

УДК 539.3

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ГИБКИХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

© 2022 г. А. А. Саркисян<sup>а</sup>, \*, \*\*, С. О. Саркисян<sup>б</sup>, \*\*\*

<sup>а</sup>Ширакский государственный университет, квартал Ани, ул. 13, дом 11, кв. 15, г. Гюмри, 3125 Армения

<sup>б</sup>Национальная академия наук Армении, ул. Саят-Новы, дом 2, кв. 11, г. Гюмри, 3101 Армения

\*e-mail: armenuhis@mail.ru

\*\*e-mail: armenuhis@gmail.com

\*\*\*e-mail: s\_sargsyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 16.11.2020 г.

После доработки 19.11.2021 г.

Принята к публикации 24.11.2021 г.

Построена математическая модель динамики геометрически нелинейных (гибких) микрополярных упругих тонких пластин в декартовых и криволинейных координатах (подход обобщается также для построения модели микрополярных гибких пологих оболочек). При построении модели считается, что упругие прогибы пластинки сравнимы с их толщиной и, вместе с тем, малы по отношению к характерным размерам в плане. На основе построенной модели микрополярных упругих гибких пластин решены задачи свободных колебаний для прямоугольных и круглых пластин, а также решена задача свободных колебаний пологих оболочек. Обсуждаются эффективные стороны проявления характерных черт микрополярного материала по сравнению с соответствующим классическим материалом.

*Ключевые слова:* микрополярная теория упругости, прикладная нелинейная динамическая модель, гибкие пластинки и пологие оболочки, нелинейные собственные колебания, характерные черты микрополярного материала

DOI: 10.31857/S0320791922020083

### ВВЕДЕНИЕ

Проблема нелинейного динамического деформирования упругих тонкостенных конструкций является одной из фундаментальных в механике деформируемого твердого тела. В классической теории упругости широкую известность получили уравнения квадратичного варианта динамической нелинейной прикладной теории изгиба пластин Фепеля–Кармана [1] и теории изгиба пологих оболочек Маргерра [2]. В рамках этих теорий решены (см., например, [3, 4]) многочисленные задачи нелинейного динамического деформирования упругих тонких пластин и пологих оболочек различных очертаний, под действием различных динамических внешних воздействий и при различных граничных условиях.

В настоящее время актуальна проблема построения и изучения математических прикладных теорий нелинейного динамического деформирования микрополярных упругих тонких пластин и пологих оболочек. Обзор работ по теории микрополярных упругих тонких оболочек и пластин вы-

полнен в работе [5]. Отметим, что теоретические основания динамической микрополярной теории упругости и ее приложения к различным задачам развивались в работах [6–10] и др. Построению общей нелинейной теории микрополярных тонких оболочек посвящена работа [11].

В работах [12–16] на основе метода гипотез, который обосновывается при анализе трехмерной теории с использованием асимптотического метода интегрирования соответствующей граничной задачи [17], построена линейная теория динамики микрополярных упругих оболочек и пластин, и в рамках этой теории изучены различные прикладные задачи на собственные и вынужденные колебания.

В данной работе построена прикладная нелинейная теория динамического изгиба тонких упругих микрополярных пластин и пологих оболочек, которая представляет собой развитие теории Фепеля–Кармана–Маргерра применительно к микрополярной теории упругости.

ТРЕХМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ  
НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ  
УПРУГИХ ПЛАСТИН С НЕЗАВИСИМЫМИ  
ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ

Рассмотрим прямоугольную тонкую пластинку постоянной толщины  $2h$ , считая ее трехмерным упругим микрополярным изотропным телом. Отнесем пластинку к системе декартовых координат  $(x_1, x_2, z)$ . Координатную плоскость  $x_1, x_2$  будем совмещать со срединной плоскостью пластинки. Ось  $Oz$  направим вдоль нормали к срединной плоскости. Примем следующие обозначения:  $(V_1, V_2, V_3)$  – вектор перемещения;  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор свободного поворота.

Пусть  $M(x_1, x_2, z)$  – произвольная точка пластинки, а  $N(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, z + dz)$  – бесконечно близкая к ней соседняя точка пластинки. До деформации можно задать вектор  $MN$ , проекции которого равны  $(dx_1, dx_2, dz)$ . После деформации точка  $M$  перемещается в позицию  $M^*(\xi, \eta, \zeta)$ , а точка  $N$  перемещается в позицию  $N^*(\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta)$ . Новый вектор  $M^*N^*$  имеет проекции  $d\xi, d\eta, d\zeta$ . В случае микрополярной теории упругости смещение элемента  $d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, dz)$  обусловлено не только вектором перемещений [18]

$$\begin{aligned} d\xi &= \left(1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial V_1}{\partial z} dz, \\ d\eta &= \frac{\partial V_2}{\partial x_1} dx_1 + \left(1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right) dx_2 + \frac{\partial V_2}{\partial z} dz, \\ d\zeta &= \frac{\partial V_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} dx_2 + \left(1 + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right) dz, \end{aligned}$$

но и вектором свободного поворота по формуле  $d\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$  (поскольку в микрополярной теории можно принять, что дифференциальный элемент  $MN$  при повороте является абсолютно твердым телом). В результате получим:

$$\begin{aligned} d\xi &= \left(1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \omega_3\right) dx_2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \omega_2\right) dz, \\ d\eta &= \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \omega_3\right) dx_1 + \\ &+ \left(1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right) dx_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1\right) dz, \\ d\zeta &= \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2\right) dx_1 + \\ &+ \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \omega_1\right) dx_2 + \left(1 + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right) dz. \end{aligned} \quad (1)$$

Далее, расстояния между соседними точками до и после деформации равны соответственно:

$$(MN)^2 = ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dz^2, \quad (2)$$

$$(M^*N^*)^2 = ds^{*2} = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2. \quad (3)$$

На основе соотношений (1)–(3) получим:

$$\begin{aligned} ds^{*2} - ds^2 &= \left(1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right)^2 dx_1^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \omega_3\right)^2 dx_2^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \omega_2\right)^2 dz^2 + 2\left(1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \omega_3\right) dx_1 dx_2 + \\ &+ 2\left(1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \omega_2\right) dx_1 dz + 2\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \omega_3\right) \times \\ &\times \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \omega_2\right) dx_2 dz + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \omega_3\right)^2 dx_1^2 + \\ &+ \left(1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right)^2 dx_2^2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1\right)^2 dz^2 + \\ &+ 2\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \omega_3\right)\left(1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 + \\ &+ 2\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \omega_3\right)\left(\frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1\right) dx_1 dz + \\ &+ 2\left(1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1\right) dx_2 dz + \\ &+ \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2\right)^2 dx_1^2 + \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \omega_1\right)^2 dx_2^2 + \\ &+ \left(1 + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)^2 dz^2 + 2\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2\right) \times \\ &\times \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \omega_1\right) dx_1 dx_2 + 2\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2\right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right) dx_1 dz + 2\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \omega_1\right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right) dx_2 dz - (dx_1^2 + dx_2^2 + dz^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Используя компоненты тензора деформаций  $\gamma_{ii}, \gamma_{ij}, \gamma_{33}, \gamma_{i3}, \gamma_{3i}$ , разность  $ds^{*2} - ds^2$  представим в виде:

$$\begin{aligned} ds^{*2} - ds^2 &= 2\gamma_{11} dx_1^2 + 2\gamma_{22} dx_2^2 + 2\gamma_{33} dz^2 + \\ &+ 2(\gamma_{12} + \gamma_{21}) dx_1 dx_2 + \\ &+ 2(\gamma_{13} + \gamma_{31}) dx_1 dz + 2(\gamma_{23} + \gamma_{32}) dx_2 dz, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_{ii} &= \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_i} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \omega_3^2 + \omega_j^2 - 2(-1)^j \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \omega_3 - \frac{\partial V_3}{\partial x_i} \omega_j \right) \right], \\
\gamma_{33} &= \frac{\partial V_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial z} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2 \frac{\partial V_1}{\partial z} \omega_2 + 2 \frac{\partial V_2}{\partial z} \omega_1 \right], \\
\gamma_{ij} &= \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - (-1)^j \omega_3 + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_j} - (-1)^j \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \omega_3 + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \omega_1 + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \omega_2 - \omega_1 \omega_2 \right), \quad (6) \\
\gamma_{i3} &= \frac{\partial V_3}{\partial x_i} + (-1)^j \omega_j + \frac{\partial V_3}{\partial x_i} \frac{\partial V_3}{\partial z} + (-1)^j \frac{\partial V_3}{\partial z} \omega_j + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial z} + (-1)^j \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \omega_i - \frac{\partial V_j}{\partial z} \omega_3 \right) - \omega_i \omega_3 \right), \\
\gamma_{3i} &= \frac{\partial V_i}{\partial z} - (-1)^j \omega_j + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial z} - \\
&\quad - (-1)^j \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \omega_j + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial z} + \right. \\
&\quad \left. + (-1)^j \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \omega_i - \frac{\partial V_j}{\partial z} \omega_3 \right) - \omega_i \omega_3 \right).
\end{aligned}$$

Аналогично можно получить компоненты тензора изгиба-кручения:  $\chi_{ii}, \chi_{ij}, \chi_{33}, \chi_{i3}, \chi_{3i}$ :

$$\begin{aligned}
\chi_{ii} &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x_i} \right)^2 \right], \\
\chi_{33} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right)^2 \right], \\
\chi_{ij} &= \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_j}, \quad (7) \\
\chi_{i3} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial z}, \\
\chi_{3i} &= \frac{\partial \omega_i}{\partial z} + \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Выражения (6) и (7) определяют трехмерную геометрическую модель микрополярной гибкой пластинки в декартовых координатах.

Теперь обобщим эту геометрическую модель в ортогональных криволинейных координатах  $\alpha_1, \alpha_2, z$  (где криволинейные оси  $\alpha_1, \alpha_2$  расположены в срединной плоскости пластинки, а прямолинейная ось  $z$  перпендикулярна к этой плоскости), а также приведем уравнения движения и соотношения упругости микрополярного материала

(с независимыми полями перемещений и вращений).

Уравнения движения имеют вид [6]:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H_i} \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} (\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) + \frac{1}{H_j} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \alpha_j} + \\
&\quad + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} (\sigma_{ji} + \sigma_{ij}) + \frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 V_i}{\partial t^2}, \\
&\quad \frac{1}{H_1} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{13} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \alpha_2} + \\
&\quad + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \alpha_1^2} \sigma_{11} + \\
&\quad + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \alpha_2^2} \sigma_{22} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) + \\
&\quad + \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{H_2}{H_1^2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1} \sigma_{11} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\sigma_{12} + \sigma_{21})}{\partial \alpha_2} \right] + \\
&\quad + \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_2} \left[ \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{H_1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_2} \sigma_{22} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{22} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\sigma_{12} + \sigma_{21})}{\partial \alpha_1} \right] = \rho \frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2}, \quad (8) \\
&\quad \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mu_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} (\mu_{ii} - \mu_{jj}) + \frac{1}{H_j} \frac{\partial \mu_{ji}}{\partial \alpha_j} + \\
&\quad + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} (\mu_{ji} + \mu_{ij}) + \frac{\partial \mu_{3i}}{\partial z} + \\
&\quad + (-1)^j (\sigma_{j3} - \sigma_{3j}) = J \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} \\
&\quad \frac{1}{H_1} \frac{\partial \mu_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \mu_{13} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \mu_{23}}{\partial \alpha_2} + \\
&\quad + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \mu_{23} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = J \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

Аналогично теории Фепеля–Кармана здесь уравнения движения написаны для деформированного состояния пластин.

Физические соотношения теории упругости

$$\begin{aligned}
\gamma_{ii} &= \frac{1}{E} [\sigma_{ii} - \nu (\sigma_{jj} + \sigma_{33})], \\
\gamma_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})], \\
\gamma_{ij} &= \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{ij} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{ji}, \\
\gamma_{i3} &= \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{i3} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{3i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{3i} &= \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{3i} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{i3}, & (9) \\ \chi_{ii} &= \frac{\beta + \gamma}{\gamma(3\beta + 2\gamma)} \left[ \mu_{ii} - \frac{\beta}{2(\beta + \gamma)} (\mu_{jj} + \mu_{33}) \right], \\ \chi_{33} &= \frac{\beta + \gamma}{\gamma(3\beta + 2\gamma)} \left[ \mu_{33} - \frac{\beta}{2(\beta + \gamma)} (\mu_{11} + \mu_{22}) \right], \\ \chi_{ij} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{ij} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{ji}, \\ \chi_{i3} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{i3} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{3i}, \\ \chi_{3i} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{3i} - \frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{i3}. \end{aligned}$$

Отметим, что физические соотношения (9) представлены в виде линейных зависимостей.

Геометрические соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \gamma_{ii} &= \frac{1}{H_i} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} V_j + \\ &+ \frac{1}{2H_i^2} \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial \alpha_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_i} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \omega_3^2 + \omega_j^2 - 2(-1)^j \frac{1}{H_i} \left( \frac{\partial V_j}{\partial \alpha_i} \omega_3 - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_i} \omega_j \right) \right], \\ \gamma_{33} &= \frac{\partial V_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2 \frac{\partial V_1}{\partial z} \omega_2 + 2 \frac{\partial V_2}{\partial z} \omega_1 \right], \\ \gamma_{ij} &= \frac{1}{H_i} \frac{\partial V_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} V_i - (-1)^j \omega_3 + \\ &+ \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial V_j}{\partial \alpha_1} \frac{\partial V_j}{\partial \alpha_2} - (-1)^j \frac{1}{H_j} \frac{\partial V_j}{\partial \alpha_j} \omega_3 + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_1} \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_1} \omega_1 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{H_2} \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_2} \omega_2 - \omega_1 \omega_2 \right), \\ \gamma_{i3} &= \frac{1}{H_i} \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_i} + (-1)^j \omega_j + \frac{\partial V_3}{\partial x_i} \frac{\partial V_3}{\partial z} + \\ &+ (-1)^j \frac{\partial V_3}{\partial z} \omega_j + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial z} + (-1)^j \frac{\partial V_2}{\partial \alpha_i} \omega_i - \right. \\ &\left. - (-1)^j \frac{\partial V_j}{\partial z} \omega_3 - \omega_i \omega_3 \right), & (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{3i} &= \frac{\partial V_i}{\partial z} - (-1)^j \omega_j + \frac{1}{H_i} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_i} \frac{\partial V_i}{\partial z} - \\ &- (-1)^j \frac{1}{H_i} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_i} \omega_j + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial z} + \right. \\ &\left. + (-1)^j \frac{\partial V_2}{\partial \alpha_i} \omega_i - (-1)^j \frac{\partial V_j}{\partial z} \omega_3 - \omega_i \omega_3 \right), \\ \chi_{ii} &= \frac{1}{H_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \omega_j + \frac{1}{2H_i^2} \times \\ &\times \left[ \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_i} \right)^2 \right], \\ \chi_{33} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right)^2 \right], \\ \chi_{ij} &= \frac{1}{H_i} \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \omega_i + \\ &+ \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial \omega_j}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \omega_j}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{2} \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_2}, \\ \chi_{i3} &= \frac{1}{H_i} \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \omega_3}{\partial z} + \frac{1}{2H_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial z}, \\ \chi_{3i} &= \frac{\partial \omega_i}{\partial z} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial z} + \frac{1}{2H_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial z}. \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{33}, \sigma_{i3}, \sigma_{3i}, \mu_{ii}, \mu_{ij}, \mu_{33}, \mu_{i3}, \mu_{3i}$  — компоненты силового и моментного тензоров напряжений;  $E, \nu, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  — физические константы микрополярного материала пластинки,  $\rho$  — плотность материала,  $J$  — момент инерции при повороте,  $i, j = 1, 2; i \neq j$ .

Из геометрических соотношений (10) можно, в частности, получить приведенные выше соотношения (6) и (7) в декартовых координатах, если принять  $H_1 = H_2 = 1$ .

Для граничных условий на лицевых поверхностях пластинки примем граничные условия первой граничной задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений:

$$\sigma_{3n} = p_n^\pm, \quad \mu_{3n} = m_n^\pm \quad \text{при } z = \pm h, \quad n = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где  $p_n^\pm, m_n^\pm$  — компоненты заданных внешних усилий и моментов на лицевых поверхностях пластинки.

Граничные условия на боковой поверхности пластинки  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления, запишутся либо в силовых и моментных напря-

жениях, либо в перемещениях и поворотах, либо в смешанном виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{mn}n_m &= p_n^*, \quad \mu_{mn}n_m = m_n^* \quad \text{на } \Sigma_1; \\ V_n &= V_n^*, \quad \omega_n = \omega_n^* \quad \text{на } \Sigma_2, \quad m, n = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $p_n^*, m_n^*$  — компоненты заданных внешних усилий и моментов на  $\Sigma_1$ ;  $V_n^*, \omega_n^*$  — заданные компоненты векторов перемещений и независимого поворота на  $\Sigma_2$ .

При помощи начальных условий при  $t = 0$  задаются значения компонентов векторов перемещения, независимого поворота, линейной и вращательной скоростей точек тела, т.е.

$$V_n, \omega_n, \frac{\partial V_n}{\partial t}, \frac{\partial \omega_n}{\partial t}.$$

Отметим, что, обобщая вышеприведенный подход, аналогично могут быть получены основные уравнения геометрически нелинейной трехмерной теории микрополярных упругих пологих оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

#### ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ПРИКЛАДНАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

Для приведения геометрически нелинейной трехмерной задачи микрополярной теории упругости к двумерной, будем основывать предлагаемую теорию микрополярных упругих тонких гибких пластин на следующих положениях: 1) основные гипотезы прикладной линейной теории тонких пластин (работы [12–17]); 2) предположения нелинейной классической теории гибких пластин Кармана [1]). Далее эти положения описаны более подробно.

1. Нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной плоскости пластинки, остается после деформации прямолинейным, свободно поворачивается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. При этом, тангенциальные компоненты вектора свободного поворота — постоянные функции по толщине пластинки, а нормальная компонента — линейная функция.

Вследствие этого имеем следующий закон изменения перемещений и свободных поворотов по толщине пластинки:

$$\begin{aligned} V_i &= u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) + z\psi_i(\alpha_1, \alpha_2, t), \\ \omega_i &= \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (13)$$

$$V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2, t) + z\iota(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad (14)$$

где  $u_1, u_2$  — перемещения точек срединной плоскости пластинки вдоль координатных осей  $\alpha_1, \alpha_2$ ;  $w$  — перемещение точек срединной плоскости в направлении оси  $z$  (т.е. прогиб пластинки);  $\psi_1, \psi_2$  — полные углы поворота, а  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  — свободные повороты первоначально нормального элемента вокруг линий  $\alpha_1, \alpha_2, z$ ;  $\iota$  — интенсивность свободного поворота вдоль оси  $z$ .

2. Будем считать, что пластинка получает большие прогибы  $w$ , и в то же время будем считать перемещения  $u_1, u_2$  в срединной плоскости пластинки величинами малыми. Такое же допущение сделаем по отношению к производным  $\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}$ ,

$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}$ , считая их малыми по сравнению с величинами  $\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}$ . Будем также считать, что квадраты производных  $\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}$  имеют тот же порядок малости, что и первая степень производных от перемещений  $u_1, u_2$  по  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Предположим также, что малы как углы поворота нормалей к срединной плоскости до деформации, так и их свободные повороты, а также в тензоре деформации учитываются нелинейные слагаемые в градиентах перемещения.

3. В физических соотношениях для  $\gamma_{11}$  и  $\gamma_{22}$  можно пренебрегать силовым напряжением  $\sigma_{33}$  по сравнению с силовыми напряжениями  $\sigma_{ii}$ .

4. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений  $\sigma_{3i}$  и моментного напряжения  $\mu_{33}$  сначала примем:

$$\sigma_{3i} = \sigma_{3i}^0(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad \mu_{33} = \mu_{33}^0(\alpha_1, \alpha_2, t). \quad (15)$$

После определения указанных выше величин, значения (15) для  $\sigma_{3i}$  и  $\mu_{33}$  уточняем, прибавляя к (15) результаты интегрирования по  $z$  уравнений движения для  $\sigma_{3i}$  и  $\mu_{33}$ , с условием, чтобы их усредненные по толщине пластинки величины были равны нулю.

Легко показать, что компоненты тензоров деформации и изгиба-кручения будут выражаться формулами:

$$\begin{aligned} \gamma_{ii} &= \Gamma_{ii} + zK_{ii}, \quad \gamma_{ij} = \Gamma_{ij} + zK_{ij}, \\ \gamma_{i3} &= \Gamma_{i3}, \quad \gamma_{3i} = \Gamma_{3i}, \quad \chi_{ii} = \kappa_{ii}, \\ \chi_{33} &= \iota, \quad \chi_{ij} = \kappa_{ij}, \quad \chi_{i3} = \kappa_{i3} + zI_{i3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $\Gamma_{ii}$  – деформации удлинений в направлениях  $x_1, x_2$ ;  $\Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}$  – деформации сдвигов в соответствующих плоскостях;  $K_{ii}$  – изгибы срединной плоскости, обусловленные силовыми напряжениями;  $K_{ij}$  – кручения срединной плоскости, обусловленные силовыми напряжениями;  $\kappa_{ii}, \kappa_{33}$  – изгибы срединной плоскости, обусловленные моментными напряжениями;  $\kappa_{ij}$  – кручения срединной плоскости, обусловленные моментными напряжениями;  $l_{i3}$  – гиперсдвиги срединной плоскости, обусловленные моментными напряжениями.

Как обычно принято в прикладных теориях тонких пластин, вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики: усилия  $(T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i})$ , моменты  $(M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33})$  и гипермоменты  $(\Lambda_{i3})$  [12–17]:

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \int_{-h}^h \sigma_{ii} dz, & S_{ij} &= \int_{-h}^h \sigma_{ij} dz, \\ N_{i3} &= \int_{-h}^h \sigma_{i3} dz \quad (i \leftrightarrow 3), & M_{ii} &= \int_{-h}^h \sigma_{ii} z dz, \\ M_{ij} &= \int_{-h}^h \sigma_{ij} z dz, & L_{mn} &= \int_{-h}^h \mu_{mn} dz, \\ (m, n &= 1, 2, 3), & \Lambda_{i3} &= \int_{-h}^h z \mu_{i3} dz. \end{aligned} \quad (17)$$

Основные уравнения динамики геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением в криволинейных координатах срединной плоскости ( $H_i = A_i$  для тонких пластин) с учетом всех перечисленных выше предположений о вращательно-сдвиговых деформациях, составляют приведенную ниже систему.

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \\ &+ \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) = 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - (p_i^+ - p_i^-), \\ &\frac{1}{A_i} \frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (M_{ii} - M_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial M_{ji}}{\partial \alpha_j} + \\ &+ \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (M_{ji} + M_{ij}) - N_{3i} = \\ &= \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - h(p_i^+ + p_i^-), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \left[ \frac{\partial(A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} T_{11} + \right. \\ &+ \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} T_{22} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} (S_{12} + S_{21}) + \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \times \\ &\times \left[ \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} T_{11} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial(S_{12} + S_{21})}{\partial \alpha_2} \right] + \\ &+ \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \left[ \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{A_1}{A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} T_{22} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{22} + \frac{1}{2} \frac{\partial(S_{12} + S_{21})}{\partial \alpha_1} \right] \Big\} = \\ &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (p_3^+ - p_3^-), \\ &\frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \\ &+ \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = \\ &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2} - (m_i^+ - m_i^-), \\ &\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial(A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] + (S_{12} - S_{21}) = \\ &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} - (m_3^+ - m_3^-), \\ &\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial(A_2 \Lambda_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 \Lambda_{23})}{\partial \alpha_2} \right] + (M_{12} - M_{21}) - L_{33} = \\ &= \frac{2Jh^3}{3} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} - h(m_3^+ + m_3^-). \end{aligned} \quad (18)$$

Физические соотношения теории упругости:

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}], & M_{ii} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], \\ M_{ij} &= \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha)K_{ij} + (\mu - \alpha)K_{ji}], \\ S_{ij} &= 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\Gamma_{ji}], \\ N_{i3} &= 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{i3} + (\mu - \alpha)\Gamma_{3i}], \\ N_{3i} &= 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{3i} + (\mu - \alpha)\Gamma_{i3}], \\ L_{ii} &= 2h[(\beta + 2\gamma)\kappa_{ii} + \beta(\kappa_{jj} + \nu)], \\ L_{33} &= 2h[(\beta + 2\gamma)\nu + \beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})], \\ L_{ij} &= 2h[(\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji}], \\ L_{i3} &= 2h \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3}, & \Lambda_{i3} &= \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \right)^2, \\ \Gamma_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i - (-1)^j \Omega_3 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \\ \Gamma_{i3} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + (-1)^j \Omega_j, \quad \Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j \Omega_j, \\ K_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_j, \\ K_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_i - (-1)^j \iota, \\ \kappa_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_j, \quad \kappa_{33} = \iota, \\ \kappa_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i. \end{aligned} \quad (20)$$

Граничные условия, например, шарнирного опирания выражаются так:

$$\begin{aligned} T_{ii} = 0, \quad u_j = 0, \quad M_{ii} = 0, \quad \psi_j = 0, \\ w = 0, \quad L_{ij} = 0, \quad \Omega_i = 0, \\ \Lambda_{i3} = 0, \quad \text{при } x_i = 0; a. \end{aligned} \quad (21)$$

К системе основных уравнений динамики микрополярных пластин со свободным вращением (18)–(20) и граничным условиям (21) необходимо присоединить также соответствующие начальные условия для  $w, \partial w / \partial t, \psi_i, \partial \psi_i / \partial t, \Omega_i, \partial \Omega_i / \partial t, \iota, \partial \iota / \partial t$ .

Отметим, что аналогичный подход применен также для построения геометрически нелинейной прикладной модели микрополярных упругих тонких пологих оболочек.

#### СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

В случае прямоугольной пластинки в основных уравнениях примем  $A_1 = A_2 = 1$ . Далее будем пренебрегать всеми инерционными членами в уравнениях движения, кроме  $2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ .

Решение граничной задачи (18)–(21) при изучении собственных колебаний представим в виде:

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, t) &= w(t) \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}, \\ u_1(x_1, x_2, t) &= u_1(t) \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}, \\ u_2(x_1, x_2, t) &= u_2(t) \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}, \\ \psi_1(x_1, x_2, t) &= \psi_1(t) \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}, \\ \psi_2(x_1, x_2, t) &= \psi_2(t) \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}, \\ \Omega_1(x_1, x_2, t) &= \Omega_1(t) \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}, \\ \Omega_2(x_1, x_2, t) &= \Omega_2(t) \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}, \\ \Omega_3(x_1, x_2, t) &= \Omega_3(t) \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}, \\ \iota(x_1, x_2, t) &= \iota(t) \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}. \end{aligned} \quad (22)$$

Решение (22) удовлетворяет граничным условиям (21). Подставим эти представления в геометрические соотношения (20). Подставляя далее получившиеся выражения для деформаций и изгибов-кручений в физические соотношения (19), найдем выражения для усилий, моментов и гипермоментов. Применяя метод Галеркина для систем уравнений движения (18), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial x_2} \right) \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 &= 0, \\ \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} \right) \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 &= 0, \\ \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ T_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{S_{12} + S_{21}}{2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{S_{12} + S_{21}}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + T_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a \int_0^b \left( N_{31} - \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} \right) \right) \times \\
 & \times \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0, \\
 & \int_0^a \int_0^b \left( N_{32} - \left( \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \right) \right) \times \\
 & \times \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0, \\
 & \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} + (N_{23} - N_{32}) \right) \times \\
 & \times \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0, \\
 & \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} - (N_{13} - N_{31}) \right) \times \\
 & \times \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0, \\
 & \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + (S_{12} - S_{21}) \right) \times \\
 & \times \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0, \\
 & \int_0^a \int_0^b \left( L_{33} - \left( \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} \right) - (M_{12} - M_{21}) \right) \times \\
 & \times \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Выполним интегрирование и представим функции  $w(t), u_1(t), u_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \Omega_1(t), \Omega_2(t), \Omega_3(t), \iota(t)$  в виде:

$$\begin{aligned}
 w(t) &= W \cos(pt), & u_i(t) &= U_i \cos(pt), \\
 \psi_i(t) &= \Psi_i \cos(pt), & \Omega_i(t) &= O_i \cos(pt), \\
 \Omega_3(t) &= O_3 \cos(pt), & \iota(t) &= I \cos(pt).
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Подставим эти функции в полученные уравнения, умножим их на  $\cos(pt)$  и проинтегрируем по  $t$  от 0 до  $\frac{\pi}{2p}$ . В результате получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $W, U_1, U_2, \Psi_1, \Psi_2, O_1, O_2, O_3, I$ . Из этой системы можно получить зависимость  $W-p$ .

Эта задача решена также в рамках соответствующей линейной модели микрополярных упругих тонких пластин. Введем безразмерный прогиб  $A = W/h$ , а также величину  $\eta = p/p_0$  – отношение величины  $p$  к соответствующей частоте линейных колебаний  $p_0$ .

Численные расчеты выполнены для квадратной пластинки с размерами  $b = a = 0.005$  м; отно-

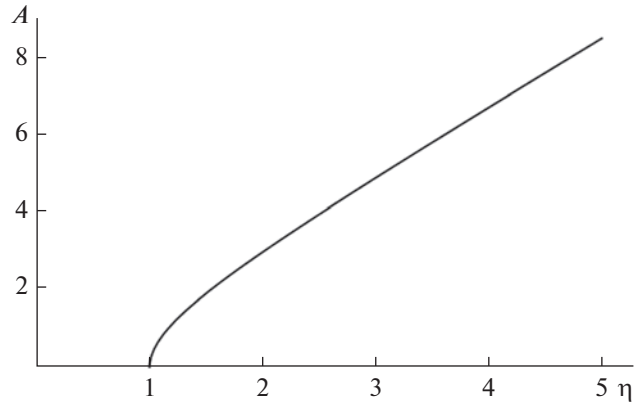


Рис. 1. Зависимость безразмерного прогиба прямоугольной пластинки  $A$  от величины  $\eta$ .

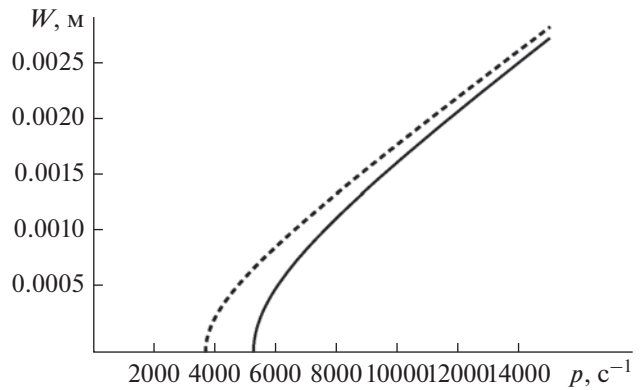


Рис. 2. Сравнение микрополярной и классической моделей.

сительная толщина принята равной  $\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{100}$ . Для физических постоянных приняты значения [19]  $\alpha = 0.115 \times 10^9$  Па,  $\mu = 1.033 \times 10^9$  Па,  $\lambda = 2.1951 \times 10^9$  Па,  $\gamma = 4.1$  Н,  $\varepsilon = 0.13$  Н,  $\beta = -2.34$  Н,  $\rho = 590$  кг/м<sup>3</sup>,  $J = 5.31 \times 10^{-6}$  кг/м. На рис. 1 приведена зависимость  $(\eta, A)$ , эта линия называется скелетной кривой, которая отражает основные свойства деформируемой системы [3]. Кривая  $(\eta, A)$  представляет линию жесткого типа, т.е. с увеличением амплитуды частота возрастает. При весьма малых амплитудах имеем  $\eta \rightarrow 1$ . С увеличением амплитуды частота колебаний возрастает, и притом все более и более резко.

На рис. 2 приведена зависимость прогиба прямоугольной пластинки  $W$  от частоты  $p$ . Пунктирная линия соответствует классической модели, а непрерывная линия – микрополярной модели. При наличии зависимости  $W-p$  (в размерных величинах), рис. 2 можно использовать для сравнения микрополярного и классического случаев. Видно, что при значениях частот от 3709 до 5287 с<sup>-1</sup> в клас-



сическом случае имеются колебания, а в микрополярном — нет. Когда колебания имеют место в обоих случаях (при  $5500 \text{ с}^{-1}$ ), перемещение в микрополярном случае в  $\approx 2.7$  раз меньше, чем в классическом случае. Это означает, что при прочих равных условиях в микрополярном случае пластинка более жесткая, чем в классическом.

### СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

В случае круглой пластинки в основных уравнениях (18)–(20) примем  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = r$ . Тогда получим следующую, приведенную ниже систему уравнений.

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}(T_{11} - T_{22}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{21}}{\partial \theta} &= 2\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r}(S_{12} + S_{21}) &= 2\rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{23}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} T_{11} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} T_{22} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} (S_{12} + S_{21}) + \\ &+ \frac{\partial w}{\partial r} \left[ \frac{\partial T_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} T_{11} + \frac{1}{2r} \frac{\partial (S_{12} + S_{21})}{\partial \theta} \right] + \\ &+ \frac{\partial w}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{11} + \frac{1}{2r} \frac{\partial (S_{12} + S_{21})}{\partial r} \right] = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial L_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}(L_{11} - L_{22}) + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{21}}{\partial \theta} + \\ &+ N_{23} - N_{32} = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(L_{12} + L_{21}) + N_{31} - N_{13} &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial L_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} L_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{23}}{\partial \theta} + (S_{12} - S_{21}) &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}, \\ N_{31} - \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}(M_{11} - M_{22}) + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{21}}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0, \\ N_{32} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r}(M_{12} + M_{21}) \right) + \\ &+ \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0, \\ L_{33} - \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Lambda_{13} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial \theta} - (M_{12} - M_{21}) + \\ &+ \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}$$

Физико-геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{2Eh}{1-v^2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \right. \\ &\left. + v \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_1 + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right) \right], \\ T_{22} &= \frac{2Eh}{1-v^2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_1 + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \\ &\left. + v \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) \right], \\ S_{12} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \frac{\partial u_2}{\partial r} + (\mu - \alpha) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_2 \right) - \right. \\ &\left. - 2\alpha \Omega_3 + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right], \\ S_{21} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_2 \right) + \right. \\ &\left. + (\mu - \alpha) \frac{\partial u_2}{\partial r} + 2\alpha \Omega_3 + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right], \\ N_{13} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} + (\mu - \alpha) \psi_1 + 2\alpha \Omega_2 \right], \\ N_{23} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + (\mu - \alpha) \psi_2 - 2\alpha \Omega_1 \right], \\ N_{31} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \psi_1 + (\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} - 2\alpha \Omega_2 \right], \\ N_{32} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \psi_2 + (\mu - \alpha) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + 2\alpha \Omega_1 \right], \\ M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3(1-v^2)} \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + v \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \psi_1 \right) \right], \quad (26) \\ M_{22} &= \frac{2Eh^3}{3(1-v^2)} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \psi_1 + v \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right], \\ M_{12} &= \frac{2h^3}{3} \left[ (\mu + \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \right. \\ &\left. + (\mu - \alpha) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \psi_2 \right) - 2\alpha \right], \\ M_{21} &= \frac{2h^3}{3} \left[ (\mu + \alpha) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \psi_2 \right) + \right. \\ &\left. + (\mu - \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + 2\alpha \right], \\ L_{11} &= 2h \left[ (\beta + 2\gamma) \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} + \beta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) + \beta \Omega_1 \right], \\ L_{22} &= 2h \left[ (\beta + 2\gamma) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) + \beta \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} - \beta \Omega_1 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{13} &= \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial\Omega_3}{\partial r}, \quad L_{23} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon r} \frac{\partial\Omega_3}{\partial\theta}, \\ L_{12} &= 2h \left[ (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial\Omega_2}{\partial r} + (\gamma - \varepsilon) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Omega_1}{\partial\theta} - \frac{1}{r} \Omega_2 \right) \right], \\ L_{21} &= 2h \left[ (\gamma + \varepsilon) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Omega_1}{\partial\theta} - \frac{1}{r} \Omega_2 \right) + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial\Omega_2}{\partial r} \right], \\ L_{33} &= 2h \left[ (\beta + 2\gamma)\iota + \beta \left( \frac{\partial\Omega_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Omega_2}{\partial\theta} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) \right], \\ \Lambda_{13} &= \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial\iota}{\partial r}, \quad \Lambda_{23} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon r} \frac{\partial\iota}{\partial\theta}. \end{aligned}$$

Задаются граничные условия следующего вида:

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_{11}^0, \quad S_{12} = S_{12}^0, \quad M_{11} = M_{11}^0, \quad M_{12} = M_{12}^0, \\ T_{11} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{S_{12} + S_{21}}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial\theta} + N_{13} &= N_{13}^0, \\ L_{11} &= L_{11}^0, \quad L_{12} = L_{12}^0, \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^0. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим осесимметричную задачу. В этом случае уравнения расщепляются на две отдельные системы уравнений: задачу изгиба и задачу кручения круглой пластинки.

В случае задачи изгиба получаем следующую систему уравнений.

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r T_{11} \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ N_{31} - \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} (M_{11} - M_{22}) \right) + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial L_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} (L_{12} + L_{21}) + N_{31} - N_{13} &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial T_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} (T_{11} - T_{22}) &= 2\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Физико-геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{2Eh}{1 - \nu^2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \nu \frac{1}{r} u_1 \right], \\ T_{22} &= \frac{2Eh}{1 - \nu^2} \left[ \frac{1}{r} u_1 + \nu \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) \right], \\ M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)} \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \nu \frac{1}{r} \psi_1 \right], \\ M_{22} &= \frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)} \left[ \frac{1}{r} \psi_1 + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right], \\ L_{12} &= 2h \left[ (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial\Omega_2}{\partial r} - (\gamma - \varepsilon) \frac{1}{r} \Omega_2 \right], \\ L_{21} &= 2h \left[ -(\gamma + \varepsilon) \frac{1}{r} \Omega_2 + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial\Omega_2}{\partial r} \right], \\ N_{13} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} + (\mu - \alpha) \psi_1 + 2\alpha \Omega_2 \right], \\ N_{31} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \psi_1 + (\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} - 2\alpha \Omega_2 \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Задаются граничные условия шарнирного опирания:

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{12} = 0, \quad \text{когда } r = R. \quad (30)$$

В случае задачи кручения получаем следующую систему уравнений.

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} (S_{12} + S_{21}) &= 2\rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial L_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} L_{13} + (S_{12} - S_{21}) &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}, \\ N_{32} - \left( \frac{\partial M_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} (M_{12} + M_{21}) \right) + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial L_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} (L_{11} - L_{22}) + N_{23} - N_{32} &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial t^2}, \\ L_{33} - \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial r} - (M_{12} - M_{21}) + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \iota}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Физико-геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{2h^3}{3} \left[ (\mu + \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - (\mu - \alpha) \frac{1}{r} \psi_2 - 2\alpha \iota \right], \\ N_{23} &= 2h [(\mu - \alpha) \psi_2 - 2\alpha \Omega_1], \\ M_{21} &= \frac{2h^3}{3} \left[ -(\mu + \alpha) \frac{1}{r} \psi_2 + (\mu - \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + 2\alpha \iota \right], \\ N_{32} &= 2h [(\mu + \alpha) \psi_2 + 2\alpha \Omega_1], \\ L_{11} &= 2h \left[ (\beta + 2\gamma) \frac{\partial\Omega_1}{\partial r} + \beta \frac{1}{r} \Omega_1 + \beta \iota \right], \\ L_{22} &= 2h \left[ (\beta + 2\gamma) \frac{1}{r} \Omega_1 + \beta \frac{\partial\Omega_1}{\partial r} - \beta \iota \right], \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} L_{13} &= \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial\Omega_3}{\partial r}, \quad \Lambda_{13} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial\iota}{\partial r}, \\ S_{12} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \frac{\partial u_2}{\partial r} - (\mu - \alpha) \frac{1}{r} u_2 - 2\alpha \Omega_3 \right], \\ S_{21} &= 2h \left[ -(\mu + \alpha) \frac{1}{r} u_2 + (\mu - \alpha) \frac{\partial u_2}{\partial r} + 2\alpha \Omega_3 \right], \\ L_{33} &= 2h \left[ (\beta + 2\gamma)\iota + \beta \left( \frac{\partial\Omega_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Граничные условия шарнирного опирания:

$$\Omega_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \Lambda_{13} = 0, \quad \text{когда } r = R. \quad (33)$$

Далее рассмотрим задачу изгиба (28)–(30). Будем также пренебрегать всеми инерционными членами в уравнениях движения, кроме  $2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ .

Решение граничной задачи (28)–(30) при изучении собственных колебаний представим в виде:

$$\begin{aligned} u_1(r, t) &= u_1(t) \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{r}{R}, \\ w(r, t) &= w(t) \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right), \\ \psi_1(r, t) &= \psi_1(t) \left( 1 - \frac{1+\nu}{3+\nu} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{r}{R}, \\ \Omega_2(r, t) &= \Omega_2(t) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\gamma + 2\varepsilon} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{r}{R}. \end{aligned} \quad (34)$$

Решение (34) уже удовлетворяет граничным условиям (30). Подставим эти представления в геометрические соотношения (29). Получившиеся выражения для деформаций и изгибов-кручений подставим в физические соотношения и найдем выражения для усилий, моментов и гипермоментов. Применяя метод Галеркина для системы уравнений движения (28), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^R \left( \frac{\partial T_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} (T_{11} - T_{22}) \right) \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{r}{R} r dr &= 0, \\ \int_0^R \left( \frac{\partial N_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r T_{11} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \times \\ \times \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) r dr &= 0, \\ \int_0^R \left( \frac{\partial L_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} (L_{12} + L_{21}) + N_{31} - N_{13} \right) \times \\ \times \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\gamma + 2\varepsilon} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{r}{R} r dr &= 0, \\ \int_0^R \left( N_{31} - \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} (M_{11} - M_{22}) \right) \right) \times \\ \times \left( 1 - \frac{1+\nu}{3+\nu} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{r}{R} r dr &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Выполним интегрирование и затем функции  $w(t)$ ,  $u_1(t)$ ,  $\psi_1(t)$ ,  $\Omega_2(t)$  представим в виде:

$$\begin{aligned} w(t) &= W \cos(pt), \quad u_1(t) = U_1 \cos(pt), \\ \psi_1(t) &= \Psi_1 \cos(pt), \quad \Omega_2(t) = O_2 \cos(pt). \end{aligned} \quad (36)$$

Подставим эти функции в полученные уравнения, умножим их на  $\cos(pt)$  и проинтегрируем по  $t$  от 0 до  $\frac{\pi}{2p}$ . В результате получим систему алгеб-

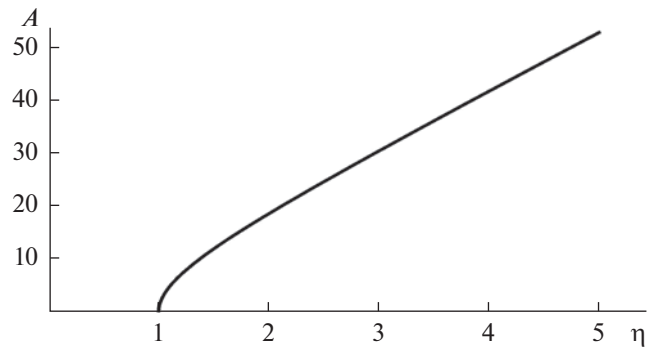


Рис. 3. Зависимость безразмерного прогиба круглой пластинки  $A$  от величины  $\eta$ .

раических уравнений относительно коэффициентов  $W, U_1, \Psi_1, O_2$ , из которой можно получить зависимость  $W-p$ . Введем далее такие же обозначения, как и в случае прямоугольной пластинки.

Проведем численный анализ для вышеприведенного материала, а для геометрических размеров примем: радиус пластинки  $R = 0.005$  м, относительная толщина  $\delta = \frac{h}{R} = \frac{1}{100}$ . На рис. 3 приведена зависимость  $(\eta, A)$ . Кривая  $(\eta, A)$ , как и в предыдущем случае, также представляет линию жесткого типа, т.е. с увеличением амплитуды частота возрастает. При весьма малых амплитудах имеем  $\eta \rightarrow 1$ . С увеличением амплитуды частота колебаний возрастает, и притом все более и более резко. При сравнении микрополярного и классического случаев зависимости  $W-p$ , можно сделать те же выводы, что имели место в случае прямоугольной пластинки.

### СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

Теперь решим также задачу свободных колебаний для микрополярных упругих тонких пологих оболочек прямоугольных в плане с шарнирно опертыми краями. Будем исходить из основных уравнений модели пологих оболочек. Здесь также будем пренебрегать всеми инерционными членами в уравнениях движения, кроме  $2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ . Решение граничной задачи при изучении собственных колебаний также представим в виде (22).

Решение (22) уже удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания. Применяя метод Галеркина для систем уравнений движения, получим:

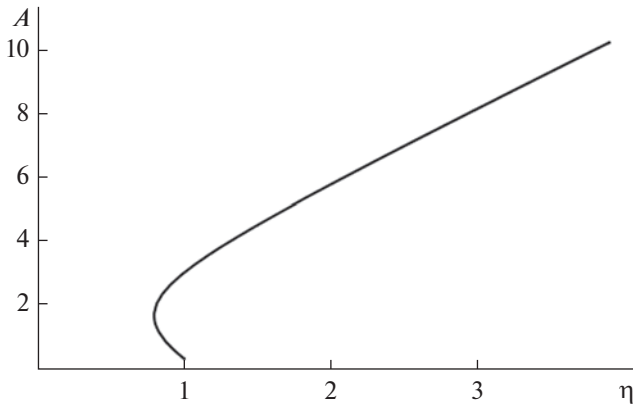


Рис. 4. Зависимость безразмерного прогиба пологой оболочки  $A$  от величины  $\eta$ .

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial x_2} \right) \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} \right) \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ T_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{S_{12} + S_{21}}{2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{S_{12} + S_{21}}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + T_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] + \frac{T_{11}}{R_1} - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b \left( N_{31} - \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} \right) \right) \times$$

$$\times \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b \left( N_{32} - \left( \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \right) \right) \times$$

$$\times \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0, \quad (37)$$

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} + (N_{23} - N_{32}) \right) \times$$

$$\times \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} - (N_{13} - N_{31}) \right) \times$$

$$\times \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + (S_{12} - S_{21}) \right) \times$$

$$\times \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b \left( L_{33} - \left( \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} \right) - (M_{12} - M_{21}) \right) \times$$

$$\times \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = 0.$$

Здесь нужно подставить выражения для физических и геометрических соотношений, а также решение вида (22).

Выполним интегрирование и представим функции  $w(t)$ ,  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$ ,  $\Omega_1(t)$ ,  $\Omega_2(t)$ ,  $\Omega_3(t)$ ,  $l(t)$  в виде (24). Затем подставим их в полученные в результате интегрирования уравнения, умножим на

$\cos(pt)$  и проинтегрируем по  $t$  от 0 до  $\frac{\pi}{2p}$ . В результате получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $W, U_1, U_2,$

$\Psi_1, \Psi_2, O_1, O_2, O_3, I$ , из которого можно получить зависимость  $W-p$ . Численный анализ проведен для того же материала и геометрических размеров, что и в случае пластинки, кроме того

$R = 0.005$  м, относительная толщина  $\delta = \frac{h}{R} = \frac{1}{100}$ .

Отметим, что  $k_2 = \frac{1}{R_2} = 0$ ,  $k_1 = \frac{1}{R}$  (т.е. рассмотрена

цилиндрическая полая оболочка, где  $R_1, R_2$  – радиусы кривизны по направлениям  $\alpha_1, \alpha_2$ ), а также введена безразмерная кривизна  $k^* = \frac{a^2}{R_1 h}$

пологой оболочки и принято  $k^* = 20$ .

На рис. 4 приведена скелетная кривая ( $\eta, A$ ) для полой оболочки. Кривая ( $\eta, A$ ) представляет линию мягкого типа, т.е. начальный участок здесь отклоняется к оси ординат, после этого при увеличении  $A$  амплитуда возрастает все более и более резко. Такие же качественные результаты получаются для случая круглой в плане полой оболочки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построены математические модели микрополярных гибких пластин и пологих оболочек, представляющие собой обобщение известных моделей Фепеля–Кармана–Маргерра классического случая. В рамках этих моделей численно решены задачи о свободных колебаниях

прямоугольных и круглых пластин и пологих оболочек. Выявлены характерные особенности эффективных свойств микрополярного материала по сравнению с соответствующим классическим материалом.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГРН МОН РА в рамках научных проектов 18Т-2С263 и 21Т-2С093.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Karman Th.* Collected works. V. 1. London, 1956. 530 p.
2. *Marguerre K.* Die Durchschlags kraft eines schwachgekrümmten Balkes // Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. 1938. Bd. 37. S. 22–40.
3. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. *Григолюк Э.И., Мамай В.И.* Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 1997. 264 с.
5. *Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A.* On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography // Arch. Appl. Mech (Special Issue). 2010. V. 80. P. 73–92.  
<https://doi.org/10.1007/s00419-009-0365-3>
6. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, etc: Pergamon Press, 1986. 383p.
7. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 2. С. 227–235.
8. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Улитин М.В., Шардаков И.Н.* Анализ волнового решения уравнений эластокинетики среды Коссера в случае плоских объемных волн // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 2. С. 196–203.
9. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.
10. *Sadovskii V., Sadovskaya O., Varigina M.* Numerical solution of dynamic problems in couple-stressed continuum of multiprocessor computer systems // Int. J. Numerical Analysis and Modeling. Series B. 2011. V. 2. № 2–3. P. 215–230.
11. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008. 280 с.
12. *Саркисян С.О.* Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Докл. Акад. наук России. 2011. Т. 436. № 2. С. 195–198.
13. *Sargsyan S.H.* Applied theory of dynamics of micropolar elastic thin shells ad variation principles // Advanced Structured Materials. V. 103. Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures. Springer, 2019. P. 449–465.
14. *Саркисян С.О., Саркисян А.А.* Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением и особенности их свободных колебаний // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 4. С. 461–469.
15. *Саркисян С.О., Саркисян А.А.* Модель колебаний микрополярных тонких оболочек // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 2. С. 170–181.
16. *Sargsyan A.H., Sargsyan S.H.* Dynamic model of micropolar elastic thin plates with independent fields of displacements and rotations // J. Sound Vibr. 2014. V. 333. Is. 18. P. 4354–4375.
17. *Sargsyan S.H.* asymptotically confirmed hypotheses method for the construction of micropolar and classical theories of elastic thin shells // Advances in Pure Mathematics. 2015. V. 5. № 10. P. 629–643.
18. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. Л., М.: ОГИЗ. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 213 с.
19. *Lakes R.* Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with micro-structure / Ed. By Muhlhaus H., Wiley J. N. Y.: J. Wiley and sons, Ltd., 1995. Ch. 1. P. 1–22.