

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРИЕМНЫХ АНТЕНН ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ РЕФРАКЦИИ НИЗКОЧАСТОТНОГО ЗВУКА В МЕЛКОМ МОРЕ С СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫМ ВОДОПОДОБНЫМ ДНОМ

© 2022 г. А. А. Луньков^{a, b, *}, В. Г. Петников^{a, **}, Д. Д. Сидоров^{a, b, ***}

^aИнститут общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

^bМосковский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманская 5, Москва, 105005 Россия

*e-mail: lunkov@kapella.gpi.ru

**e-mail: petniko@kapella.gpi.ru

***e-mail: sidorov.dan.dmit@gmail.com

Поступила в редакцию 02.03.2022 г.

После доработки 22.03.2022 г.

Принята к публикации 30.03.2022 г.

В рамках численного моделирования исследованы особенности формирования низкочастотного (55 и 137 Гц) акустического поля и его регистрации с помощью линейных горизонтальных и вертикальных антенн в мелководном волноводе глубиной ≈ 30 м с неоднородным дном. Рассматривается область, где скорость звука в дне близка к скорости звука в воде. Для проведения расчетов использовано пространственное распределение скорости звука в дне Карского моря, полученное при инженерной сейсморазведке, а также данные пробного бурения. Продемонстрировано, что неоднородное дно не только влияет на средние по глубине потери при распространении звука, которые можно зарегистрировать вертикальной антенной, но и приводит к горизонтальной рефракции акустических волн, которая проявляется при сканировании диаграммы направленности протяженной горизонтальной антенны. Максимальные эффекты наблюдаются для низкой частоты (55 Гц): снижение потерь при распространении достигает 5 дБ, а смещение максимума отклика антенны – 3.4° .

Ключевые слова: акустика мелкого моря, распространение звука на арктическом шельфе, акустика морских осадков

DOI: 10.31857/S0320791922040074

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что различные неоднородности в мелком море существенным образом влияют на дальнейшее распространение низкочастотного звука [1]. К таким неоднородностям, в частности, относятся: неровности рельефа дна [2, 3], цуги интенсивных внутренних волн [4], температурные фронты [5]. В случае, когда неоднородности приводят к изменениям параметров акустического волновода в поперечном относительно трассы направлении распространения звука, они вызывают горизонтальную рефракцию акустических волн. Рефракция проявляется в виде искривления звуковых лучей (и соответственно фазового фронта волны) в горизонтальной плоскости, а также она приводит к изменениям потерь при распространении. В зависимости от физической природы неоднородностей рефракция отличает-

ся как по величине угла отклонения лучей, так и по своим проявлениям в пространственном распределении амплитуды звукового поля [2–5]. Так, например, за счет горизонтальной рефракции возможна фокусировка или дефокусировка звука в горизонтальной плоскости [4].

В то же время в мелководном волноводе существует еще один вид неоднородностей, который отличается по своей физической природе от неоднородностей, указанных выше. Это неоднородность верхнего слоя донных осадочных пород [6], которая также может приводить к горизонтальной рефракции [7]. По-видимому, впервые на это было обращено внимание в статье [8]. Однако в этой работе одновременно рассматривались две причины, приводящие к рефракции. Это неровности рельефа и неоднородности осадочных пород. Показано, что первая причина для исследованного мелководного района (Атлантиче-

ский шельф США) является определяющей для горизонтальной рефракции. Уточним, что это связано не только с топографией морского дна в месте проведения экспериментальных исследований [8], но и с тем, что скорость звука в дне в районе работ в среднем заметно превышала скорость звука в водном слое. Соответственно звуковое поле при дальнем распространении на Атлантическом шельфе в основном сосредоточено в придонном акустическом волноводе и слабо проникает в толщу донных осадочных пород. Однако так бывает не всегда. В частности, на Арктическом шельфе России, например, в Карском море [6], существуют районы с постоянной глубиной и сильно неоднородной донной структурой. В этих районах донные осадки часто не консолидированы и скорость звука в них близка к скорости звука в воде (водоподобное дно).

Целью настоящей работы является изучение в рамках численного моделирования возможности наблюдения горизонтальной рефракции, обусловленной неоднородной структурой донных осадков при водоподобном дне. Предполагается, что для указанной структуры характерен достаточно большой горизонтальный градиент поля скорости звука в дне, в среднем направленный перпендикулярно направлению трассы распространения звука в водном слое. При этом основное внимание уделяется оценкам возможностей регистрации в эксперименте возмущений звукового поля, связанных с рефракцией, при помощи линейных горизонтальных и вертикальных приемных антенн.

2. АКУСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЛКОВОДНОГО ВОЛНОВОДА С НЕОДНОРОДНЫМ ДНОМ

Для анализа звукового поля с учетом горизонтальной рефракции использовались методика и параметры численного моделирования, представленные нами ранее [7]. В качестве исходных данных для моделирования брались результаты измерений поля скорости звука $c_b(X, Y, Z)$ в дне Карского моря, полученные при инженерной сейсморазведке (см. рис. 1а). Здесь (X, Y, Z) – декартова система координат с осью Z , направленной вниз. Для анализа выбиралась область акватории, которая соответствует водоподобному дну. Она обведена штриховым овалом на рис. 1а и показана отдельно на рис. 1б. Для этой области введена локальная система координат (x, y, z) . Начало координат находится на плоскости поверхности моря. В отличие от работы [7], в настоящем исследовании при моделировании звукового поля мы выбирали разные местоположения источника звука, и в том числе местоположение, отмеченное пятиконечной звездой на рис. 1б. Как

показали расчеты, именно для этого положения горизонтальная рефракция при дальнем распространении звука проявляется в наибольшей степени. При моделировании выбирались следующие параметры акустического волновода. Глубина волновода считалась постоянной и равной $H = 32$ м. Скорость звука в воде предполагалась постоянной и равной $c = 1460$ м/с. Дно считалось водоподобной средой с неоднородной структурой поля скорости звука. Сдвиговые волны не учитывались. Плотность осадочных пород полагалась неизменной и равной $\rho_1 = 1.85$ г/см³, что соответствовало измерениям плотности при малоглубинном бурении. Коэффициент затухания звука в дне выбирался равным $\beta_{1f} = 1.07 \times 10^{-4} f^{1.6}$ [дБ/км/Гц]. Для моделирования использовалось модовое описание звукового поля, а для учета рефракции – модовое параболическое уравнение [9]. Частота тональных акустических сигналов предполагалась равной $f = 55$ и 137 Гц.

Основными результатами моделирования являлись средние по толщине водного слоя потери при распространении $TL(x, y)$:

$$TL(x, y) = -10 \lg \frac{\int_0^H |P(x, y, z)|^2 dz}{\int_0^H |P(x_1, y_1, z)|^2 dz}, \quad (1)$$

которые вычислялись, начиная с расстояния от источника $r_0 = 3H$ ($r_0 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$). Здесь $P(x, y, z)$ – комплексная амплитуда звукового поля в декартовой системе координат, показанной на рис. 1б. При модовом описании эта амплитуда представлялась в виде

$$P(x, y, z) = \sum_{m=1}^M A_m(x, y) \psi_m(x, y, z), \quad (2)$$

где $A_m(x, y)$ – комплексная амплитуда моды, $\psi_m(x, y, z)$ – профиль моды с номером m . Для вычисления величины $A_m(x, y)$ использовалось так называемое модовое параболическое уравнение [9]. Методика решения такого типа уравнений подробно изложена в работе [10]. Потери при распространении для отдельных мод определялись следующим приближенным соотношением:

$$TL_m(x, y) \approx -20 \lg \frac{|A_m(x, y)|}{|A_m(x_1, y_1)|}. \quad (3)$$

Помимо указанных величин также вычислялись разности потерь при распространении без учета и с учетом горизонтальной рефракции $\Delta TL = TL|_{N \times 2D} - TL|_{3D}$ и $\Delta TL_m = TL_m|_{N \times 2D} - TL_m|_{3D}$

для полного поля и отдельных мод, соответственно.

3. О ВОЗМОЖНОСТИ НАБЛЮДЕНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ РЕФРАКЦИИ

Горизонтальная рефракция проявляется в виде:

1. Отклонения от прямолинейного распространения акустических волн.

2. Изменения потерь при распространении, наблюдаемых как для звукового поля в целом ΔTL , так и для отдельных мод ΔTL_m .

Однако наблюдение или учет указанных эффектов в натурном эксперименте сопряжен с определенными трудностями. Численные эксперименты показали, что угол рефракции в исследуемом районе зависит от местоположения излучателя и приемной антенны и составляет единицы градусов. Для регистрации угла прихода рефрагированного луча необходимо использовать фазированную горизонтальную линейную антенну достаточно большой длины, обеспечивающую угловое разрешение, сравнимое с углом рефракции. Отклик такой антенны $S(\varphi)$ на тональный сигнал определялся следующим выражением:

$$S(\varphi) = \left| \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q P_q W_q \exp(j\xi_1 d (q - \hat{q}) \sin \varphi) \right|, \quad (4)$$

где φ – угол компенсации антенны (отсчитывается от нормали к антенне), Q – количество гидрофонов в линейной антенне (для частоты источника звука 137 Гц – $Q = 201$ и для 55 Гц – $Q = 77$), P_q – амплитуда звукового поля в волноводе на гидрофоне с номером q , W_q – чувствительность гидрофона, определяемая выбранным окном аподизации, d – расстояние между гидрофонами (для частоты источника звука 137 Гц – $d = 5.0$ м и для 55 Гц – $d = 13.0$ м), ξ_1 – действительная часть собственного значения первой моды в точке расположения центрального гидрофона антенны, \hat{q} – номер центрального гидрофона. При расчетах для подавления боковых лепестков применялось окно Хемминга вида:

$$W_q = 0.53836 - 0.46164 \cos\left(\frac{2\pi(q-1)}{Q-1}\right). \quad (5)$$

На рис. 2 показан нормированный отклик линейной антенны длиной $L \approx 1$ км, расположенной на глубине 32 м, в зависимости от угла компенсации φ , получаемый при учете горизонтальной рефракции и без такого учета (однородное дно) для частоты сигнала 55 Гц (рис. 2а) и 137 Гц (рис. 2б). (Параметры однородного дна соответствовали значениям в месте расположения источника звука.) На рис. 2а хорошо видно изменение угла

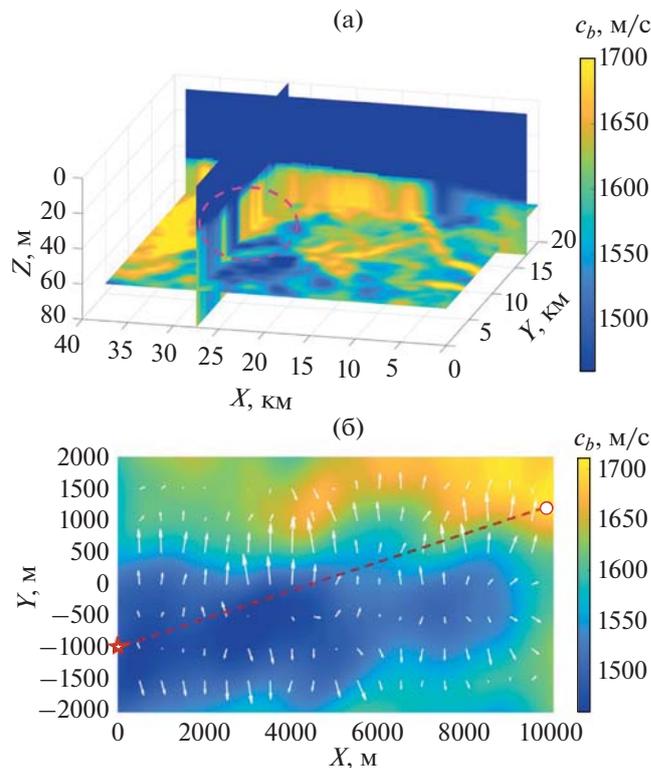


Рис. 1. (а) – Поле скорости звука в одном из районов Карского моря. Штриховой линией (эллипс) отмечен район, выбранный для моделирования; (б) – горизонтальный разрез поля скорости звука в этом районе на глубине $z = 41$ м. Белыми векторами обозначено распределение $\mathbf{g}(x, y; z)$. Пятиконечной звездой отмечено положение источника звука в численном эксперименте, кружок соответствует положению центра линейной горизонтальной приемной антенны. Антенна ориентирована параллельно оси y . Пунктирной линией показана акустическая трасса между источником и центром антенны.

компенсации на $\Delta\varphi = 3.4^\circ$ при учете рефракции. Такое изменение имеет место при положении источника звука и центра приемной антенны, показанном на рис. 1б. Отметим, что при других взаимных расположениях источника звука и приемной антенны эффект рефракции проявляется в меньшей степени (см. табл. 1). Здесь же следует отметить, что угловая ширина отклика антенны на рис. 2 заметно превышает известное оценочное значение $\Delta\Theta \approx \lambda/L$, где λ – длина акустической волны ($\Delta\Theta \approx 0.6^\circ$ для $f = 137$ Гц и $\Delta\Theta \approx 1.5^\circ$ для $f = 55$ Гц). Расчеты показали, что это превышение связано как с искривлением фазового фронта падающей на антенну звуковой волны при расстоянии ≈ 10 км между излучателем и приемной антенной, так и с аподизацией.

Для частоты сигнала 137 Гц угол рефракции $\Delta\varphi$ уменьшается. Это обусловлено тем, что звуковое поле, отвечающее волноводной моде с заданным

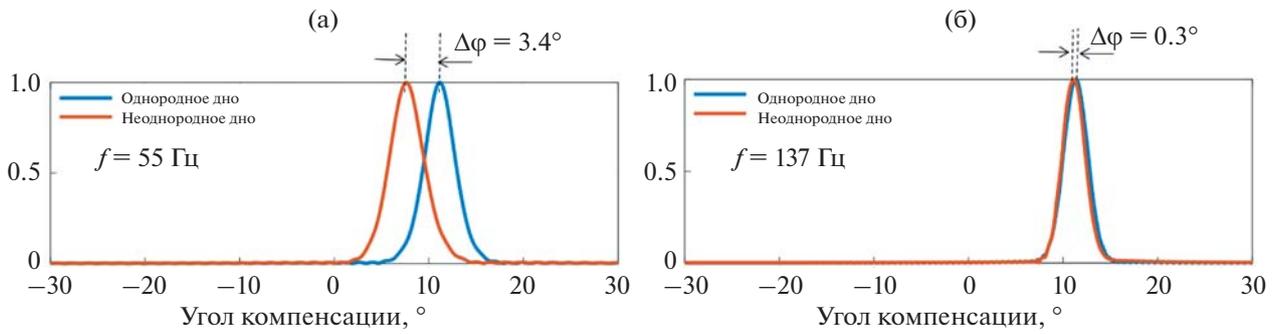


Рис. 2. Отклик горизонтальной антенны на частоте (а) – 55 Гц и (б) – 137 Гц. Красная линия – неоднородное дно с учетом эффекта рефракции. Синяя линия – однородное дно.

номером, с ростом частоты все меньше и меньше проникает в морское дно. Это хорошо видно на рис. 3, где показаны вертикальные профили первой моды (реальная часть) в точке расположения источника звука (рис. 3а) и центра приемной антенны (рис. 3б). Заметим, что глубина проникновения в дно зависит от скорости звука в морских осадках. На рис. 4 показаны вертикальные профили скорости звука для тех же точек.

Таким образом, для заметной горизонтальной рефракции, обусловленной неоднородностями дна, необходимо соответствующее сочетание трех факторов:

1. Наличие выделенного направления для вектора $\mathbf{g}(x, y; z) = \nabla_{\perp} c_b(x, y; z)$, составляющего угол, близкий к 90° к волновому вектору акустических волн \mathbf{k} ; $\nabla_{\perp} = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$.
2. Достаточно большое значение модуля этого вектора, $|\mathbf{g}(x, y; z)|$;
3. Среднее значение скорости звука в дне, близкое к скорости звука в воде.

Все эти условия выполнялись в той или иной степени для одной из акустических трасс, вы-

бранной нами для моделирования и показанной на рис. 1б.

Потери при распространении TL и TL_m , рассчитанные для поперечного сечения $x = 10$ км вдоль оси y (линия, на которой расположена горизонтальная антенна), показаны на рис. 5. Такие потери можно регистрировать с помощью вертикальной приемной антенны. Здесь антенна используется как обычная вертикальная цепочка гидрофонов, т.е. без когерентного сложения комплексных амплитуд принимаемых гидрофонами сигналов. Длина антенны зависит от параметров задачи. Например, для частоты $f = 55$ Гц в рассматриваемом волноводе существует только одна энергонесущая мода. Соответственно потери при распространении (3) для этой моды примерно равны потерям при распространении для всего поля в целом (1). Средний коэффициент затухания для этой моды равен 0.9 дБ/км. Здесь имеется в виду усреднение по трассе, обозначенной пунктирной линией на рис. 1б. Для измерения потерь при распространении в этом случае достаточно иметь антенну, перегораживающую водный слой.

Для частоты $f = 137$ Гц энергонесущих мод три. Для этих мод средние коэффициенты затухания приведены в табл. 2. Как видно в таблице, для выбранной трассы имеет место значительная разница в коэффициентах затухания различных мод, что обусловлено различной глубиной проникновения волноводных мод в морское дно, которая в свою очередь зависит от скорости звука в дне. Для иллюстрации этого утверждения на рис. 6 показаны вертикальные профили первой, второй и третьей моды на частоте 137 Гц в начале и в конце трассы. Таким образом, на расстоянии в несколько километров от источника звука, где проявляется горизонтальная рефракция, наблюдаемые акустические эффекты связаны в основном с воздействием неоднородностей дна на первую волноводную моду. Это происходит даже в случае, когда в волноводе распространяется несколько волноводных мод, поскольку амплитуды

Таблица 1. Смещение максимума отклика антенны вследствие неоднородной структуры дна при различных положениях центра антенны

Положение центра y_c	Частота f	
	55 Гц	137 Гц
–1500 м	+1.6°	+0.2°
–1000 м	+2.5°	+0.1°
–500 м	+1.8°	–0.2°
0 м	–0.5°	–0.3°
500 м	–3.1°	+0.1°
1000 м	–3.4°	–0.3°
1500 м	–2.5°	–0.4°

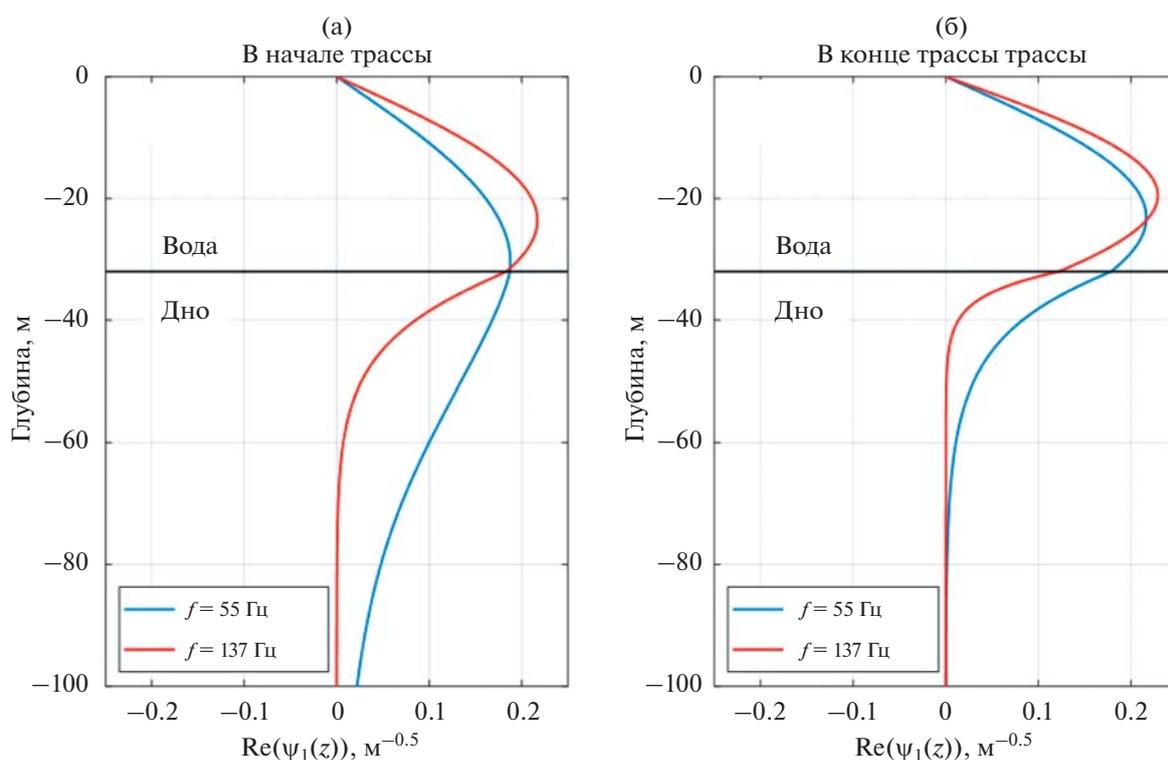


Рис. 3. Вертикальные профили первой моды для частоты 55 и 137 Гц (а) – в начале и (б) – в конце акустической трассы. Горизонтальной сплошной линией на рисунках отмечена граница вода–дно.

высших мод на указанных расстояниях в рассматриваемом волноводе значительно меньше амплитуды первой моды.

Заметим также, что известные алгоритмы модовой селекции, основанные на использовании вертикальной приемной антенны, перегораживающей весь водный слой (и даже закопанной в дно), в рассматриваемой ситуации оказываются неэффективными. Численные эксперименты показывают, что такие антенны, использующие условие ортогональности мод при их ограниченной длине, не позволят наблюдать потери при распространении высших мод, показанные на рис. 5 для частоты 137 Гц. Для иллюстрации этого утверждения сравним результаты вычисления средних по глубине потерь для звукового поля, состоящего только из второй моды в адиабатическом приближении без учета рефракции (здесь и далее в отличие от формулы (1) предполагается, что антенна не только перекрывает водный слой, но и погружена в дно на глубину H_1 ($H_1 > H$)),

$$\widetilde{TL}(x, y) = -10 \lg \frac{\left| \int_0^{H_1} \tilde{P}(x, y, z) dz \right|^2}{\left| \int_0^{H_1} \tilde{P}(x_1, y_1, z) dz \right|^2}, \quad (6)$$

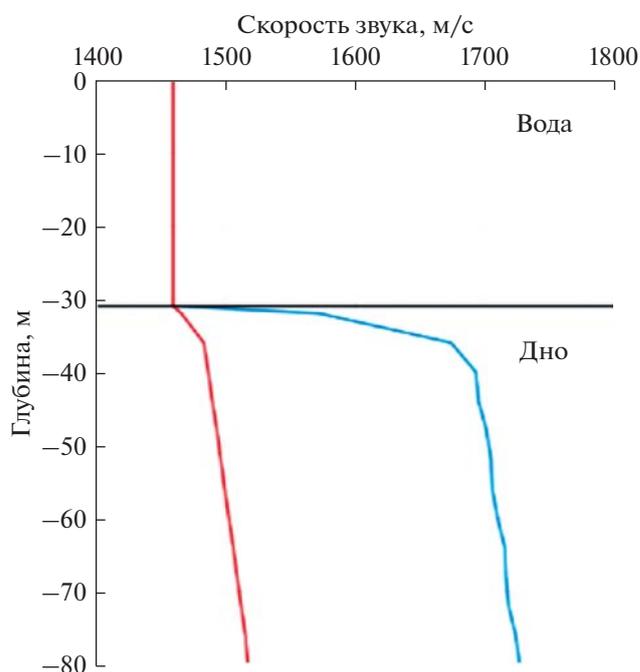


Рис. 4. Вертикальный профиль скорости звука в точке излучения (красная линия) и в точке расположения центрального гидрофона антенны (синяя линия). В воде синяя и красная кривые совпадают. Горизонтальной сплошной линией на рисунках отмечена граница вода–дно.

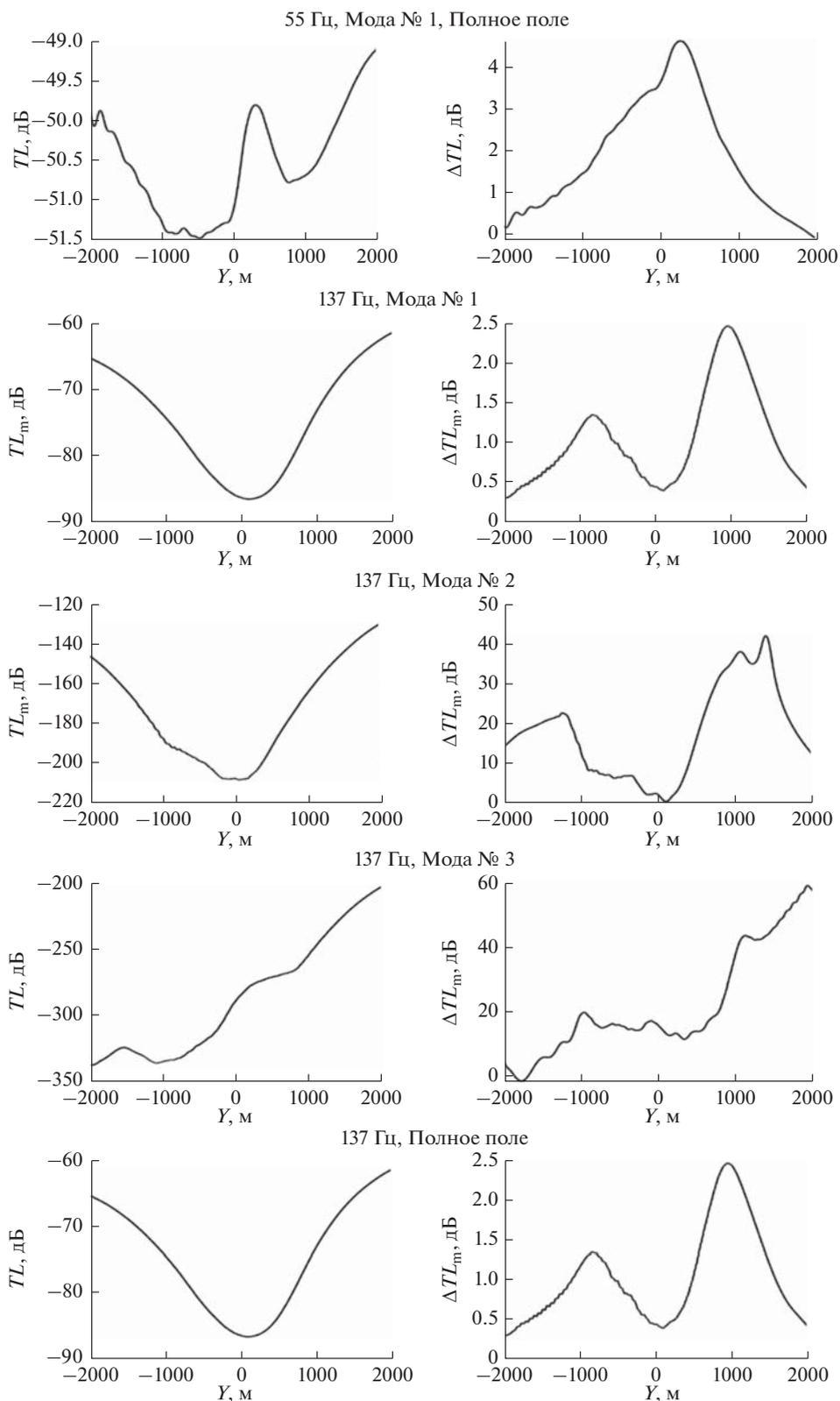


Рис. 5. Потери при распространении на расстоянии $\cong 10$ км от источника на линии расположения антенны при учете горизонтальной рефракции и разность потерь при распространении, полученных без учета и с учетом горизонтальной рефракции (верхние два рисунка относятся к частоте 55 Гц, остальные — к частоте 137 Гц). В левой колонке с рисунками показаны величины TL для полного поля и TL_m для отдельных мод, соответственно. В правой колонке — величины ΔTL для полного поля и ΔTL_m для отдельных мод, соответственно.

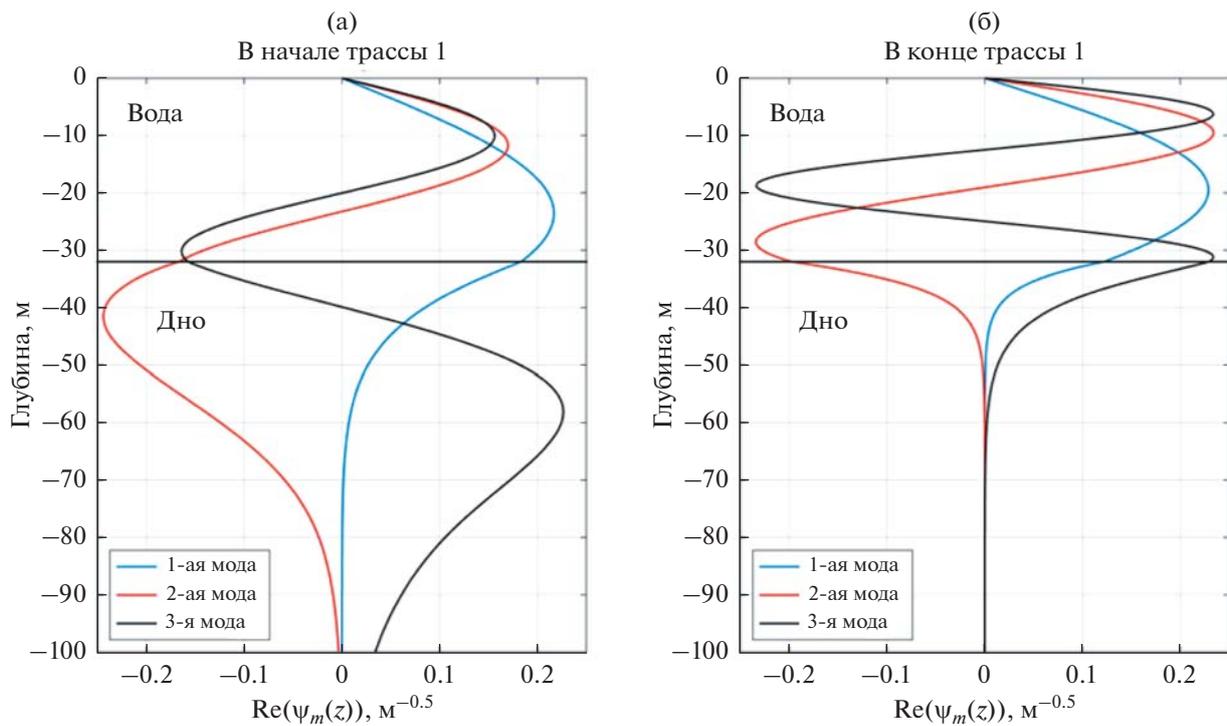


Рис. 6. Первая, вторая и третья волноводные моды (а) – в точке излучения и (б) – в точке приема. Черной горизонтальной линией показана глубина места.

$$\tilde{P}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\psi_2(x, y, z_0) \psi_2(x, y, z) \psi_2(x, y, z)}{\sqrt{\xi_2(x, y)} r} \exp\left(\int_0^r \xi_2(r') dr'\right) & \text{при } 0 \leq z \leq H, \\ \frac{\psi_2(x, y, z_0) \psi_2(x, y, z) \psi_2(x, y, z)}{m_1 \sqrt{\xi_2(x, y)} r} \exp\left(\int_0^r \xi_2(r') dr'\right) & \text{при } H \leq z \leq H_1, \end{cases}$$

с потерями, полученными после выделения второй моды из полного поля с помощью вертикальной антенны:

$$\widehat{TL}(x, y) = -10 \lg \frac{\left| \int_0^{H_1} \hat{P}(x, y, z) dz \right|^2}{\left| \int_0^{H_1} \hat{P}(x_1, y_1, z) dz \right|^2}. \quad (7)$$

Здесь

$$\hat{P}(x, y, z) = \begin{cases} P(x, y, z) \psi_2(x, y, z) & \text{при } 0 \leq z \leq H, \\ \frac{P(x, y, z) \psi_2(x, y, z)}{m_1} & \text{при } H \leq z \leq H_1, \end{cases}$$

а величина $P(x, y, z)$ определяется формулой (2), где вместо $A_m(x, y, z)$ использовано выражение

$$A_m^0(x, y, z) = \frac{\psi_m(x, y, z_0)}{\sqrt{\xi_m(x, y)} r} \exp\left(\int_0^r \xi_m(r') dr'\right),$$

$$m_1 = \frac{\rho_1}{\rho},$$

Таблица 2. Средний коэффициент затухания β_m 1-ой, 2-ой и 3-ей моды на частоте 137 Гц вдоль акустической трассы, показанной на рис. 16 пунктирной линией

Номер моды	1	2	3
Коэффициент затухания, дБ/км	2.2	10.7	20.7

ρ – плотность воды, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Заметим, что формулы (6) и (7) в отличие от (1) и (3) записаны с учетом селекции мод, использующей условие их ортогональности:

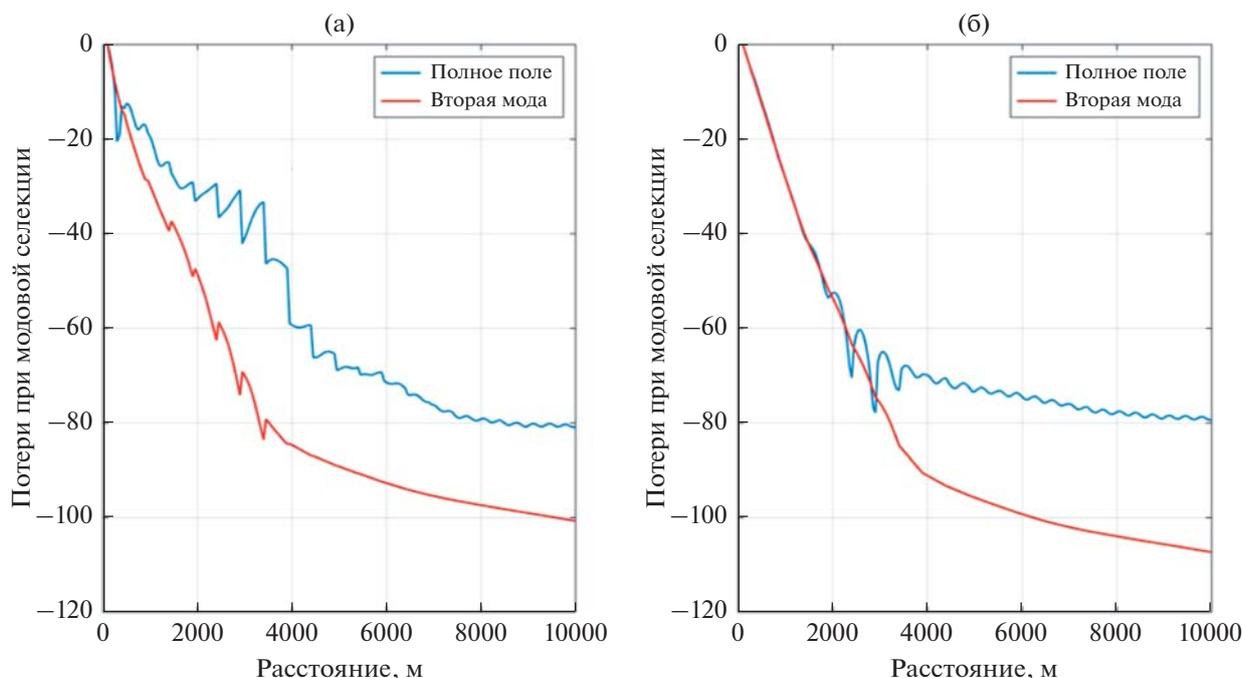


Рис. 7. Зависимость потерь при распространении \widehat{TL} (полное поле) и \widetilde{TL} (только вторая мода) при использовании вертикальной антенны, перегораживающей весь водный слой и частично закопанной в дно на глубину (а) – 11 м (длина волны на частоте 137 Гц) и (б) – 68 м.

$$\int_0^H \psi_m(x, y, z) \psi_n(x, y, z) dz + \frac{1}{m_1} \int_H^\infty \psi_m(x, y, z) \psi_n(x, y, z) dz = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases} \quad (8)$$

На рис. 7 показаны результаты расчетов (зависимости $\widehat{TL}(x, y)$ и $\widetilde{TL}(x, y)$) вдоль акустической трассы, показанной на рис. 16 пунктирной линией. Рис. 7 демонстрирует, что при водоподобном дне не удастся отделить вторую моду от первой уже на расстоянии свыше 2 км. (Начиная с этого расстояния зависимости $\widehat{TL}(x, y)$ и $\widetilde{TL}(x, y)$ перестают совпадать в силу ограниченной длины антенны.) Это не удастся сделать даже при вертикальной антенне, не только перекрывающей весь водный слой, но и закопанной в дно на глубину около шести длин волн. Причиной этому является значительная разница в коэффициентах затухания волноводных мод (см. табл. 2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как следует из приведенных результатов, реальные неоднородности морского дна могут вызывать рефракцию низкочастотных акустических

волн при распространении в мелководном волноводе арктического типа. Рефракция особенно заметна при одномодовом распространении звука и при водоподобном дне со скоростью в верхнем донном слое, близкой к скорости звука в воде. Еще одним условием рефракции является наличие преимущественного направления вектора $\mathbf{g}(x, y, z)$, составляющего угол, близкий к 90° с направлением акустической трассы. При этом величина $|\mathbf{g}(x, y, z)|$ должна быть достаточно большой (в нашем случае величина $|\mathbf{g}(x, y, z)|$ примерно составляет 0.002 (м/с)/м), что является типичным значением для тех акваторий Арктического бассейна, пример которых рассмотрен в работе (см. рис. 1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J.* Fundamentals of Shallow Water Acoustics. Springer: New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2012.
2. *Doolittle R., Tolstoy A., Buckingham M.* Experimental confirmation of horizontal refraction of cw acoustic radiation from a point source in a wedge-shaped ocean environment // J. Acoust. Soc. Am. 1988. Т. 83. № 6. P. 2117–2125.
3. *Petrov P.S., Petrova T.N.* Asymptotic solution for the problem of sound propagation in a sea with an underwater canyon // J. Acoust. Soc. Am. 2014. Т. 136. № 4. P. EL281–EL287.

4. *Badiey M., Katsnelson B., Lynch J., Pereselkov S., Siegmann W.L.* Measurement and modeling of three-dimensional sound intensity variations due to shallow-water internal waves // *J. Acoust. Soc. Am.* 2005. Т. 117. № 2. P. 613–625.
5. *Кацнельсон Б.Г., Lynch J., Цхойдзе А.В.* Пространственно-частотное распределение интенсивности звукового поля в окрестности температурного фронта в мелком море // *Акуст. журн.* 2007. Т. 53. № 5. С. 695–702.
6. *Григорьев В.А., Петников В.Г., Росляков А.Г., Терехина Я.Е.* Распространение звука в мелком море с неоднородным газонасыщенным дном // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 3. С. 342–358.
7. *Lunkov A., Sidorov D., Petnikov V.* Horizontal refraction of acoustic waves in shallow-water waveguides due to an inhomogeneous bottom structure // *J. Marine Science and Engineering.* 2021. V. 9. № 11. P. 1269.
8. *Ballard M.S., Lin Y.-T., Lynch J.F.* Horizontal refraction of propagating sound due to seafloor scours over a range-dependent layered bottom on the New Jersey shelf // *J. Acoust. Soc. Am.* 2012. V. 131 № 4. P. 2587–2598.
9. *Collins M.D.* The adiabatic mode parabolic equation // *J. Acoust. Soc. Am.* 1993. V. 94. № 4. P. 2269–2278.
10. *Collins M.* Generalization of the split-step Padé solution // *J. Acoust. Soc. Am.* 1994. V. 96. № 4. P. 382.