to \pm\infty$ для величин $p'(t,\xi)$ и $v(t,\xi)$, которые должны принимать конечные значения во всей области определения $-\infty < \xi < +\infty$. Поэтому, по аналогии с [8] (см. § 6.3), необходимо сделать предположение о том, чтобы каждая искомая зависимость $a(\xi)$ описывалась гладкой функцией с непрерывной первой производной и характерным асимптотическим поведением $a(\xi \to +\infty) = a_+ = \text{const}$, $a(\xi \to -\infty) = a_- = \text{const}$, $da/d\xi$ $(\xi \to \pm\infty) \to 0$, позволяющим заведомо утверждать о безотражательном распространении акустических волн при $\xi \to \pm\infty$, когда такие волны распространяются независимо друг от друга в противоположных направлениях.

С учетом введенных ограничений на возможные поведения зависимостей $a(\xi)$ воспользуемся при решении уравнений (5), (6) преобразованиями Фурье (10), а также заменой (см. [17])

$$\overline{v}(\omega,\xi) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\xi \alpha(\zeta)d\zeta\right\}u(\omega,\xi), \quad \alpha = \frac{2}{a}\frac{da}{d\xi}. \tag{29}$$

Тогда из (5), (6) с использованием (10), (29) получим для величин $\overline{p}(\omega,\xi)$ и $u(\omega,\xi)$ следующие уравнения:

$$\frac{d^2\overline{p}}{d\xi^2} + k_1^2(\xi)\,\overline{p} = 0, \tag{30}$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + k_2^2(\xi)\,u = 0, \tag{31}$$

в которых

$$k_1^2(\xi) = k_0^2 n^2(\xi), \quad k_0 = \omega/c_0\,; \tag{32}$$

$$k_2^2(\xi) = k_1^2(\xi) - b(\xi), \quad b(\xi) = \frac{1}{a}\frac{d^2a}{d\xi^2}. \tag{33}$$

В предположении отсутствия горизонтов поворота при $-\infty < \xi < +\infty$ характерными для (30), (31) будут модельные уравнения сравнения следующего вида (см. [6–8]):

$$\frac{d^2\varphi_j}{d\chi_j^2} + k_0^2\varphi_j = 0, \tag{34}$$

имеющие очевидные точные решения

$$\varphi_j(\omega,\xi) = \varphi_j^{(+)}(\omega)\, e^{-ik_0\chi_j} + \varphi_j^{(-)}(\omega)\, e^{ik_0\chi_j}, \tag{35}$$

каждое из которых при $j = 1, 2$ представляет сумму двух линейно независимых частных решений. Здесь $\varphi_j(\omega,\xi)$ и $\chi_j(\omega,\xi)$ – некоторые новые переменные величины, а $\varphi_j^{(+)}(\omega)$ и $\varphi_j^{(-)}(\omega)$ – пока произвольные функции от ω, которые будут определены ниже. Если теперь определить величины $\varphi_j(\omega,\xi)$ и $\chi_j(\omega,\xi)$ соответствующими соотношениями (см. [6]):

$$\overline{p}(\omega,\xi) = \{q_1(\omega,\xi)\}^{-1/2}\,\varphi_1(\omega,\xi), \tag{36}$$

$$u(\omega,\xi) = \{q_2(\omega,\xi)\}^{-1/2}\,\varphi_2(\omega,\xi), \tag{37}$$

$$\chi_j(\omega,\xi) = \int_0^\xi q_j(\omega,\zeta)d\zeta, \tag{38}$$

то с использованием (36)–(38) уравнения (30), (31) преобразуются к следующему виду (см. [6]):

$$\frac{d^2\varphi_j}{d\chi_j^2} + k_0^2\left[1 + \varepsilon_j(\chi_j)\right]\varphi_j = 0, \tag{39}$$

где

$$\varepsilon_j = \frac{1}{q_j^2}\left\{\frac{k_j^2}{k_0^2} - q_j^2 + \frac{1}{k_0^2}q_j^{1/2}\frac{d^2}{d\xi^2}\left[q_j^{-1/2}\right]\right\}. \tag{40}$$

Как и в [6], положив без ограничения общности равной нулю величину $\varepsilon_j = 0$ (см. [7, 17]), приведем уравнения (39) к характерным для них модельным уравнениям сравнения (34) с соответствующими (35) точными решениями для $\overline{p}(\omega,\xi)$ и $\overline{v}(\omega,\xi)$:

$$\begin{gathered}\overline{p}(\omega,\xi) = \overline{p}_+(\omega,\xi) + \overline{p}_-(\omega,\xi),\\ \overline{p}_\pm(\omega,\xi) = \frac{p^{(\pm)}(\omega)}{\sqrt{q_1(\omega,\xi)}}\exp\left\{\mp ik_0\int_0^\xi q_1(\omega,\zeta)d\zeta\right\};\end{gathered} \tag{41}$$

$$\begin{gathered}\overline{v}(\omega,\xi) = \overline{v}_+(\omega,\xi) + \overline{v}_-(\omega,\xi),\\ \overline{v}_\pm(\omega,\xi) = \frac{v^{(\pm)}(\omega)}{a(\xi)\sqrt{q_2(\omega,\xi)}}\exp\left\{\mp ik_0\int_0^\xi q_2(\omega,\zeta)d\zeta\right\}.\end{gathered} \tag{42}$$

В (41) и (42) функции $q_j(\omega,\xi)$ являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

$$q_1^2 - \frac{q_1^{1/2}}{k_0^2}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(q_1^{-1/2}\right) = n^2, \tag{43}$$

$$q_2^2 - \frac{1}{k_0^2}\left[q_2^{1/2}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(q_2^{-1/2}\right) - b(\xi)\right] = n^2, \tag{44}$$

а зависимости $p^{(\pm)}(\omega)$ (или $v^{(\pm)}(\omega)$) определяют исходный спектральный состав волн давления (или колебательной скорости), распространяющихся вверх и вниз соответственно.

Таким образом, как следует из решений (41), (42), амплитуда каждой спектральной составляющей волн давления и колебательной скорости зависит не только от пространственной переменной ξ, но и от частоты излучения ω, а зависимость фазы от ω отличается от линейной, т.к. $q_j = q_j(\omega,\xi)$ (см. (43), (44)). Тем не менее, в рассматриваемом случае непрерывно-стратифицированной среды все же возможно, в отличие от сделанного в [18] утверждения, существование бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Естественно, что даже при одинаковом спектральном составе волн давления и колебательной скорости, т.е. при выполнении соотношений $p^{(\pm)}(\omega)/v^{(\pm)}(\omega) = \text{const}$, в общем случае из-за различий между функциями $q_1(\omega,\xi)$ (43) и $q_2(\omega,\xi)$ (44) трансформация пространственно-временного профиля импульсных волн давления (10), (41) и колебательной скорости (10), (42) при их распространении будет происходить различным образом. При выполнении же следующего из (43), (44) равенства $d^2a/d\xi^2 = 0$, из которого следуют очевидные зависимости

$$\begin{aligned} a(\xi) &= a_h(\xi) = \left(1+\xi/H\right), \\ n(\xi) &= n_h(\xi) = \left(1+\xi/H\right)^{-1}, \end{aligned} \qquad (45)$$

трансформация формы профиля импульсных волн давления (10), (41) и колебательной скорости (10), (42) будет происходить одинаковым образом, поскольку при $q_1(\omega,\xi) = q_2(\omega,\xi)$ выполняются следующие соотношения:

$$p'_{\pm}(t,\xi)/v_{\pm}(t,\xi) = \text{const} \times a_h(\xi),$$

в которых:

$$\begin{aligned} p'_{\pm}(t,\xi) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{p}_{\pm}(\omega,\xi)e^{i\omega t}d\omega, \\ v_{\pm}(t,\xi) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{v}_{\pm}(\omega,\xi)e^{i\omega t}d\omega. \end{aligned} \qquad (46)$$

Однако зависимости $a_h(\xi)$ и $n_h(\xi)$ (45) не отвечают безотражательным профилям $a(\xi)$ и $n(\xi)$, поскольку не удовлетворяют условиям возможного поведения $a(\xi)$ и $n(\xi)$ при $-\infty < \xi < +\infty$, сформулированным в начале этого раздела.

Кроме того, здесь представляет интерес отметить два частных случая, при которых возможно получение простых аналитических решений в классе элементарных функций для импульсных волн давления и колебательной скорости.

Во-первых, если предположить совместное выполнение следующих из (43) равенств (см. [6])

$$\begin{cases} q_1(\xi) = n(\xi), \\ \dfrac{d^2}{d\xi^2}\left(q_1^{-1/2}\right) = 0, \end{cases} \qquad (47)$$

которым удовлетворяет уже известная зависимость $a(\xi) = a_p(\xi)$ (см. (20)), то из (10), (41), (46) автоматически получаются совпадающие с (21) аналитические решения для бегущих во взаимно противоположных направлениях волн давления с самоподобной формой профиля. В этом случае стандартное приближение ВКБ для решения уравнения (30) является точным аналитическим решением (см. [6], а также § 8 в [8]), поскольку все последующие члены ряда (начиная с третьего) в соответствующем асимптотическом разложении тождественно равны нулю. Однако следующая из (47) зависимость $n(\xi) = n_p(\xi) = 1/a_p(\xi)$, так же как и зависимость $n(\xi) = n_h(\xi)$ (см. (45)), не удовлетворяет условиям возможного поведения безотражательных профилей $n(\xi)$.

Во-вторых, в предположении о совместном выполнении следующих из (44) равенств

$$\begin{cases} q_2(\xi) = n(\xi), \\ q_2^{1/2}\dfrac{d^2}{d\xi^2}\left(q_2^{-1/2}\right) - b(\xi) = 0, \end{cases} \qquad (48)$$

которым удовлетворяет зависимость $a(\xi) = a_v(\xi)$ (25), из (10), (42), (46) автоматически получаются совпадающие с (26) аналитические решения для бегущих во взаимно противоположных направлениях волн колебательной скорости с самоподобной формой профиля. В этом случае стандартное приближение ВКБ для решения уравнения (31) также является точным аналитическим решением, поскольку все последующие члены ряда (начиная с третьего) в соответствующем асимптотическом разложении тождественно равны нулю. Естественно, что зависимость $n(\xi) = n_v(\xi) = 1/a_v(\xi)$, следующая из (48), также не удовлетворяет сформулированным выше условиям возможного поведения безотражательных профилей $n(\xi)$.

Очевидно, что лишь при совместном выполнении следующих из (43), (44) равенств

$$\begin{cases} q_1(\xi) = q_2(\xi) = n(\xi), \\ \dfrac{d^2}{d\xi^2}\left\{q_1^{-1/2}\right\} = 0, \\ q_2^{1/2}\dfrac{d^2}{d\xi^2}\left\{q_2^{-1/2}\right\} - b(\xi) = 0, \end{cases} \qquad (49)$$

которые удовлетворяются только при постоянной величине волнового акустического сопротивления среды $a(\xi) = \text{const}$ $(n(\xi) = \text{const})$ (т.е. для $a_p(\xi) \equiv a_v(\xi) = 1$ при $1/H = 0$), из (21), (22) и (10), (41), (42) автоматически получаются совпадающие с (8), (9) аналитические решения, описывающие распространение во взаимно противоположных направлениях импульсных волн давления и колебательной скорости с неизменной формой профиля. При этом безотражательное распространение таких волн возможно при выполнении очевидного равенства $a(\xi) = a_+ = a_-$.

Здесь представляется важным обратить внимание на тот факт, что уже сравнительно давно (см. [11]) разработана весьма эффективная итерационная схема аналитического решения уравнений (43), (44), позволяющая находить обобщенные ВКБ-функции (41) и (42), удовлетворяющие соответственным уравнениям (30) и (31) с любой желаемой точностью, и, тем самым, получать с определенной точностью приближенные аналитические решения, описывающие бегущие в противоположных направлениях импульсные волны давления и колебательной скорости (см. (46)).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем основные результаты выполненных в настоящей работе исследований и следующие из них выводы.

С использованием предложенного в [8] преобразования волновых уравнений для возмущения давления и колебательной скорости, описывающих распространение акустических волн в средах с непрерывной стратификацией скорости звука и плотности, на примере вертикального распространения плоских акустических волн в атмосфере (без учета влияния силы тяжести) показано, что режим их безотражательного распространения во всем диапазоне частот излучения реализуется лишь при постоянной величине волнового акустического сопротивления среды.

Выяснено, что безотражательное распространение акустических волн реализуется лишь только в тех непрерывно-стратифицированных средах, для которых волновые уравнения с переменными коэффициентами для возмущения давления и колебательной скорости одними и теми же преобразованиями сводятся к волновому уравнению сравнения с постоянными коэффициентами при одном и том же профиле волнового акустического сопротивления, обратно пропорционального показателю преломления. Поэтому установлено, что предложенный в [1—5] аналогичный методу эталонного уравнения [8] подход к преобразованию волновых уравнений с переменными коэффициентами для различных физических величин, например, возмущения давления и колебательной скорости, или, как в [2—5], колебательной скорости и ее дивергенции, к волновому уравнению сравнения с постоянными коэффициентами при отличающихся профилях показателя преломления, не позволяет однозначно утверждать о безотражательном характере распространения акустических волн в средах с соответствующими (см. [2—5]) профилями показателя преломления.

Отмечено, что использованный в [1—5] подход аналитического описания волновых процессов в непрерывно-стратифицированных средах с определенными профилями показателя преломления (см. [2—5]) является всего лишь частным случаем более общего и ранее предложенного в [6, 11] метода получения обобщенных ВКБ-решений, которые в конкретно рассмотренных ситуациях (см. [2—5]) представляют собой точные в классе элементарных функций аналитические решения, не удовлетворяющие, однако, корректным физическим условиям во всей области изменения независимой пространственной переменной (см. § 3.1 и § 6.3 в [8]). Показано также, что обобщенный метод ВКБ [6, 11] позволяет при отсутствии горизонтов поворота волн в непрерывно-стратифицированных средах однозначно идентифицировать распространяющиеся в противоположных направлениях волны, несмотря на частотно-зависимое влияние их друг на друга [18].

Данное исследование выполнено в рамках госзадания ИПФ РАН по теме № 0030-2021-0009.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г.* Безотражательное распространение волн в сильно неоднородных средах // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2010. Т. 3. № 9. С. 4—13.
2. *Петрухин Н.С., Пелиновский Е.Н., Бацына Е.К.* Безотражательное распространение акустических волн в атмосфере Земли // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 93. № 10. С. 625—628.
3. *Петрухин Н.С., Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г.* Безотражательное вертикальное распространение акустической волны в сильно неоднородной атмосфере // Изв. РАН. Физ. атм. и океана. 2012. Т. 48. № 2. С. 189—194.
4. *Петрухин Н.С., Пелиновский Е.Н., Бацына Е.К.* Безотражательное распространение акустических волн в атмосфере Солнца // Письма в Астрономический журнал. 2012. Т. 38. № 6. С. 439—445.
5. *Петрухин Н.С., Пелиновский Е.Н., Бацына Е.К.* Безотражательные акустико-гравитационные волны в атмосфере Земли // Геомагнетизм и аэрономия. 2012. Т. 52. № 6. С. 854—860.
6. *Фрёман Н., Фрёман П.У.* ВКБ-приближение. М.: Мир, 1967. 168 с.
7. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965. 238 с.
8. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика неоднородных сред. Т. 1. Основы теории отражения и распространения звука. М.: Наука, 2007. 443 с.
9. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
10. *Ефимов С.П.* Модель неотражающей анизотропной среды // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 2. С. 234—238.

11. *Hecht C.E., Mayer J.E.* Extention of the WKB equation // Phys. Rev. 1957. V. 106. № 6. P. 1156–1160.
12. *Миронов М.А.* Распространение изгибной волны в пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 546–547.
13. *Миронов М.А., Писляков В.В.* Одномерные волны в замедляющих структурах со скоростью распространения, стремящейся к нулю // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 3. С. 400–405.
14. *Миронов М.А.* Точные решения уравнения поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 1. С. 3–8.
15. *Миронов М.А.* Разрезной стержень как вибрационная черная дыра // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 6. С. 736–739.
16. *Диденкулова И.И., Заибо Н., Пелиновский Е.Н.* Отражение длинных волн от “безотражательного” донного профиля // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 4. С. 102–108.
17. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
18. *Пелиновский Е.Н., Диденкулова И.И.* Распространение волн в сильно неоднородной среде / Нелинейные волны 2008. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2009. С. 191–204.