

УДК 534.26

ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАТУХАНИЯ ЗВУКА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С ИМПЕДАНСНЫМИ СТЕНКАМИ

© 2022 г. Н. Г. Канев^{a, b, *}^aАкустический институт им. акад. Н.Н. Андреева, ул. Шверника 4, Москва, 117036 Россия^bМосковский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*e-mail: nikolay.kanev@mail.ru

Поступила в редакцию 27.09.2021 г.

После доработки 11.01.2022 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Приведено решение задачи об оптимальном импедансе стенок бесконечного канала прямоугольного сечения, при котором затухание некоторой моды является максимальным. Показано, что при соответствующем подборе импеданса четыре простые моды сливаются, образуя четверную моду, имеющую наибольшее затухание. Найден импеданс, при котором достигается оптимум затухания, в зависимости от номера моды и размеров сечения канала. Для этого стенки канала неквадратного сечения должны иметь разные импедансы.

Ключевые слова: импеданс, волновод, канал, поглощение звука, звуковые моды, оптимальное затухание

DOI: 10.31857/S0320791922030042

Распространение звука в волноводах с податливыми стенками изучается теоретически и экспериментально уже много десятилетий [1–5]. Во многих практических задачах требуется снизить звук в канале. Для этого используют локальные препятствия, например, резонаторы, расширительные камеры и т.п., или системы таких препятствий, а также специальные – импедансные – покрытия стенок каналов. В последнем случае известно два механизма, влияющих на распространение звука. Первый связан с поглощением: звуковая энергия диссипируется стенками, если действительная часть их импеданса ненулевая. Реактивный импеданс стенок может обеспечивать запирающие каналы, например, волноводный изолятор [6] в узкой трубе имеет массовый импеданс в некоторой полосе частот, тогда энергия звука не поглощается, но в канале существуют только неоднородные моды, экспоненциально затухающие вдоль его оси. В общем случае, когда действительная и мнимая части импеданса ненулевые, имеет место комбинация двух механизмов, и рассматривается их совместный эффект, называемый затуханием звука.

Задача оптимизации затухания звука формулируется следующим образом: необходимо подобрать такой импеданс стенок, чтобы постоянная распространения некоторой собственной моды имела максимальное значение. Если в канале возбуждается несколько мод, то, как правило, опти-

мизируется затухание наименее затухающей моды. Впервые решение задачи оптимизации получено Кремером [3] для плоского канала, одна из стенок которого импедансная, а другая – жесткая. Им найдено значение импеданса, при котором нулевая мода имеет наибольшее затухание. Это значение стали называть импедансом Кремера, а сам подход – методом Кремера. Оптимальный импеданс для всех мод позже найден Тестером [4]. Один из ключевых результатов заключается в том, что оптимальное затухание связано с появлением двойных мод, образованных слиянием двух простых мод при соответствующем подборе импеданса. Затухание двойной моды соответствует максимуму затухания одной из простых мод и локальному минимуму затухания второй моды. Таким образом, суммарное затухание звука оказывается максимальным, хотя затухание второй моды является наиболее неоптимальным. Аналогичные результаты получаются в задачах взаимодействия точечных поглотителей с модами помещений [7, 8] и, по-видимому, имеют общий характер для мультимодальных систем, демпфирование которых осуществляется настройкой собственных мод.

Импеданс Кремера для каналов с потоком существенно зависит от его скорости. Оптимальные импедансы для плоского канала с потоком найдены в [9], для цилиндрического и кольцевого в [10]. В некоторых случаях влияние потока тако-

во [11, 12], что действительная часть оптимального значения импеданса на низких частотах стенок становится отрицательной.

Двойные моды связаны с кратными корнями характеристического уравнения для определения постоянной распространения звуковых волн в каналах [13, 14]. В плоских каналах кратность корня не превышает третьего порядка [15], а в круглых и кольцевых каналах, вообще говоря, может произойти слияние большего числа простых корней и образование мод более высокого порядка [10]. Подобную ситуацию можно ожидать в канале произвольного сечения конечных размеров. В настоящей работе исследуется один из простейших случаев – канал с прямоугольным сечением. Известно [16], что решение волнового уравнения для такого волновода является произведением трех функций, каждая из которых зависит от одной координаты, что позволяет применить известное решение для плоского канала с импедансными стенками. При этом кратность корней характеристического уравнения для канала с одинаковыми стенками не превышает двух, но наличие двух характеристических уравнений для направлений, перпендикулярных оси волновода, дает возможность слияния более чем двух простых мод и нахождения оптимального импеданса стенок для этого случая.

Рассмотрим канал прямоугольного сечения. Ось z декартовой системы координат совпадает с осью канала, оси x и y перпендикулярны его стенкам. Вдоль осей x и y размеры сечения составляют h и $d = \gamma h$, для определенности примем $\gamma \leq 1$. Акустические характеристики стенок зададим локально реагирующим импедансом Z , нормированным на волновое сопротивление среды ρc , где ρ, c – плотность среды и скорость звука в ней.

Согласно [17] поле звукового давления в канале может быть представлено в виде суперпозиции волновых мод, распространяющихся вдоль оси z ,

$$p_{nm} = \varphi_n\left(\frac{\xi_n}{h}x\right)\varphi_m\left(\frac{\kappa_m}{d}y\right)e^{ik\tau_{nm}z}, \quad (1)$$

где $k = \omega/c$, ω – круговая частота, $\varphi_n(x) = \text{ch}x$ при $n = 0, 2, 4, \dots$, $\varphi_n(x) = \text{sh}x$ при $n = 1, 3, 5, \dots$,

$$\tau_{nm} = \sqrt{1 + \left(\frac{\xi_n}{kh}\right)^2 + \left(\frac{\kappa_m}{kd}\right)^2}, \quad (2)$$

$$\text{Re}\tau_{nm} \geq 0, \quad \text{Im}\tau_{nm} \geq 0.$$

Временной множитель $e^{-i\omega t}$, t – время, здесь и далее опускаем. При $n = 0, 2, 4, \dots$ значения ξ_n и κ_n являются корнями уравнений

$$\xi \text{th} \frac{\xi}{2} = \frac{ikh}{Z}, \quad \kappa \text{th} \frac{\kappa}{2} = \frac{ikd}{Z}, \quad (3)$$

а при $n = 1, 3, 5, \dots$ корнями уравнений

$$\xi \text{cth} \frac{\xi}{2} = \frac{ikh}{Z}, \quad \kappa \text{cth} \frac{\kappa}{2} = \frac{ikd}{Z}. \quad (4)$$

Задача оптимизации затухания некоторой моды (n, m) заключается в поиске такого импеданса стенок канала Z , чтобы коэффициент затухания моды $\delta_{nm} = \text{Im} \tau_{nm}$ был максимальным. Это происходит, когда уравнения (3) и (4) имеют двойные корни [3]. Появление таких корней рассмотрим на примере функций, очевидным образом связанных с уравнениями (3) и (4),

$$f(\alpha, a) = \alpha \text{th} \frac{\alpha}{2} - \frac{i}{a}, \quad g(\alpha, a) = \alpha \text{cth} \frac{\alpha}{2} - \frac{i}{a}. \quad (5)$$

Пусть α_n – корень уравнения $f(\alpha, a) = 0$, если $n = 0, 2, 4, \dots$, и корень уравнения $g(\alpha, a) = 0$, если $n = 1, 3, 4, \dots$. При некотором значении a два корня α_n и $\alpha_{n'}$, $n \neq n'$, могут иметь одинаковые значения, для этого производные функций (5) по α должны обращаться в нуль, т.е.

$$f_\alpha = \alpha + \text{sh}\alpha = 0, \quad g_\alpha = \alpha - \text{sh}\alpha = 0, \quad (6)$$

$$\text{Re} \alpha \geq 0, \quad \text{Im} \alpha \geq 0.$$

Обозначим через $\tilde{\alpha}_n$ корни уравнений (6) и пронумеруем их, начиная с $n = 0$ в порядке возрастания действительной части. Двойные корни $\tilde{\alpha}_n$ и соответствующие значения параметра a_n могут быть найдены численным способом. Приведем значения для двух первых корней

$$\tilde{\alpha}_0 = 2.251 + 4.212i, \quad a_0 = 0.148 + 0.118i,$$

$$\tilde{\alpha}_1 = 2.769 + 7.498i, \quad a_1 = 0.107 + 0.054i.$$

Далее значения $\tilde{\alpha}_n$ и a_n полагаем известными.

На рис. 1 представлен расчет первых пяти корней α_n в зависимости от параметра $a = a' + ia''$. При этом a' изменяется от нуля до бесконечности, а мнимая часть параметра остается неизменной и равной $a'' = \text{Im} a_0$ на рис. 1а и $a'' = \text{Im} a_1$ на рис. 1б. Проколотые точки указывают начало ветвей α_n , стрелки – направление движения корня α_n по кривой с увеличением a' , сплошные точки соответствуют пределу $a' \rightarrow \infty$, т.е. предельному переходу к каналу с абсолютно жесткими стенками. В этом случае $\alpha_n \rightarrow i\pi n$, поэтому нумерация корней α_n , а также корней ξ_n и κ_n при решении (3) и (4), производится в порядке возрастания абсолютных значений корней, получаемых при предельном переходе $a' \rightarrow \infty$ или $Z \rightarrow \infty$.

Ветви α_0 и α_2 имеют общую точку $\tilde{\alpha}_0$ при $a = a_0$ (рис. 1а), соответствующие им моды называют двойными. Ветви α_1 и α_3 также имеют общую точку $\tilde{\alpha}_1$ при $a = a_1$ (рис. 1б). Уравнение (5) соответствует плоскому каналу шириной h и импедансом

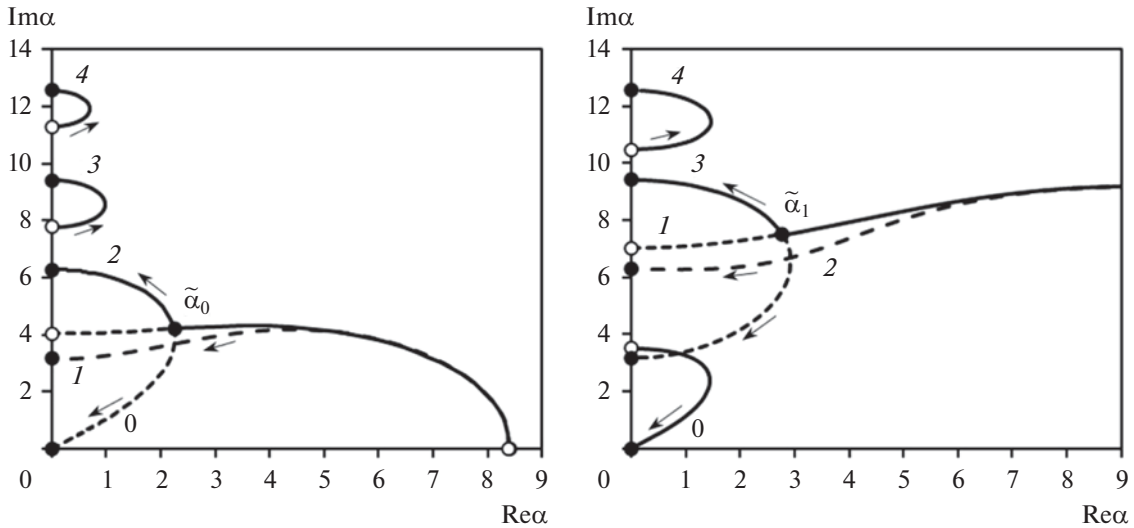


Рис. 1. Корни α_n уравнений (5) при изменении $\text{Re } a$ от нуля до бесконечности при (а) $\text{Im } a = 0.118$ и (б) $\text{Im } a = 0.054$. Числа указывают номер корня n , стрелки – направление движения корней при увеличении $\text{Re } a$.

стенки Z , при этом $a = Z/kh$. Из (6) следует, что двойными могут быть ближайшие симметричные ($n = 0, 2, 4, \dots$) или антисимметричные ($n = 1, 3, 5, \dots$) моды, т.е. при оптимальном подборе импеданса

$$Z = a_n kh \tag{6}$$

моды n и $n + 2$ имеют максимально возможный коэффициент затухания. Отметим, что в плоском канале, одна стенка которого является импедансной, а другая – жесткой, справедливо только уравнение $f(\alpha, a) = 0$, поэтому двойными являются соседние моды n и $n + 1$ [4].

В прямоугольном канале значения параметров ξ_n и κ_n определяются независимо друг от друга по уравнениям (3) и (4), поэтому результаты, полученные при исследовании уравнений (5), можно сразу применить для ξ_n и κ_n . Двойные корни равны $\xi_n = \tilde{\kappa}_n = \tilde{\alpha}_n$, при этом корень ξ_n имеет место при импедансе $Z_n = a_n kh$, а корень $\tilde{\kappa}_n$ – при импедансе $Z_n = a_n kd$. Очевидно, что два некоторых двойных корня ξ_n и $\tilde{\kappa}_m$ могут быть равны, если стенки канала имеют разный импеданс. Пусть импеданс стенок, перпендикулярных оси x , равен X , а импеданс стенок, перпендикулярных оси y , равен Y . Тогда, заменив Z в уравнениях (3) и (4) на X и Y , находим оптимальные импедансы стенок

$$X = a_n kh, \quad Y = a_m kd, \tag{7}$$

при которых $\xi_n = \tilde{\kappa}_m$. В этом случае четыре корня уравнений (3) и (4) оказываются равными $\xi_n = \xi_{n+2} = \kappa_m = \kappa_{m+2}$, поэтому согласно (2) постоянные распространения вдоль канала τ_{nm} четырех мод (n, m) , $(n + 2, m)$, $(n + 2, m)$, $(n + 2, m + 2)$ также

равны между собой. Более того, эти моды имеют одинаковое распределение звукового давления (1) в канале, поэтому неотличимы друг от друга. Таким образом, при оптимальном подборе импедансов (7) для максимального затухания некоторой моды (n, m) образуется четверная мода, коэффициент затухания которой равен

$$\tilde{\delta}_{nm} = \text{Im} \sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{\alpha}_n}{kh}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\alpha}_m}{kd}\right)^2}. \tag{8}$$

Отсюда следует, что с увеличением номера моды максимальный коэффициент затухания (8) увеличивается, поэтому, как правило, наименее затухающей является нулевая мода $(0, 0)$. На рис. 2 приведены коэффициенты затухания четверных мод $(0, 0)$ и $(1, 1)$ в зависимости от ширины канала kh и соотношения сторон $\gamma = d/h$, где видно, что с уменьшением одного из поперечных размеров канала коэффициент затухания увеличивается. Это также следует из (8): если $d \ll h$, то значение $\tilde{\delta}_{nm}$ определяется, главным образом, третьим слагаемым в подкоренном выражении, составляет $\tilde{\delta}_{nm} \approx \text{Im} \tilde{\alpha}_m / kd$ и зависит только от меньшего размера.

Последний вывод позволяет найти оптимальный импеданс для моды (n, m) в канале, все стенки которого имеют одинаковый импеданс. В этом случае импеданс подбирается так, чтобы корень κ_m , определяемый меньшим поперечным размером канала d , был двойным, что приводит к появлению двойной моды (n, m) и $(n, m + 2)$. При опти-

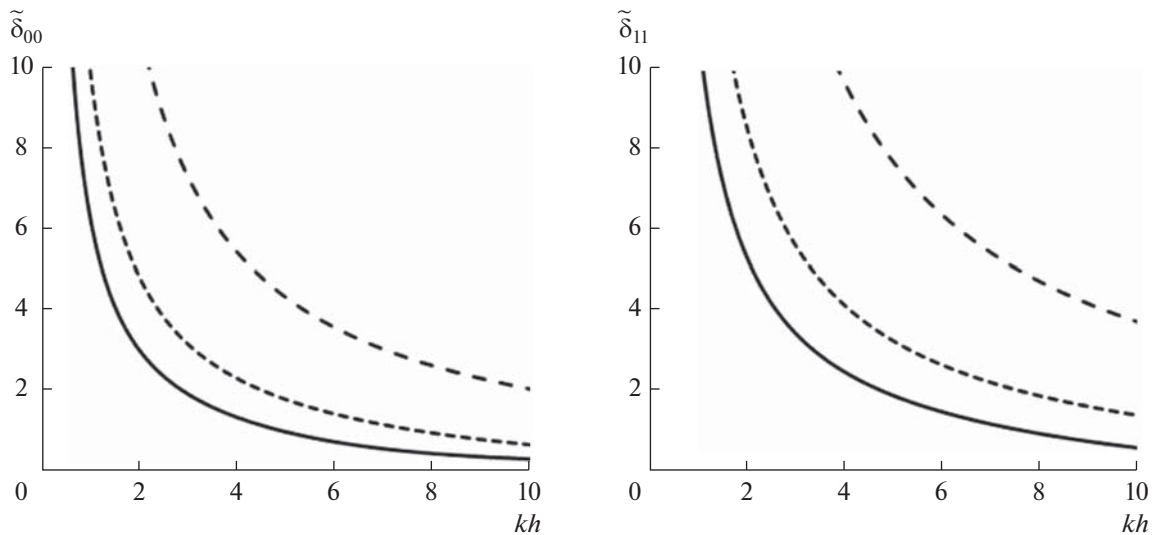


Рис. 2. Оптимальный коэффициент затухания мод (0,0) и (1,1) для разных соотношений сторон канала $\gamma = 1$ (—), 0.5 (---), 0.2 (- - -).

мальном импедансе $Z = a_m kd$ коэффициент затухания имеет вид

$$\tilde{\delta}_{nm} = \text{Im} \sqrt{1 + \left(\frac{\xi_n}{kh}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\alpha}_m}{kd}\right)^2}, \quad (9)$$

где значение ξ_n находится из уравнений (3) и (4).

Рассмотрим коэффициенты затухания мод при неоптимальном импедансе стенок. Из (7) следует, что для оптимизации затухания нулевой моды импедансы стенок должны быть равны $\tilde{X} = a_0 kh$, $\tilde{Y} = a_0 kd$. Полагая мнимые части X и Y неизменными, введем параметр ε , характеризующий отличие действительных частей X и Y от оптимальных значений

$$X = \varepsilon \text{Re} \tilde{X} + i \text{Im} \tilde{X}, \quad Y = \varepsilon \text{Re} \tilde{Y} + i \text{Im} \tilde{Y}. \quad (10)$$

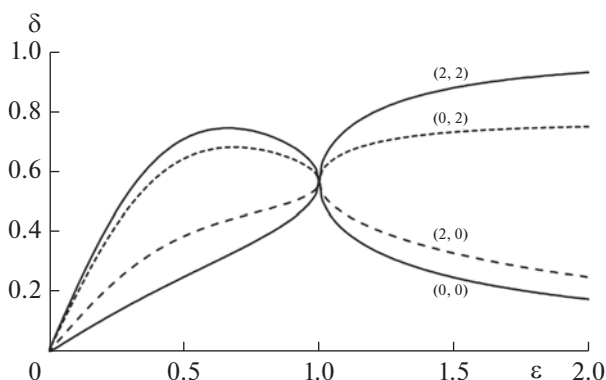


Рис. 3. Коэффициент затухания четырех мод в канале с размерами $kh = 10$ и $\gamma = 0.5$ в зависимости от действительной части импеданса стенок.

На рис. 3 приведены коэффициенты затухания мод (0,0), (2,0), (0,2), (2,2) для канала с размерами $kh = 10$, $\gamma = 0.5$ в зависимости от ε . Нулевая мода имеет наименьший коэффициент затухания при любом значении импедансов (10) за исключением оптимального. При $\varepsilon = 1$ образуется четверная мода, при этом коэффициент затухания мод (0,0) и (2,0) достигает максимального значения.

Аналогичный расчет приведен на рис. 4 для канала квадратного сечения $\gamma = 1$. В этом случае оптимальные импедансы всех стенок одинаковы $\tilde{X} = \tilde{Y}$, поэтому моды (2,0) и (0,2) оказываются двойными при любом импедансе стенок, хотя это не приводит к оптимизации затухания, поскольку нулевая мода остается наименее затухающей. Коэффициент затухания только нулевой моды достигает максимума при оптимальном импедансе. Отметим, что при определенных размерах канала некоторые моды могут иметь меньший коэффициент затухания, чем коэффициент затухания нулевой моды при оптимальном подборе импедансов \tilde{X} и \tilde{Y} [4].

Таким образом, для оптимизации затухания моды (n, m) в канале прямоугольного сечения необходимо подобрать импеданс его стенок в соответствии с (7), при этом происходит слияние четырех мод. Затухание четверной моды оказывается равным максимальному затуханию менее ослабляемой из четырех простых мод. Если сечение канала вытянутое, то оптимальный импеданс и максимальное затухание определяются меньшим поперечным размером сечения. В этом случае достаточно оптимизировать импеданс только широких

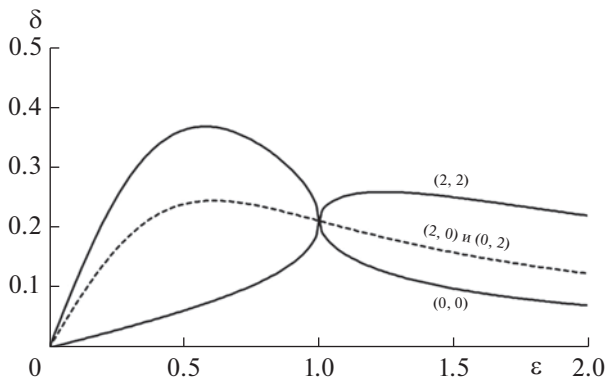


Рис. 4. Коэффициент затухания четырех мод в канале квадратного сечения со стороной $kh = 10$ в зависимости от действительной части импеданса стенок.

стенок, а максимальное затухание будет таким же как в плоском канале [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Н.Н. О скольжении звука вдоль поглощающих границ // Изв. АН СССР. Сер. Физическая. 1936. № 5. С. 625–632.
2. Beranek L.L. Sound absorption in rectangular ducts // J. Acoust. Soc. Am. 1940. V. 12. P. 228–231.
3. Cremer L. Theory regarding the attenuation of sound transmitted by air in a rectangular duct with an absorbing wall, and the maximum attenuation constant produced during this process // Acustica. 1953. V. 3. P. 249–263.
4. Tester B.J. The optimization of modal sound attenuation in ducts, in the absence of mean flow // J. Sound Vib. 1973. V. 27. P. 477–513.
5. Лапин А.Д. Звукоизоляция в волноводах // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 3. С. 337–350.
6. Исакович М.А. Теория волноводной изоляции волн в длинных линиях // Труды Всесоюзной конференции “Распространение и дифракция волн”. Ереван. 1973. Т. 60. № 2. С. 145–151.
7. Канев Н.Г. О максимальном поглощении звука резонатором Гельмгольца в помещении на низких частотах // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 752–755.
8. Канев Н.Г. Максимальное поглощение звука монопопом в помещении на низких частотах // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 3. С. 327–331.
9. Tester B.J. The propagation and attenuation of sound in lined ducts containing uniform of “plug” flow // J. Sound Vib. 1973. V. 28. № 2. P. 151–203.
10. Гладенко А.Ф., Леонтьев Е.А. О распространении звука в каналах с импедансными стенками при наличии воздушного потолка. Ч. II. Оптимизация затухания звука в каналах // Ученые записки ЦАГИ. 1982. Т. XIII. № 3. С. 61–68.
11. Kabral R., Du L., Åbom M. Optimum sound attenuation in flow ducts based on the “exact” Cremer impedance // Acta Acust. united with Acust. 2016. V. 102. P. 851–860.
12. Zhang Z., Boden H., Åbom M. The Cremer impedance: An investigation of the low frequency behavior // J. Sound Vib. 2019. V. 459. 114844.
13. Шендеров Е.Л. О собственных функциях плоского волновода с импедансными стенками // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 5. С. 661–669.
14. Шендеров Е.Л. О решениях уравнения Гельмгольца, соответствующих кратным корням дисперсионного уравнения для волновода с импедансными стенками // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 3. С. 417–423.
15. Perrey-Debain E., Nennig B., Lawrie J.B. Mode coalescence and the Green’s function in a two-dimensional waveguide with arbitrary admittance boundary conditions // J. Sound Vib. 2022. V. 516. 116510.
16. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973.
17. Морз Ф. Колебания и звук. М.–Л., ГИТТЛ. 1949.