

## ЯЧЕЕЧНЫЕ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ С ТВЕРДЫМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

© 2022 г. Л. И. Казаков\*

Ул. Т. Шевченко 29, кв. 219, Севастополь, 299006 Россия

\*e-mail: lev-kazakov@rambler.ru

Поступила в редакцию 02.04.2020 г.

После доработки 03.09.2021 г.

Принята к публикации 30.11.2021 г.

Приведен расчет акустических характеристик композитной среды в виде резины с твердыми включениями, предложенной ранее в качестве звукопоглощающего материала с независимыми от гидростатического давления свойствами. Расчет основан на применении к такой композитной среде ячеечных моделей монодисперсных суспензий с граничными условиями на поверхности ячейки в виде тонкой жесткой оболочки или условия Хаппеля. Переход к вязкоупругой среде выполнен заменой вязкости суспензии на величину, пропорциональную комплексному модулю сдвига резины. Учтены только сдвиговые потери в резине. Расчет справедлив в широком диапазоне частот для произвольных объемных концентраций включений. Выполнено сравнение расчетных и имеющихся в литературе экспериментальных данных. Рассмотрены варианты слоистых звукопоглотителей, состоящих из набора покрытых резиной твердых шариков разных размеров, помещенных в маловязкую сжимаемую полиметилсилоксановую жидкость.

*Ключевые слова:* композитная вязкоупругая среда, ячеечные модели, сферические включения, граничные условия, диссипация звуковой энергии, звукопоглощающие покрытия

DOI: 10.31857/S0320791922020034

### ВВЕДЕНИЕ

Искусственная композитная среда, состоящая из резины, в которой равномерно распределены твердые сферические или цилиндрические тяжелые включения, предназначена к использованию в качестве звукопоглощающего материала для облицовки измерительных гидроакустических бассейнов и камер [1, 2]. Когда длина звуковой волны много больше размеров включений и среднего расстояния между ними, композитную среду можно считать “микронеоднородной” с эффективными параметрами – плотностью  $\tilde{\rho}$ , скоростью звука  $\tilde{c}$ , волновым числом  $\tilde{k} = \omega/\tilde{c}$  и другими [3, § 19]. К расчету акустических характеристик среды можно применить ячеечные модели монодисперсных суспензий. Такая модель представляет собой упорядоченное размещение в вязкой жидкости одинаковых сферических твердых включений радиуса  $R$ . Каждое включение окружено слоем жидкости, вместе они составляют ячейку суспензии с внешней поверхностью неизвестной сложной формы. Приближение, обеспечивающее возможность расчета, состоит в представлении этого слоя шаровым с наружным радиусом  $R_1$ . Его величину выбирают из условия:  $\varepsilon = \xi^3 = (R/R_1)^3$ , где  $\varepsilon$  – объемная концентрация

включений в суспензии. Упаковку ячеек считаем плотнейшей гексагональной. Акустические свойства суспензии находят, изучая движение фаз в пробной ячейке.

Общие уравнения движения изотропной вязкоупругой несжимаемой среды (например, резины) отличаются от уравнений Навье–Стокса в случае гармонических колебаний лишь тем, что в них вместо динамической вязкости  $\eta$ , жидкости стоит величина  $i\mu^*/\omega$ , где  $\mu^*$  – комплексный модуль сдвига вязкоупругого материала. Поэтому, сделав в готовых формулах для суспензий замену  $\eta \rightarrow i\mu^*/\omega$ , получим акустические характеристики композитной среды “шарики в резине”.

Из-за присущих резине вязких звуковых потерь эффективная плотность  $\tilde{\rho}(\omega)$  такой среды является комплексной частотнозависимой величиной [3, с. 405]. При сферических включениях выражение для  $\tilde{\rho}(\omega)$  было найдено Г.Д. Малюжинцем на основе модельного рассмотрения движения одиночного шарика в резине [4], а также И.А. Чабан – применением к этому случаю метода самосогласованного поля [5, формула (46)]. Полученное выражение пригодно для описания резины с шариками малых волновых размеров при

неопределенно малых их объемных концентрациях  $\epsilon$ .

К вязкоупругим материалам наряду с резиной относятся мягкие пластмассы, смолы, битумы и т.п. Эти вещества занимают промежуточное место между идеально упругими твердыми телами и вязкими несжимаемыми жидкостями, сочетая в себе свойства тех и других. Однородное изотропное вязкоупругое тело, подобно идеально упругому, характеризуют двумя модулями упругости, например, модулем сдвига  $\mu$  и модулем объемного сжатия  $K$  [6, с. 22]. При колебаниях в вязкоупругом теле происходит (как и в вязкой жидкости) диссипация механической энергии за счет внутреннего трения. Поэтому его модули упругости при гармонических колебаниях принципиально комплексные и частотнозависимые величины. Более того, их вещественные и мнимые части однозначно взаимосвязаны отражающими принцип причинности дисперсионными соотношениями типа Крамерса–Кронига [7, 8; 9, § 123].

Важнейшим для резины является комплексный динамический модуль сдвига

$$\mu^*(\omega) = \mu(\omega)[1 - i\eta(\omega)], \quad (1)$$

где  $\mu(\omega)$  – модуль сдвига,  $\eta(\omega)$  – коэффициент сдвиговых потерь, причем

$$|\mu^*(\omega)| \ll K. \quad (2)$$

Кроме того,  $\mu(\omega)$  – четная, а  $\eta(\omega)$  – нечетная функции частоты  $\omega$ :

$$\mu(\omega) = \mu(-\omega), \quad \eta(\omega) = -\eta(-\omega).$$

Модули сдвига разных резин отличаются друг от друга в десятки и сотни раз и лежат в пределах  $\mu(\omega) = 10^5 \dots 10^8$  Па. Коэффициенты сдвиговых потерь резин обычно порядка  $\eta(\omega) = 0.1 \dots 1.0$ . Модули всестороннего сжатия резин примерно такие же, как у воды, и в диапазоне звуковых и ультразвуковых частот практически от частоты не зависят, т.е. их можно считать вещественными величинами. Соотношения (1) и (2) фактически служат определением вязкоупругих “практически несжимаемых”, “водоподобных” веществ [3, с. 446].

Рассматриваемой композитной среде присущи две полезные особенности: 1) резонансное поведение и 2) независимость акустических свойств от гидростатического давления. Акустический резонатор образуют инерционная масса включения, присоединенная масса резины, ее сдвиговая упругость и вязкие потери в резине. Незначительная пьезорасстройка свойств материала обусловлена практической несжимаемостью резины вблизи включения и жесткостью последнего.

## КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОТНОСТЬ КОМПОЗИТНОЙ СРЕДЫ

Комплексная плотность резины с включениями, подобно общему случаю эмульсий, выражается формулой [13; 10, формула (2)]:

$$\tilde{\rho}(\omega) = \tilde{\rho}_1(\omega) + i\tilde{\rho}_2(\omega) = \rho \left( 1 + \zeta \epsilon \frac{U}{V} \right), \quad (3)$$

где  $\rho$  – плотность резины;  $\zeta = (\rho' - \rho)/\rho$ ,  $\rho'$  – плотность включения;  $U$  – комплексная амплитуда колебательной скорости включения. Для ячейки с жесткой оболочкой скорость  $V$  – это скорость оболочки. В общем случае  $V$  – заданная скорость резины на поверхности ячейки радиуса  $R_1$  в ее полюсах с координатами  $r = R_1$ ,  $\theta = 0$  и  $r = R_1$ ,  $\theta = \pi$ , где  $\theta$  – зенитный угол сферической системы координат.

Согласно (3)  $\tilde{\rho}$  определяется отношением колебательных скоростей фаз, зависящим от разности их плотностей. За счет разности скоростей происходят вязкие сдвиговые потери звуковой энергии в среде. Для одиночного сферического включения ( $\xi \ll 1$ ) отношение скоростей определяет известная формула Кенига (W. König, 1891 г.), в [10, формула (38)] представленная в виде:

$$\frac{U}{V} = \frac{1 - y + \frac{y^2}{3}}{1 - y + \frac{y^2(2\zeta + 3)}{9}}, \quad (4)$$

где применительно к данному случаю

$$y = \frac{i\kappa_t R}{\sqrt{1 - i\eta}}, \quad \kappa_t = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} = \frac{\omega}{c_t}, \quad (5)$$

где  $\kappa_t$  – волновое число сдвиговых волн в резине,  $c_t$  – скорость их распространения.

Если каждое включение можно считать независимым от других, например, при достаточно малой их концентрации  $\epsilon$ , либо при взаимном гашении исходящих от всех соседей сдвиговых волн в резине, то, подставив в (3) формулу Кенига (4), получим:

$$\tilde{\rho}(x) = \rho \left( 1 + \zeta \epsilon \frac{1 - y(x) + \frac{y(x)^2}{3}}{1 - y(x) + \frac{y(x)^2(2\zeta + 3)}{9}} \right), \quad (6)$$

где

$$x = \kappa_t R. \quad (7)$$

Это и есть упомянутая выше формула Г.Д. Малюжинца и И.А. Чабан. На ней основаны расчеты в работах [1, 2].

Для любой ячеечной модели дисперсной среды неизвестно, как задать граничное условие для тангенциальной скорости  $V_\theta$  на поверхности

ячейки. В работах [11–13] рассмотрены 4 известных варианта таких условий ( $n = 0, 1, 2, 3$ ). Все они установлены эвристическим путем и имеют лишь интуитивные “правдоподобные” обоснования. Но два условия – тонкая жесткая оболочка на поверхности ячейки ( $n = 0$ ) и условие Хаппеля ( $n = 2$ ), постулирующее отсутствие на ней касательных напряжений, – физически состоятельны в том смысле, что в принципе реализуемы. Однако, если условие Хаппеля на практике легко выполнимо (просто нужно обеспечить свободные поверхности ячеек), то снабжение множества сферических ячеек жесткими оболочками проблематично.

Любые расчетные кривые, относящиеся к ( $n = 1, 2, 3$ )-моделям, близки, причем кривые для модели  $n = 1$  всегда лежат между двумя другими.

Кривые для моделей с жесткой оболочкой ( $n = 0$ ) заметно отличны от остальных. В работе [10] при сравнении расчетов с известными экспериментальными наиболее приемлемой оказалась именно модель с жесткой оболочкой.

Отношение скоростей в  $n$ -ой модели для произвольных объемных концентраций включений (произвольных  $0 < \xi < 1$ ) представим в виде:

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{1 - iq_n}. \quad (8)$$

Функции  $q_n$  для разных граничных условий имеются в работах [10] (для  $n = 0$ ) и [11] (для всех  $n$ ). Здесь приведем используемые далее, при расчетах звукопоглощающих покрытий, формулы для условия Хаппеля ( $n = 2$ ) [11]:

$$q_2 = i \frac{2\zeta}{9} \xi^2 z^2 \left\{ -2z\xi + \left[ z \left( 1 - \frac{\xi}{2} + \frac{3}{2} \xi^2 \right) + \frac{z^3}{6} (1 - \xi^3) \right] \text{ch}[z(1 - \xi)] - \left[ 1 - \frac{3}{2} \xi + \frac{z^2}{2} (1 + \xi^2 - \xi^3) \right] \text{sh}[z(1 - \xi)] \right\} \times \\ \times \left\{ \left[ z(1 - \xi) + \frac{z^3}{6} (1 - 3\xi + 2\xi^2) + \frac{z^5}{18} \xi^2 \right] \text{ch}[z(1 - \xi)] - \left[ 1 + \frac{z^2}{6} (3 - 6\xi + 2\xi^2) - \frac{z^4}{6} \xi(1 - \xi) \right] \text{sh}[z(1 - \xi)] \right\}^{-1}, \quad (9)$$

где

$$z = \frac{y}{\xi} = \frac{ix}{\xi \sqrt{1 - i\eta}}.$$

Если в дробь точной формулы (9) вместо  $\text{sh}[z(1 - \xi)]$  и  $\text{ch}[z(1 - \xi)]$  подставить их разложения в ряды Тейлора, справедливые для любых значений аргументов, то окончательно как в числителе, так и в знаменателе дроби получим степенные ряды, начинающиеся с  $z^5$ . После сокращения числителя и знаменателя на  $z^5$  придем к альтернативной (тоже точной!) формуле:

$$q_2 = i \frac{2\zeta}{9} \xi^2 z^2 \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \phi'_{2m}(\xi) [z(1 - \xi)]^{2m}}{\sum_{m=0}^{\infty} \psi'_{2m}(\xi) [z(1 - \xi)]^{2m}}, \quad (10)$$

где

$$\phi'_{2m}(\xi) = \frac{(1 - \xi)^3}{(2m + 5)!} \times \\ \times \left\{ (1 - \xi) \left[ (m + 2) \left( 1 - \frac{\xi}{2} + \frac{3}{2} \xi^2 \right) + \xi \right] + \right. \\ \left. + \frac{(m + 2)(2m + 5)}{6} \times \right. \\ \left. \times \left[ (2m + 3\xi)(1 + \xi + \xi^2) - 3\xi^2 \right] \right\},$$

$$\psi'_{2m}(\xi) = \frac{(m + 2)}{(2m + 5)!} \left\{ (1 - \xi)^5 + \frac{2m + 5}{6} \times \right. \\ \times \left[ (2m + 3)(1 - 2\xi) - 3 + 6\xi - 2\xi^2 \right] (1 - \xi)^3 + \\ \left. + \frac{(m + 1)(2m + 3)(2m + 5)}{9} \times \right. \\ \left. \times \xi \left[ (2m + 1)\xi + 3(1 - \xi)^2 \right] \right\}.$$

Компьютерные расчеты по формулам (9) и (10) дают тождественные результаты в широком диапазоне аргументов при любых значениях  $\xi$ .

Приближенные выражения для каждого  $q_n$ , справедливые на низких частотах и в области первого резонанса, найдем, представив в соответствующих альтернативных формулах дробь в виде выражения, содержащего ряд только в знаменателе, и оставив в этом ряду лишь два первых слагаемых:

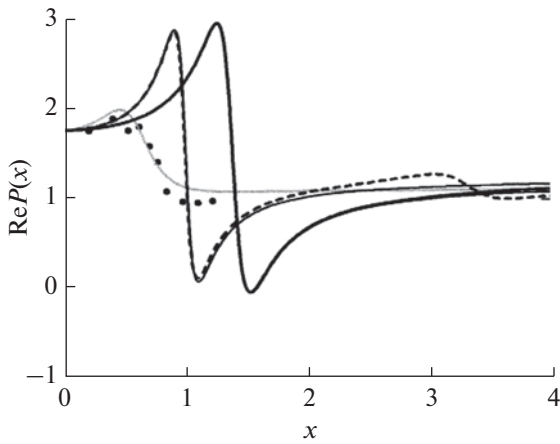
$$q_n \approx -i \frac{2\zeta}{9} x^2 \frac{\alpha_n(\xi)}{1 - \frac{(1 - \xi)^2 \beta_n(\xi)}{\xi^2} x^2 - i\eta}, \quad (11)$$

где

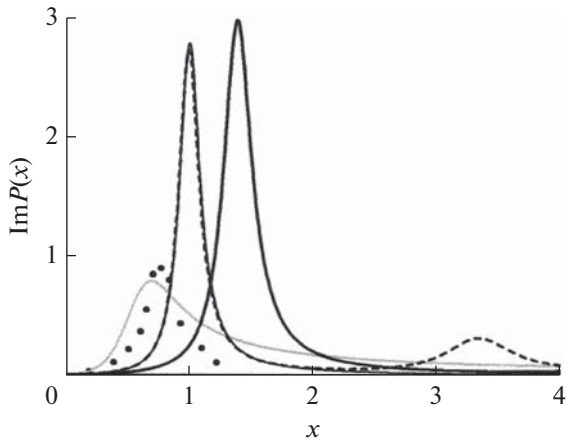
$$\alpha_n(\xi) = \frac{\phi'_{n0}(\xi)}{\psi'_{n0}(\xi)}, \quad \beta_n(\xi) = \frac{\psi'_{n1}(\xi)}{\psi'_{n0}(\xi)} - \frac{\phi'_{n1}(\xi)}{\phi'_{n0}(\xi)}.$$

Используя (3) и (8), найдем:

$$\tilde{\rho}_n(x) = \tilde{\rho}_{n1}(x) + i\tilde{\rho}_{n2}(x) = \rho \left( 1 + \frac{\zeta \varepsilon}{1 - iq_n(x)} \right). \quad (12)$$



**Рис. 1.** Вещественные части приведенной комплексной плотности композитной среды: ● – экспериментальные данные работы [4]; — — расчет по формуле (6); — — расчет для жесткой оболочки ( $n = 0$ ); --- – расчет по формулам (12), (9) (условие Хаппеля,  $n = 2$ ); — — приближения по формуле (13).



**Рис. 2.** Мнимые части приведенной комплексной плотности композитной среды. Обозначения такие же, как на рис. 1.

Подставляя в (12) для  $q_n(x)$  точные (типа (9)), альтернативные (как (10)), или приближенные (11) выражения, получим варианты представления  $\tilde{\rho}_n(x)$ . Так, в последнем случае найдем:

$$\tilde{\rho}_n(x) \approx \rho \left( 1 + \frac{\zeta \varepsilon \left[ 1 - \frac{(1-\xi)^2 \beta_n(\xi)}{\xi^2} x^2 - i\eta \right]}{1 - \left[ \frac{2\zeta}{9} \alpha_n(\xi) + \frac{(1-\xi)^2}{\xi^2} \beta_n(\xi) \right] x^2 - i\eta} \right). \quad (13)$$

На рис. 1 и 2 показаны экспериментальные и расчетные значения компонентов приведенной комплексной плотности  $P(x) = \tilde{\rho}(x)/\rho$  среды с па-

раметрами:  $\rho = 1.11 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho' = 11.3 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup> (свинец,  $z = 9.18$ );  $\varepsilon = 0.082$  ( $\xi = 0.4344$ );  $\eta = 0.2$ .

Из этих рисунков видно, что эксперимент неплохо описывается лишь формулой (6), предполагающей взаимонезависимость включений. (Аналогичный эффект имеет место и в резиноподобной среде с полостями, где тоже можно считать полости независимыми даже при заметных их концентрациях.) Точные же и приближенные расчетные кривые на рис. 1 и 2 не имеют с экспериментом ничего общего, видимо, потому, что в экспериментальном образце не сформирована ячеечная структура.

Из формулы (13) следуют резонансные значения  $x$  и резонансные частоты:

$$x_{nr}(\zeta, \xi) = (\kappa_t R)_{nr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\zeta}{9} \alpha_n(\xi) + \frac{(1-\xi)^2}{\xi^2} \beta_n(\xi)}}, \quad (14)$$

$$f_{nr} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} x_{nr}(\zeta, \xi). \quad (15)$$

Сама приближенная формула (13) справедлива для  $0 < x < (2...3)x_{nr}$ . Графики функций (14) для  $\zeta = 9.18$  (свинец) и  $\zeta = 6.094$  (железо) представлены на рис. 3. Эти функции пригодны для  $\xi > 0.3$ . Точкой показано резонансное значение  $x$  в выражении (6) для  $\zeta = 9.18$  при  $\eta \ll 1$ :  $x_r = 3/\sqrt{2\zeta + 3} = 0.6491$  (для  $\zeta = 6.094$ ,  $x_r = 0.7698$ ).

Сравнение (15) с собственной частотой  $f_0 = \frac{1}{\pi R} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  пустой полости в резине дает:

$$\frac{f_{nr}}{f_0} = \frac{x_{nr}(\zeta, \xi)}{2}.$$

Дополнительная жесткость, внесенная оболочкой, ожидаемо увеличивает резонансную частоту.

По формулам (12), (9) (для  $q_n(x)$ ) найдем высокочастотное приближение при  $x \gg x_{nr}(\zeta, \xi)$  (14) (но ограниченное требованием малости волнового размера ячейки):

$$\tilde{\rho}_{n1}(x) \approx \rho \frac{1 + \frac{2\zeta}{3} \left( 1 + \frac{\xi^3}{2} \right)}{1 + \frac{2\zeta}{3} (1 - \xi^3)} = \tilde{\rho}(\infty), \quad (16)$$

$$\tilde{\rho}_{n2}(x) \approx \rho \frac{\zeta^2 \xi^3 a_n(\xi) \sqrt{1 + \eta^2 + \eta}}{x \left[ 1 + \frac{2\zeta}{3} (1 - \xi^3) \right]^2}, \quad (17)$$

$$a_0(\xi) = 1 + \xi^4, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 1.$$

Выражение (16) справедливо и в общем случае эмульсий и суспензий [10, формула (30); 11, с. 36]

для любых граничных условий. Легко видеть, что  $\tilde{\rho}(\infty) < \tilde{\rho}(0) = \rho' \xi^3 + \rho(1 - \xi^3)$ , т.к. на высоких частотах массивное включение не полностью увлекается резиной.

### ЗАТУХАНИЕ ЗВУКА В КОМПОЗИТНОЙ СРЕДЕ

Комплексная скорость звука  $\tilde{c}$  в композитной среде и волновое число  $\tilde{k}$  плоской звуковой волны имеют вид [3, с. 28]:

$$\tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}\tilde{\rho}}}, \quad \tilde{k} = \frac{\omega}{\tilde{c}} = \omega\sqrt{\tilde{k}\tilde{\rho}}, \quad (18)$$

где

$$\tilde{k} = k' \xi^3 + k(1 - \xi^3), \quad (19)$$

$\tilde{k}$  – эффективная сжимаемость среды [3, с. 57], которую здесь следует считать вещественной величиной, т.к. тепловыми потерями пренебрегаем;  $k' = 1/\rho'c'^2$  – сжимаемость включения,  $c'$  – скорость звука в его материале;  $k = 1/\rho c^2$  – сжимаемость резины,  $c$  – скорость звука в ней. Учитывая (19) и (12), комплексное волновое число (18) представим в виде:

$$\tilde{k}_n = \tilde{k}_{n1} + i\tilde{k}_{n2} = \frac{\omega}{\tilde{c}_{nph}} + i\tilde{k}_{n2},$$

где  $\tilde{c}_{nph}(x) = \left[ \frac{\tilde{k}}{2} \left( \sqrt{\tilde{\rho}_{n1}(x)^2 + \tilde{\rho}_{n2}(x)^2} + \tilde{\rho}_{n1}(x) \right) \right]^{\frac{1}{2}}$  – фазовая скорость звука в среде;

$$\tilde{k}_{n1}(x) = x \left[ \frac{\tilde{k}\mu}{2\rho R^2} \left( \sqrt{\tilde{\rho}_{n1}(x)^2 + \tilde{\rho}_{n2}(x)^2} + \tilde{\rho}_{n1}(x) \right) \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (20)$$

$$\tilde{k}_{n2}(x) = x \left[ \frac{\tilde{k}\mu}{2\rho R^2} \left( \sqrt{\tilde{\rho}_{n1}(x)^2 + \tilde{\rho}_{n2}(x)^2} - \tilde{\rho}_{n1}(x) \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$\tilde{k}_{n2}(x)$  – амплитудный коэффициент поглощения звука в множителе  $e^{-\tilde{k}_{n2}l}$ , определяющем убывание амплитуды колебаний с расстоянием  $l$ .

На рис. 4 представлены графики зависимостей затухания звука  $A_n(x) = 8.686\tilde{k}_{n2}(x)$  (в дБ/м), рассчитанные по формуле (20) с учетом (5), (7), (12) для композитного материала с параметрами:  $\varepsilon = 0.082$ ;  $R = 2 \times 10^{-3}$  м;  $\mu = 10^6$  Па,  $\eta = 0.2$ ,  $\rho = 1.11 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $k = 3.52 \times 10^{-10}$  Па<sup>-1</sup>;  $\rho' = 11.3 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\zeta = 9.18$ ,  $k' = 2.36 \times 10^{-11}$  Па<sup>-1</sup> (свинец). Здесь примечательна высокочастотная независимость  $A_n(x)$  от аргумента. Среды с такой особенностью известны (см., например, [14, с. 374, 381; 3, с. 398; 10, формула (42)]).

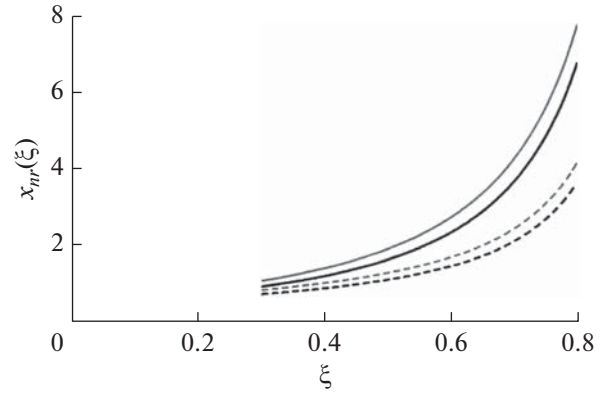


Рис. 3. Резонансные значения  $x_{nr}(\zeta, \xi)$  (14) для комплексных плотностей композитных сред: жесткая оболочка: —  $\zeta = 9.18$  (свинец), ---  $\zeta = 6.094$  (железо); условие Хаппеля: -.-.-  $\zeta = 9.18$ , .....  $\zeta = 6.094$ .

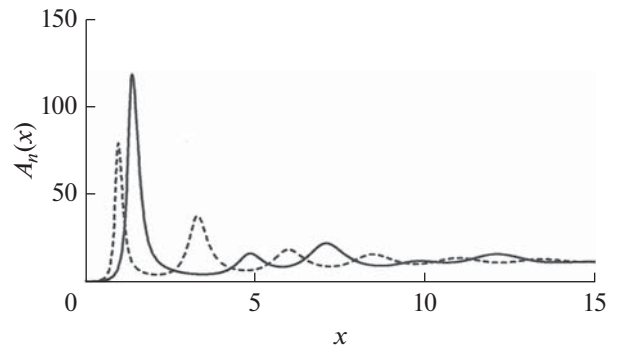


Рис. 4. Зависимости затухания звука (в дБ/м) в композитной среде со свинцовыми включениями: — жесткая оболочка, --- условие Хаппеля.

Асимптотические выражения для амплитудных коэффициентов поглощения найдем с помощью формул (20), (16), (17):

$$\tilde{k}_{n2}(\infty) = \frac{\sqrt{\tilde{k}\mu}\zeta^2\xi^3 a_n(\xi) \sqrt{1 + \eta^2 + \eta}}{2R \sqrt{1 + \frac{2\zeta}{3} \left( 1 + \frac{\xi^3}{2} \right) \left[ 1 + \frac{2\zeta}{3} (1 - \xi^3) \right]^{\frac{3}{2}}}}.$$

Волновое сопротивление  $\tilde{S}(x) = \tilde{\rho}(x)\tilde{c}(x)$  композитной среды согласно (18) равно:

$$\tilde{S}(x) = \sqrt{\frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{k}}}. \quad (21)$$

При нормальном падении звука из воды на граничащую с ней композитную среду коэффициент отражения звука определяет формула Френеля [3, с. 132]:

$$\tilde{r}(x) = \frac{\tilde{S}(x) - \rho_0 c_0}{\tilde{S}(x) + \rho_0 c_0} = \frac{\sqrt{\frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{k}}} - \rho_0 c_0}{\sqrt{\frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{k}}} + \rho_0 c_0}, \quad (22)$$

где  $\rho_0 c_0 = 1.5 \times 10^6$  кг/м<sup>2</sup>с – волновое сопротивление воды. Используя (16), по (21) найдем предельное значение  $\tilde{S}(x)$  при  $x \gg x_{nr}(\zeta, \xi)$ :

$$\tilde{S}(\infty) \approx \sqrt{\frac{\rho \left( 1 + \frac{2\zeta}{3} \left( 1 + \frac{\xi^3}{2} \right) \right)}{\tilde{k} \left( 1 + \frac{2\zeta}{3} (1 - \xi^3) \right)}}.$$

Как и (16), оно справедливо для любых граничных условий на поверхности ячейки.

Если на стенку с импедансом  $Z_0$  нанесен плоскопараллельный слой композитного материала толщиной  $h$ , то согласно [3, с. 156] входной импеданс слоя

$$\tilde{Z}(x) = i\tilde{S}(x) \frac{Z_0 - i\tilde{S}(x) \operatorname{tg}(\tilde{k}(x)h)}{Z_0 \operatorname{tg}(\tilde{k}(x)h) + i\tilde{S}(x)}. \quad (23)$$

### ЗВУКОПОГЛОЩАЮЩЕЕ ПОКРЫТИЕ

Плотность резины несколько больше, а сжимаемость – меньше, чем у воды. Твердые массивные включения только усиливают эти различия. Поэтому для хорошего согласования волновых сопротивлений композитной среды и воды необходимо использовать в покрытии жидкость с плотностью  $\rho_l$  меньшей, а сжимаемостью  $k_l$  – большей, чем у воды.

Рассмотрим ячеичную модель “суспензии”, в которой каждое сферическое включение покрыто шаровым слоем резины. Такое включение с резиной назовем “вкладышем”. Таким образом, в получившейся суспензии вкладыши замещают включения исходной суспензии, и плотность ее включений  $\rho'$  надо теперь заменить комплексной плотностью  $\tilde{\rho}$  вкладышей. Последняя может быть вычислена точно, если резиновую поверхность вкладыша можно считать свободной от касательных напряжений, т.е. при выполнении условия Хаппеля ( $n = 2$ ). Для этого вязкость вмещающей жидкости  $\eta_l$  должна быть достаточно малой:  $\eta_l \ll \omega R \rho_l / 9$ .

Жидкости, удовлетворяющие перечисленным требованиям, существуют – это силиконовые масла. Особенно подходят для наших целей полиметилсилоксановые жидкости (ПМС). Они безвредны для резин, а их свойства мало зависят от температуры. Остановимся на ПМС-0.65 с плотностью  $\rho_l = 0.818 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, сжимаемостью  $k_l = 14.74 \times 10^{-10}$  Па<sup>-1</sup> (в 3.3 раза большей, чем у воды!), вязкостью – меньшей, чем у воды.

Объемная концентрация вкладышей в суспензии  $\bar{\epsilon} = R_1^3 / R_0^3$ , где  $R_0$  – внешний радиус ячейки. Благодаря малой вязкости вмещающей жидкости

эффективная комплексная плотность  $\bar{\rho}(x)$  суспензии принимает вид, аналогичный высокочастотному приближению (16):

$$\frac{\bar{\rho}(x)}{\rho_l} = \frac{1 + \frac{2\tilde{\rho}_2(x) - \rho_l}{3} \left( 1 + \frac{\bar{\epsilon}}{2} \right)}{1 + \frac{2\tilde{\rho}_2(x) - \rho_l}{3} (1 - \bar{\epsilon})}, \quad (24)$$

где  $\tilde{\rho}_2(x)$  – комплексная плотность вкладыша по (12) для условия Хаппеля. В предельных случаях отсюда следуют правильные соотношения:  $\bar{\rho}(x) \rightarrow \tilde{\rho}_2(x)$  при  $\bar{\epsilon} \rightarrow 1$ ,  $\bar{\rho}(x) \rightarrow \rho_l$  при  $\bar{\epsilon} \rightarrow 0$ . Вещественную сжимаемость  $\bar{k}$  среды представляет ее статическое значение:

$$\bar{k} = \tilde{k}\bar{\epsilon} + k_l(1 - \bar{\epsilon}), \quad (25)$$

где  $\tilde{k}$  – сжимаемость вкладыша (19). Соответственно этому для такой среды комплексная скорость звука  $\bar{c}$  и волновое число  $\bar{k}$  плоской звуковой волны примут аналогичную (18) форму:

$$\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{\bar{k}\bar{\rho}}}, \quad \bar{k} = \frac{\omega}{\bar{c}} = \omega \sqrt{\bar{k}\bar{\rho}}.$$

Рассчитаем характеристики пятислойных звукопоглощающих покрытий, состоящих из наборов вкладышей разных размеров, размещенных в жидкости ПМС-0.65. Включения в них имеют радиусы, убывающие по геометрической прогрессии со знаменателем 0.5:  $R, R/2, R/4, R/8, R/16$ . Для коэффициентов сдвиговых потерь всех применяемых резин возьмем значение, оптимальное для принятого знаменателя прогрессии 0.5:  $\eta = 1$ . Все вкладыши в данном покрытии считаем геометрически подобными, т.е. для них параметр  $\xi$  – один и тот же. Разместим одинаковые вкладыши по примыкающим друг к другу слоям, толщины которых пропорциональны размерам вкладышей, т.е. убывают (в направлении от защищаемой стенки к воде) по такой же геометрической прогрессии:  $h_1 = h; h_2 = h/2; h_3 = h/4; h_4 = h/8; h_5 = h/16$ . Толщина такого пятислойного покрытия составит  $H = 1.9375h$ . Объемную концентрацию  $\bar{\epsilon}$  вкладышей примем одинаковой во всех слоях.

Подставив (12) в (24), получим:

$$\frac{\bar{\rho}(f)}{\rho_l} = \frac{1 + \frac{2}{3} \left[ \frac{\rho}{\rho_l} \left( 1 + \frac{\zeta \xi^3}{1 - iq_2(f)} \right) - 1 \right] \left( 1 + \frac{\bar{\epsilon}}{2} \right)}{1 + \frac{2}{3} \left[ \frac{\rho}{\rho_l} \left( 1 + \frac{\zeta \xi^3}{1 - iq_2(f)} \right) - 1 \right] (1 - \bar{\epsilon})},$$

где  $f$  – частота звука в кГц. По (25) и (19) имеем:

$$\bar{k} = \bar{\epsilon} \left[ k' \xi^3 + k(1 - \xi^3) \right] + (1 - \bar{\epsilon})k_l.$$

Для  $m$ -го слоя волновое число и волновое сопротивление, соответственно, равны:

$$\bar{\kappa}_m(f) = 2\pi \times 10^3 f \sqrt{k \bar{\rho}(f 2^{-m+1})},$$

$$\bar{S}_m(f) = \sqrt{\frac{\bar{\rho}(f 2^{-m+1})}{k}}.$$

Применив выражение (23) для импеданса нагруженного слоя, найдем:

$$\bar{Z}_m = i\bar{S}_m \frac{\bar{Z}_{m-1} - i\bar{S}_m \operatorname{tg}(\bar{\kappa}_m h_m)}{\bar{Z}_{m-1} \operatorname{tg}(\bar{\kappa}_m h_m) + i\bar{S}_m},$$

где  $\bar{Z}_m$  – импеданс на входе  $m$ -го слоя. Приняв для определенности защищаемую стенку абсолютно жесткой с импедансом  $Z_0 = \infty$ , получим:

$$\bar{Z}_1 = \frac{i\bar{S}_1}{\operatorname{tg}(\bar{\kappa}_1 h_1)}.$$

Для каждого варианта пятислойного покрытия на жесткой стенке будут вычислены [3, с. 144, формула (45.4)]: коэффициент отражения

$$r_5(f) = \frac{|\bar{Z}_5(f) - 1.5 \times 10^6|}{|\bar{Z}_5(f) + 1.5 \times 10^6|} \quad (26)$$

и подобный (22) коэффициент отражения от композитной среды, частью которой является самый тонкий, пятый слой покрытия, примыкающий к лицевой плоскости

$$r_s(f) = \frac{|\bar{S}_5(f) - 1.5 \times 10^6|}{|\bar{S}_5(f) + 1.5 \times 10^6|}. \quad (27)$$

Нижнюю частоту  $f_{\min}$  рабочего диапазона покрытия определим условием  $r_5(f_{\min}) = 0.2$ . Верхняя частота  $f_{\max}$  выбрана из условия

$$\frac{\bar{\kappa}_5(f_{\max})R_5}{\xi \bar{\epsilon}^{1/3}} = \frac{\pi}{4},$$

когда ячейки в наружном слое еще можно считать малыми по сравнению с длиной звуковой волны в этом слое, т.е. частота  $f_{\max}$  – это верхняя граница применимости теории, но не истинного рабочего диапазона.

Плотность  $\rho$  и сжимаемость  $k$  применяемых резин будем считать такими же, как на рис. 4. В первых двух вариантах (рис. 5, 6) включения железные:  $\rho' = 7.87 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\zeta = 6.094$ ,  $k' = 0.584 \times 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$ . Для улучшения характеристик поглощения вблизи  $f_{\min}$  толщина  $h_1$  первого слоя увеличена. В каждом случае находим относительную толщину покрытия  $L = H/\lambda(f_{\min})$ , где  $\lambda(f_{\min})$  – длина звуковой волны в воде на частоте  $f_{\min}$ , а также объемную концентрацию включений  $\xi^3 \bar{\epsilon}$ .

При заданных параметрах включений, резины, жидкости и выбранном значении  $\bar{\epsilon}$  из уравнения  $\bar{S}_1(0) = 1.5 \times 10^6$  найдем требуемое значение  $\xi$ .

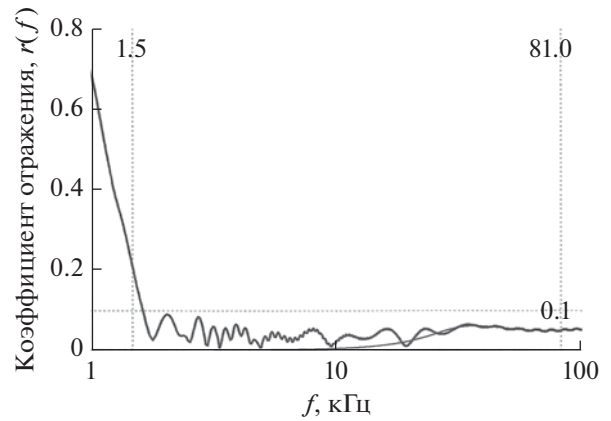


Рис. 5. Характеристики слоистого звукопоглощающего покрытия при плотнейшей упаковке вкладышей с железными включениями: — —  $r_5(f)$ , — —  $r_s(f)$ .

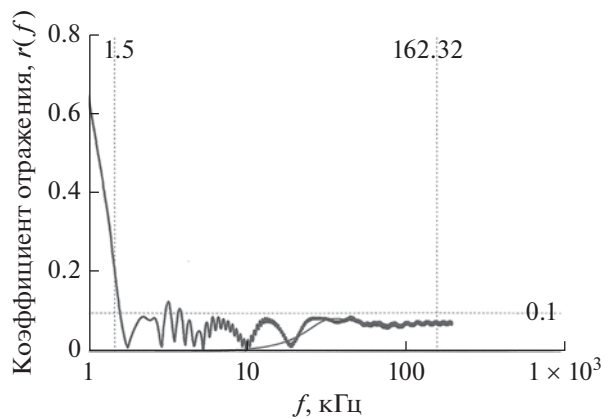


Рис. 6. То же, что на рис. 5, но для  $\bar{\epsilon} = 0.62$  и другого набора параметров.

Положим  $\bar{\epsilon} = 0.74$ , тогда  $\xi = 0.4556$ . Такой выбор упрощает размещение вкладышей в пространстве: они будут просто лежать друг на друге, образуя плотнейшую упаковку. В двенадцати точках соприкосновения каждого вкладыша с соседями взаимодействие между ними будет исключено смазкой маловязкой внешней жидкостью, обеспечивающей выполнение условия Хаппеля и в этих точках.

Пример такого покрытия показан на рис. 5, где  $\mu = 10^7 \text{ Па}$ ;  $R = 12.08 \text{ мм}$ ;  $h = 0.998 \text{ м}$ ;  $H = 2.133 \text{ м}$ ;  $L = 2.133$ ;  $\xi^3 \bar{\epsilon} = 0.07$ ;  $h_1 = 1.2h$ ;  $f_{\min} = 1.5 \text{ кГц}$ ;  $f_{\max} = 81.0 \text{ кГц}$ ; ширина полосы поглощения  $\Delta f_{0.2} = 5.75$  октавы. Тонкая кривая представляет величину (27). Видим, что на частотах в диапазоне 30–81 кГц кривые коэффициентов отражения (26) и (27) сливаются. Это означает, что тонкий

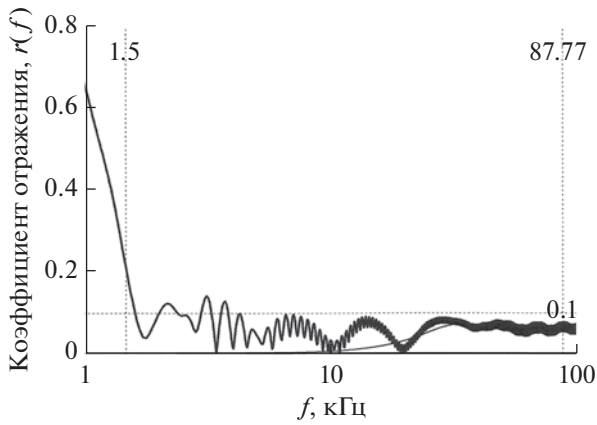


Рис. 7. Характеристики покрытия с плотнейшей упаковкой вкладышей со свинцовыми включениями.

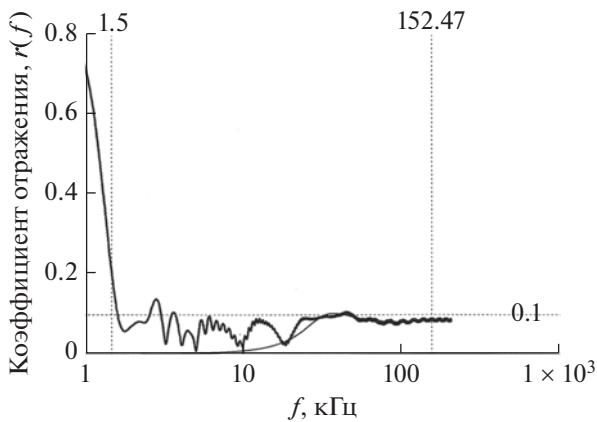


Рис. 8. То же, что на рис. 7, но для  $\bar{\epsilon} = 0.58$  и другого набора параметров.

наружный слой  $h_5$  покрытия для такого высокочастотного звука является как бы полубесконечным. Если параметры  $R$  и  $H$  уменьшить в 2 раза, то  $f_{\min}$  и  $f_{\max}$  в 2 раза увеличатся, т.е. весь график рис. 5 сместится вправо на одну октаву, а  $\Delta f_{0.2}$  и  $L$  не изменятся. Недостаток покрытия – большое значение  $L$ , обусловленное большим относительным содержанием в нем малосжимаемой резины.

На рис. 6 показано то же, что и на рис. 5, но для набора параметров:  $\mu = 10^6$  Па;  $\bar{\epsilon} = 0.62$ ,  $\xi = 0.65$ ;  $R = 7.3$  мм;  $h = 0.474$  м;  $H = 1.204$  м;  $L = 1.204$ ;  $\xi^3 \bar{\epsilon} = 0.17$ ;  $h_1 = 1.6h$ ;  $f_{\min} = 1.5$  кГц;  $f_{\max} = 162.32$  кГц;  $\Delta f_{0.2} = 6.75$  октавы. По сравнению с рис. 5 здесь  $L$  в 1.77 раза меньше, а  $\Delta f_{0.2}$  на октаву больше.

Следующие два рисунка относятся к покрытиям со свинцовыми включениями:  $\rho' = 11.3 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,

$\zeta = 9.18$ ,  $k' = 2.36 \times 10^{-11}$  Па<sup>-1</sup>. На рис. 7 –  $\mu = 10^7$  Па;  $\bar{\epsilon} = 0.74$ ,  $\xi = 0.4047$ ;  $R = 10$  мм;  $h = 0.525$  м;  $H = 1.385$  м;  $L = 1.385$ ;  $\xi^3 \bar{\epsilon} = 0.049$ ;  $h_1 = 1.7h$ ;  $f_{\min} = 1.5$  кГц;  $f_{\max} = 87.77$  кГц; ширина полосы поглощения  $\Delta f_{0.2} = 5.87$  октавы. По сравнению с рис. 5 здесь  $L$  в 1.54 раза меньше, а  $\Delta f_{0.2}$  несколько шире.

На рис. 8 –  $\mu = 10^6$  Па;  $\bar{\epsilon} = 0.58$ ,  $\xi = 0.67$ ;  $R = 7.56$  мм;  $h = 0.478$  м;  $H = 0.927$  м;  $L = 0.927$ ;  $\xi^3 \bar{\epsilon} = 0.174$ ;  $h_1 = h$ ;  $f_{\min} = 1.5$  кГц;  $f_{\max} = 152.47$  кГц;  $\Delta f_{0.2} = 6.66$  октавы.

Значения  $\bar{\epsilon}$  на рис. 6 и 8 входят в диапазон концентраций, характерных для случайных упаковок шаров.

В расчетах рис. 5–8 было принято:  $\eta = 1$ . На практике это не реализуемо: коэффициент сдвиговых потерь резины  $\eta(\omega)$ , как правило, растет с частотой. Такое изменение  $\eta(\omega)$  можно учесть, используя либо более дробный спектр размеров включений и вкладышей в слоях покрытия, либо увеличивая число его более тонких однородных слоев.

Модуль сдвига резины  $\mu(\omega)$  тоже, обычно, растет с частотой. Это можно учесть надлежащим выбором размеров включений в слоях. Величина же модуля сдвига может быть практически любой. Жесткую резину ( $\mu \sim 10^8$  Па) можно заменить, например, полистиролом, или строительным битумом.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе ячеечной модели суспензий путем замены в ней динамической вязкости вмещающей жидкости на величину  $i\mu^*(\omega)/\omega$  предложена теория вязкоупругой среды с твердыми сферическими включениями. Она применима при четырех известных граничных условиях на поверхности ячеек и справедлива для любых концентраций включений в широком диапазоне частот, ограниченном только требованием малости волновых размеров ячеек. Для комплексной плотности такой композитной среды найдены также приближенные формулы, справедливые в широкой области частот вблизи резонанса включений. В частотной области выше резонанса обнаружена независимость амплитудного коэффициента поглощения звука в среде от частоты.

Предложен новый тип звукопоглощающей композитной среды, состоящей из покрытых резиной массивных шариков, помещенных в маловязкую, легкую и сжимаемую полиметилсилоксановую жидкость. Даны примеры расчетов нескольких вариантов широкополосных гидроакустических звукопоглощающих покрытий.



Расчетные формулы представляются вполне надежными, поскольку параметры  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{k}$  вкладышей со свободной поверхностью вычислены точно. Обилие в формулах варьируемых параметров дает возможность более тщательного, чем в приведенных примерах, конструирования покрытия с целью расширения полосы поглощения звука, особенно в сторону низких частот, увеличения степени поглощения звука и уменьшения толщины покрытия. Взаимонезависимость вкладышей, разделенных почти идеальной жидкостью, обеспечивает дополнительные возможности и упрощения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Викторова Р.Н., Тютекин В.В.* Физические основы создания звукопоглощающих материалов с использованием среды с комплексной плотностью // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 3. С. 331–336.
2. *Крынкин С.В., Тютекин В.В.* Оптимизация характеристик звукопоглощающих материалов на основе резиноподобных сред с тяжелыми включениями // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 4. С. 523–532.
3. *Исакович М.А.* Общая акустика. Учебное пособие. М.: Наука, 1973. 495 с.
4. *Вовк А.Е., Викторова Р.Н.* О возможности приближенного расчета эффективной плотности упругой среды с твердыми включениями // Труды Акуст. инст. 1971. Т. 10.
5. *Чабан И.А.* Расчет эффективных параметров микронеоднородных сред методом самосогласованного поля // Акуст. журн. 1965. Т. 11. № 1. С. 102–109.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. 4-е изд., испр. и дополн. М.: Наука, 1987. 248 с.
7. *Гинзбург В.Л.* Об общей связи между поглощением и дисперсией звуковых волн // Акуст. журн. 1955. Т. 1. № 1. С. 31–39.
8. *Нуссенцевейг Х.М.* Причинность и дисперсионные соотношения / Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 461 с.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть 1. 3-е изд., дополн. М.: Наука, 1976. 583 с.
10. *Казаков Л.И.* О распространении звука в дисперсных средах // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 3. С. 330–341.
11. *Казаков Л.И.* Ячеечные модели суспензий сферических частиц при разных граничных условиях // NOISE Theory and Practice. 2019. Т. 5. № 4. С. 27–40.
12. *Казаков Л.И.* Ячеечные модели суспензий цилиндрических частиц при разных граничных условиях // NOISE Theory and Practice. 2019. Т. 5. № 2. С. 39–48.
13. *Казаков Л.И.* Динамика капель в электрокапиллярных акустических преобразователях. Дисс. ... к.ф.-м.н. Владивосток, 1985. 114 с.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ГИТТЛ, 1954. 795 с.