

## ПУЗЫРЬКИ В ПРОТОЧНОМ АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

© 2023 г. Т. С. Викулова<sup>a</sup>, И. Н. Диденков<sup>a, b, \*</sup>, В. В. Кулинич<sup>b</sup>,  
Н. В. Прончатов-Рубцов<sup>a</sup>, Д. В. Сахаров<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
Азимбадская ул. 4, Нижний Новгород, 603105 Россия

<sup>b</sup>Институт прикладной физики РАН,  
ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, 603155 Россия

\*e-mail: diniap@mail.ru

Поступила в редакцию 07.05.2022 г.

После доработки 01.08.2022 г.

Принята к публикации 22.09.2022 г.

Приводятся результаты аналитического и численного исследования движения пузырьков в проточном резонаторе под действием радиационной силы и силы вязкого трения. Рассмотрены случаи слабых и сильных акустических полей.

**Ключевые слова:** пузырьки, проточный резонатор, радиационная сила, слабые и сильные поля

**DOI:** 10.31857/S032079192270006X, **EDN:** DBBTEE

### ВВЕДЕНИЕ

В последние годы активно развиваются методы бесконтактного манипулирования различными объектами с помощью акустического поля. Исследуются возможные приложения этих методов для формирования различных объемных и плоских структур из малых частиц [1–3], создания акустических ловушек для частиц больших волновых размеров [4], акустической селекции клеток в биомедицине [5]. Во всех случаях акустическое воздействие на частицы становится возможным благодаря радиационной силе, действующей со стороны объемных или поверхностных акустических волн.

Выражение, позволяющее рассчитать радиационную силу, действующую на произвольную частицу в приближении идеальной жидкости, было получено в середине прошлого века Горьковым [6]. На этой основе были исследованы особенности действия радиационной силы на сферические твердые тела [7, 8]. Действие радиационной силы на пузырьки в жидкости привлекло отдельное внимание многих исследователей [9–13]. Особенно большой интерес к этой теме возник после обнаружения эффекта сонолюминесценции одиночного пузырька в акустическом резонаторе (обширная литература приведена в обзорах [14, 15]). При наличии течения в жидкости на пузырьки помимо радиационной силы действует также сила вязкого сопротивления. Действие этих сил в проточном акустическом резонаторе может приводить к неравномерному распределению концентрации пузырьков [16–18]. В послед-

ние годы дополнительный интерес к поведению пузырьков в акустическом поле в потоке жидкости возник в связи с развитием новой технологии ультразвуковой очистки [19], которая активно начинает использоваться в различных областях, включая медицину [20, 21]. Технология основана на очищающем действии микропотоков вблизи колеблющегося пузырька [22, 23]. Колебания пузырьков возбуждаются ультразвуковым полем, распространяющимся в струе жидкости, которая доставляет пузырьки к очищаемой поверхности; радиационная сила может играть важную роль в этом процессе [24].

Для сравнительно маленьких пузырьков радиационная сила ранее изучалась, в основном, при относительно небольших амплитудах акустического поля. С ростом интенсивности акустического поля колебания пузырьков становятся сильно-нелинейными. В настоящей работе аналитическими и численными методами рассматривается задача о движении пузырьков в слабых и сильных полях в проточном акустическом резонаторе.

### РАДИАЦИОННАЯ СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ПУЗЫРЬКИ

На маленький по сравнению с длиной волны пузырек в жидкости действует радиационная сила, обусловленная градиентом давления [9]:

$$F_r = -\langle W \nabla P \rangle, \quad (1)$$

где  $W(t) = \frac{4}{3}\pi R^3$  – мгновенный объем, а  $R(t)$  – мгновенный радиус пузырька,  $\nabla P(\mathbf{r})$  – градиент давления в акустическом поле, угловые скобки обозначают усреднение по периоду колебаний пузырька.

В стоячей акустической волне вида

$$P(x, t) = P_a \cos(kx) \cos(\omega t), \quad (2)$$

где  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  – частота,  $k = \omega/c$  – волновое число,  $c$  – скорость звука, сила (1) приобретает вид:

$$F_r = \frac{4}{3}\pi k P_a \sin(kx) \langle R^3(t) \cos(\omega t) \rangle. \quad (3)$$

Для того чтобы получить выражение для радиационной силы, действующей на пузырек, необходимо решить задачу о вынужденных колебаниях пузырька в акустическом поле. Колебания пузырька при отсутствии газообмена с жидкостью описываются уравнением Рэлея–Плессета [25]:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{\rho} \left( -P_g + P_0 + P(t) + \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\eta\dot{R}}{R} \right) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $R$  – радиус пузырька,  $\rho$  – плотность окружающей жидкости,  $P_g$  – давление газа в пузырьке,  $P_0$  – статическое давление,  $P(t)$  – внешнее акустическое давление, действующее на пузырек,  $\sigma$  – поверхностное натяжение жидкости,  $\eta$  – динамическая вязкость жидкости. Точки над  $R$  обозначают дифференцирование по времени. Давление газа в пузырьке в общем случае является политропическим:

$$P_g = P_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3n}, \quad (5)$$

где  $n$  – показатель политропы. При медленных колебаниях пузырька, когда за счет теплообмена с окружающей жидкостью температура внутри него остается постоянной, что соответствует изотермическому процессу,  $n = 1$ . В противоположном случае быстрых колебаний теплообмен произойти не успевает (адиабатический процесс) и  $n = \gamma$ , где  $\gamma$  – показатель адиабаты для газа в пузырьке. Учет теплообмена между газом внутри пузырька и окружающей жидкостью приводит к появлению теплового механизма потерь энергии (затухания колебаний) и изменению выражения для классической формулы Миннарта для резонансной частоты пузырька [26]. Роль теплообмена становится значимой, если характерная длина тепловой волны  $\lambda_T$  становится сравнимой со статическим радиусом пузырька:  $\frac{\lambda_T}{R_0} \sim 1$ . В противов-

положном случае  $\frac{\lambda_T}{R_0} \ll 1$  состояние газа в пузырьке

будет адиабатическим. Учитывая, что  $\lambda_T = 2\pi\sqrt{2a/\omega}$ ,

где  $a$  – коэффициент температуропроводности газа, критерий  $\lambda_T = R_0$  дает критическую частоту  $\omega^*$ :

$$\omega^* = \frac{a}{2\pi^2 R_0^2}.$$

Оценки показывают, что для воздушного пузырька ( $a = 2 \times 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с) при частоте акустического поля порядка 100 кГц пузырьки радиусом менее 50 мкм будут колебаться изотермически. Заметим, что этот вывод справедлив для колебаний пузырька в слабых полях, когда изменение радиуса пузырька  $\Delta R$  в процессе колебаний мало ( $\Delta R \ll R$ ).

В этом случае линеаризация уравнения (4) переводит его в уравнение классического осциллятора, и тогда выражение для радиационной силы приобретает вид:

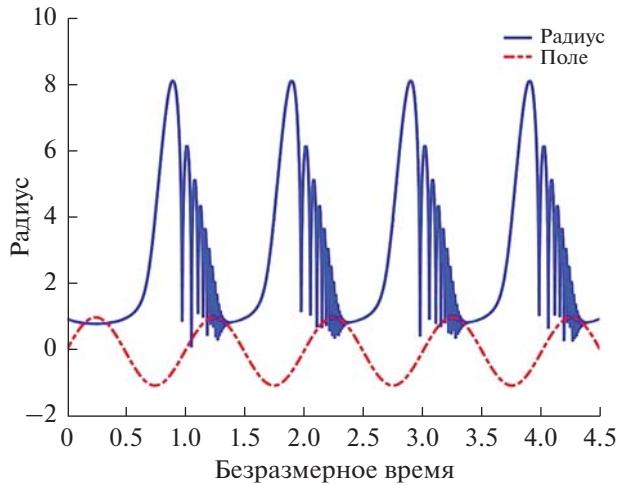
$$\begin{aligned} F_r &= \\ &= \text{Re} \frac{\pi R_0^3}{\left[ 3nP_0 + \frac{2\sigma}{R_0}(3n-1) \right] \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - i\delta \right)} \nabla |P|^2 = \\ &= - \frac{\pi R_0^3 k \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)}{\left[ 3nP_0 + \frac{2\sigma}{R_0}(3n-1) \right] \left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \delta^2 \right]} \times \\ &\quad \times P_a^2 \sin(2kx), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\omega_0 = R_0^{-1} \sqrt{\frac{1}{\rho} [3nP_0 + \frac{2\sigma}{R_0}(3n-1)]}$  – резонансная частота пузырька,  $R_0$  – статический радиус пузырька,  $\delta$  – декремент затухания.

Для маленьких пузырьков ( $\omega \ll \omega_0$ ), колебания которых мы будем рассматривать, из формулы (6) можно получить максимальное значение радиационной силы

$$\max \{F_r\} = \frac{\pi R_0^3 k P_a^2}{\left[ 3nP_0 + \frac{2\sigma}{R_0}(3n-1) \right]}. \quad (7)$$

Для частот, отвечающих критерию  $\omega \ll \omega^*$ , в формуле (7) необходимо положить  $n = 1$ . При увеличении амплитуды акустического поля колебания пузырьков становятся сильно-нелинейными. Численное решение задачи о сильных колебаниях пузырька рассматривалось ранее в связи с сонolumинесценцией одиночного пузырька (много соответствующих ссылок можно найти в обзорах [14, 15]). Эти расчеты показывают, что пузырек испытывает сильно-нелинейные колебания, причем на один период поля приходится несколько колебаний пузырька. В фазе расширения размеры пузырька относительно медленно увеличиваются, а дальше происходит последова-

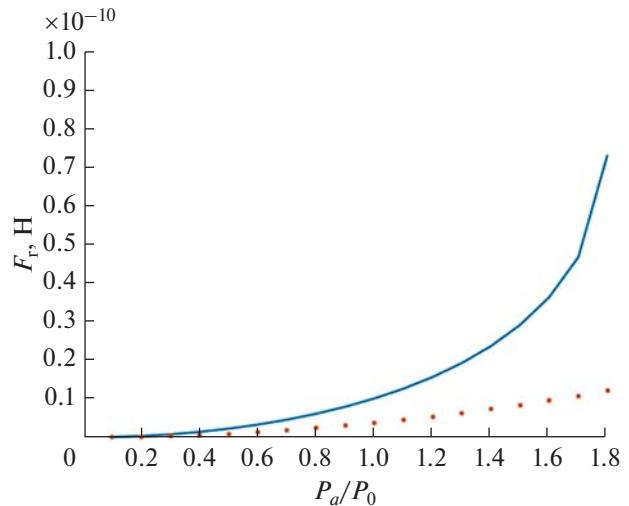


**Рис. 1.** Колебания нормированного радиуса пузырька в сильном поле.

тельность чрезвычайно быстрых его схлопываний и “отскоков” на одном периоде поля с затухающей амплитудой. Такие колебательные процессы неоднократно наблюдались и в экспериментах по сонолюминесценции [14, 15, 27]. В процессе быстрого коллапса пузырька скорость движения его стенки становится достаточно быстрой для того, чтобы тепло больше не покидало пузырек, а показатель политропы достиг адиабатического значения [15, 28]. Поэтому при сильно-нелинейных колебаниях пузырька, когда он совершает несколько быстрых схлопываний, в первом приближении можно считать состояние газа в нем адиабатическим.

В рассматриваемой задаче нас интересует характер изменения радиационной силы от величины акустического поля при переходе от слабых к сильно-нелинейным колебаниям пузырька. Для нахождения радиационной силы необходимо численно решать нелинейную систему (3)–(4). С этой целью уравнение (4) было приведено к безразмерному виду с новыми переменными: временем  $\tau$ , нормированным на период акустического поля, и радиусом  $r$ , нормированным на начальный радиус пузырька  $R_0$ , после чего решалось численно в среде MathLab. Результаты расчетов использовались для вычисления значения радиационной силы в зависимости от величины акустического поля.

В качестве примера на рис. 1 приведены результаты расчета изменения радиуса пузырька во времени при сильно-нелинейных колебаниях. График построен при следующих параметрах (при  $T = 20^\circ\text{C}$ ):  $P_0 = 10^5 \text{ Па}$ ,  $\sigma = 72.86 \times 10^{-3} \text{ Н/м}$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $R_0 = 1 \text{ мкм}$ ,  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\eta = 8.6 \times 10^{-4} \text{ Па с}$ ,  $\omega_0 = 2.05 \times 10^7 \text{ рад/с}$  ( $\approx 3.3 \text{ МГц}$ ),  $\omega_0/\omega = 45$ ,  $\omega = 4.55 \times 10^5 \text{ рад/с}$  ( $f \approx 70 \text{ кГц}$ ),  $P_a/P_0 = 1.3$ .



**Рис. 2.** Зависимость величины радиационной силы от амплитуды акустического поля.

Из рис. 1 видно, что пузырек испытывает сильно-нелинейные колебания, причем на один период поля приходится несколько колебаний пузырька. Размеры пузырька относительно медленно увеличиваются в фазе расширения, а дальше происходит последовательность быстрых его схлопываний с затухающей амплитудой. На основе серии таких расчетов были получены зависимости максимальной величины радиационной силы от амплитуды акустического поля, одна из которых показана на рис. 2. Интересно сравнить результаты численных расчетов с аналитической формулой (4), предсказывающей квадратичную зависимость силы от амплитуды поля. На рис. 2 приведены результаты такого сравнения. Сплошной линией отмечен график, полученный в результате численных расчетов, а точками — на основе формулы (7). Величина радиационной силы выражена в ньютонах.

Из рис. 2 видно, что расчеты по формуле (7) совпадают с результатами расчетов до амплитуд поля  $P_a/P_0 \approx 0.2$ – $0.3$ . При превышении этого значения колебания пузырька становятся все более нелинейными, что проявляется в более сильной зависимости радиационной силы от амплитуды поля. В интервале значений  $P_a/P_0 \approx 1.2$ – $1.6$  эта зависимость подчиняется примерно четвертой степени амплитуды поля, а при больших значениях величина степени также растет. Аналогичные зависимости были получены для пузырьков с радиусами  $R_0$  в диапазоне до 10 мкм. Полученные данные показывают, что при значительных амплитудах поля, которые вызывают сильно-нелинейные колебания пузырьков, величина радиационной силы, действующей на них, растет значительно быстрее ( $\sim P_a^m$ ,  $m > 4$ ), чем для линейных колебаний пузырьков ( $\sim P_a^2$ ).

## ДВИЖЕНИЕ ПУЗЫРЬКОВ В ПРОТОЧНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Рассмотрим действие радиационной силы на пузырьки в акустическом резонаторе, в котором задан поток жидкости вдоль оси вертикально ориентированного резонатора. Сначала рассмотрим случай относительно слабого акустического поля в резонаторе, когда колебания пузырька можно считать линейными.

На движущийся в потоке жидкости пузырек действует сила вязкого трения (сила Стокса)  $F_{\text{st}}$ . Пузырек имеет свободную поверхность и его обтекание жидкостью в отличие от твердой сферы происходит без эффекта прилипания. Однако такое обтекание возможно лишь в чистой жидкости. В реальных жидкостях, содержащих растворимые примеси, а также для маленьких пузырьков, поверхностное натяжение в которых создает своеобразную оболочку, обтекание может приближаться к обтеканию твердой сферы [29]. Используя это приближение, запишем силу Стокса для пузырька

$$F_{\text{st}} = 6\pi R_0 \eta (V - v_b), \quad (8)$$

где  $v_b$  – скорость пузырька,  $V$  – скорость потока жидкости,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости,  $R_0$  – радиус пузырька. Сила Архимеда имеет вид:

$$F_a = -\rho g \frac{4}{3} \pi R_0^3, \quad (9)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Для маленьких пузырьков ( $\omega \ll \omega_0$ ) радиационная сила  $F_r$  в поле стоячей волны в проточном ре-

$$x_b = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{1 - h^2} \operatorname{tg} \left( \frac{kt(b - aV)}{a} \sqrt{1 - h^2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg}(kx_0) + h}{\sqrt{1 - h^2}} \right) \right) - h \right], \quad (12)$$

$$\text{где } h = \frac{A}{b(1 - qV)}, \quad q = \frac{a}{b}.$$

Выражение (12) описывает неравномерное движение пузырька в проточном резонаторе. Такая ситуация имеет место, если сумма сил Стокса и Архимеда превышает максимальное значение радиационной силы. В обратном случае возможна левитация пузырьков в соответствующих зонах стоячей волны. Прохождение пузырьком узлов и пучностей стоячей волны приводит к изменению радиационной силы, под действием которой меняется скорость квазиравномерного движения пузырька. Если в начальное сечение резонатора последовательно запускаются пузырьки, то их концентрация будет также иметь периодическое распределение.

зонаторе, описываемая формулой (6), приобретает вид:

$$F_r = -\frac{\pi R_0^3 k}{\left[ 3n P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} (3n - 1) \right]} P_a^2 \sin(2kx). \quad (10)$$

При этом мы не учитываем влияние потока на расфазировку резонатора, считая скорость потока достаточно маленькой. Это можно делать при выполнении условия  $kL \left( \frac{V}{c} \right) \ll \pi$ , где  $L$  – длина резонатора.

Действие вязкости быстро приводит к установлению равномерного движения частицы в жидкости, при котором сумма сил равна нулю. Поэтому движение пузырьков в резонаторе с пространственно-изменяющейся радиационной силой можно рассматривать, как квазиравномерное. Подставив выражения для сил, после преобразований получим уравнение для координаты пузырька  $x_b(t)$  [18]:

$$\frac{dx_b}{dt} = V + \frac{A}{a} \sin(2kx_b) + \frac{b}{a}, \quad (11)$$

где

$$A = -\frac{\pi R_0^3 k p_a^2}{\left[ 3n P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} (3n - 1) \right]}, \quad a = 6\pi R_0 \eta, \\ b = \rho g \frac{4}{3} \pi R_0^3.$$

Решение уравнения (11) для зависимости координаты пузырька от времени удается получить аналитически:

Если в резонаторе возбуждены определенные поперечные моды, то радиационная сила будет вызывать перемещение пузырьков и в поперечном направлении: маленькие пузырьки, размер которых меньше резонансного для частоты волны, будут смещаться в область максимума поля, а большие – выталкиваться из нее.

Выражение (12) описывает движение пузырьков в резонаторе с относительно слабым акустическим полем, для которого радиационная сила дается формулой (6). Для описания движения пузырьков в сильном поле резонатора необходимо использовать численные методы. В этом случае полная система уравнений выглядит следующим образом:

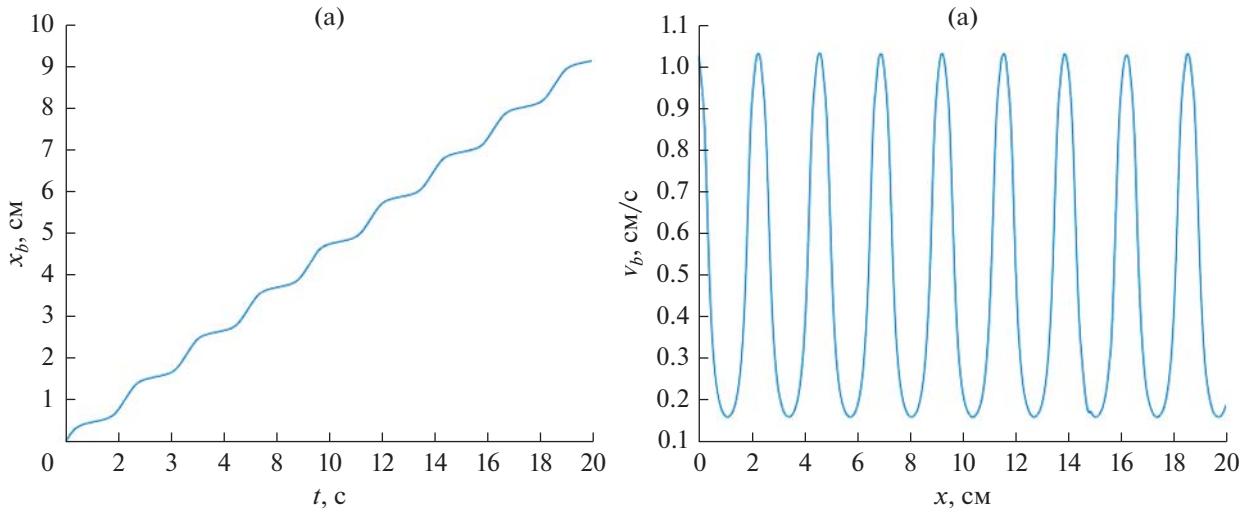


Рис. 3. (а) – Зависимость координаты пузырька  $x_b(t)$  от времени при его движении в резонаторе и (б) – скорости пузырька  $v_b(x)$  в зависимости от его положения в резонаторе.

$$\begin{aligned} R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{\rho} \left( -P_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + P_0 + \right. \\ \left. + P_a \cos(kx_b) \cos(\omega t) + \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\eta\dot{R}}{R} \right) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{dx_b}{dt} = V + \frac{1}{6\pi\eta R} F_r + \frac{2\rho g}{9\eta} R^2, \quad (14)$$

$$F_r = \frac{4}{3}\pi k P_a \sin(kx_b) \langle R^3(t, x_b) \cos(\omega t) \rangle. \quad (15)$$

Здесь, как и прежде, угловые скобки означают усреднение по периоду акустического поля.

Пример решения системы (13)–(15) для зависимости координаты  $x_b(t)$  пузырька от времени и

изменения его скорости вдоль резонатора приведен на рис. 3 ( $R_0 = 1$  мкм,  $V = 1$  см/с,  $f = 70$  кГц,  $P_a/P_0 \approx 1.8$ ).

Из данных на рис. 3 видно, что в процессе движения пузырька в резонаторе скорость его периодически очень значительно изменяется под действием радиационной силы. Если в резонатор вместе с потоком жидкости последовательно поступает много пузырьков, то расстояние между ними, а следовательно, и их концентрация, неравномерно распределены вдоль оси резонатора. Распределение концентрации в относительных единицах, полученное для тех же параметров, что и на рис. 3, приведено на рис. 4.

Видно, что в сильных акустических полях распределение концентрации пузырьков в резонаторе подвержено значительной пространственной модуляции. Следует отметить, что поскольку радиационная сила меняет знак для больших пузырьков ( $\omega > \omega_0$ ), то зоны их повышенной концентрации в резонаторе будут смещены в область минимальной концентрации маленьких пузырьков. Таким образом, проточный резонатор является своеобразным фильтром пузырьков, с помощью которого можно осуществлять их селекцию.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проанализировано движение пузырьков в проточном акустическом резонаторе в полях различной амплитуды. Неравномерное распределение радиационной силы, действующей на пузырьки, обуславливает неравномерное движение и как следствие неравномерное распределение концентрации пузырьков вдоль оси резонатора. Величина радиационной силы в слабых полях пропорциональна квадрату амплитуды поля, а в сильных полях степень превышает 4. Это спо-

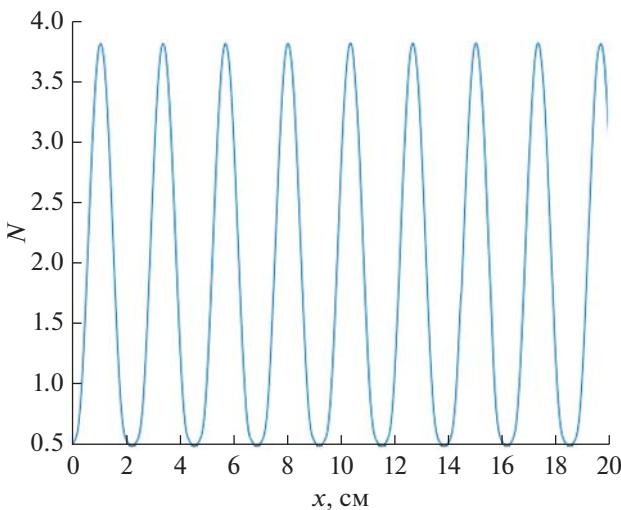


Рис. 4. Распределение концентрации  $N$  пузырьков вдоль оси резонатора.

существует более “резкому” пространственному распределению концентрации пузырьков в резонаторе. Создавая акустическое поле необходимой конфигурации, можно управлять распределением концентрации пузырьков разных размеров в проточных акустических системах. Рассмотренные эффекты могут также быть полезными для управления потоками пульсирующих малых частиц (частиц с мягкими включениями), в частности, некоторых биологических клеток.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание № 0729-2020-0040). Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Rudenko O.V., Korobov A.I., Korshak B.A., Lebedev-Stepanov P.V., Molchanov S.P., Afimov M.V.* Self-assembly of colloidal-particle ensembles in an acoustic field // Nanotechnologies in Russia. 2010. V. 5. P. 469–473.
- Суханов Д.Я., Росляков С.Н., Емельянов Ф.С.* Левитация и управление упорядоченной группой частиц и прямолинейных структур в ультразвуковом поле // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 2. С. 154–162.
- Гусев В.А., Руденко О.В.* Поля радиационных сил и акустические течения в жидким слое на твердом полупространстве // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 2. С. 166–181.
- Крохмаль А.А., Крохмаль Н.Е., Сапожников О.А.* Расчет акустической ловушки для упругого сферического рассеивателя большого волнового размера // Известия Росс. акад. наук. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 2. С. 257–262.
- Li P., Mao Z., Peng Z., Zhou L., Chen Y., Huang P.-H., Truica C.I., Drabick J.J., El-Deiry W.S., Dao M., Suresh S., Huang T.J.* Acoustic separation of circulating tumor cell // PNAS. 2015. P. 4970–4975.  
<https://doi.org/10.1073/pnas.1504484112>
- Горьков Л.П.* О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // Докл. Акад. наук СССР. 1961. Т. 140. № 1. С. 88–91.
- Sapozhnikov O.A., Bailey M.R.* Radiation force of an arbitrary acoustic beam on an elastic sphere in a fluid // J. Acous. Soc. Am. 2013. V. 133. № 2. P. 661–676.
- Николаева А.В., Цыарь С.А., Сапожников О.А.* Измерение радиационной силы мегагерцевого ультразвука, действующей на твердотельный сферический рассеиватель // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 1. С. 29–37.
- Eller A.* Force on a bubble in a standing acoustic wave // J. Acoust. Soc. Am. 1968. V. 43. P. 170–171.
- Crum A.* Bjerknes forces on bubbles in a stationary sound field // J. Acoust. Soc. Am. 1975. V. 57. P. 1363–1370.
- Leighton T.G., Walton A.J., Pickworth M.J.W.* Primary Bjerknes forces // Eur. J. Physics. 1990. V. 11. № 1. P. 47–50.
- Doinikov A.* Acoustic radiation force on a bubble: Viscous and thermal effects // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 103. P. 143–147.
- Maksimov A.O., Leighton T.G.* Acoustic radiation force on a parametrically distorted bubble // J. Acoust. Soc. Am. 2018. V. 143. P. 296–305.
- Brenner V.P., Hilgenfeld S., Lohse D.* Single-bubble sonoluminescence // Rev. Mod. Phys. 2002. V. 74. P. 425–484.
- Борисенок В.А.* Сонолюминесценция: эксперименты и модели (обзор) // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 3. С. 333–360.
- Токмаков П.Е., Гурбатов С.Н., Диденкулов И.Н., Прончатов-Рубцов Н.В.* О влиянии акустического поля на пространственное распределение газовых пузырьков в резонаторе // Вестн. ННГУ. Сер. Радиофизика. 2006. № 1(4). С. 31–40.
- Тихонов В.А., Диденкулов И.Н., Прончатов-Рубцов Н.В.* Численное моделирование движения газовых пузырьков в проточном резонаторе // Акуст. журн. 2013. Т. 59. С. 445–451.
- Диденкулов И.Н., Корчагина Т.С., Прончатов-Рубцов Н.В., Сагачева А.А.* Распространение звука в суспензиях: вращательные движения частиц и управление потоками // Изв. Росс. Акад. наук. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 6. С. 772–776.
- Birkin P.R., Offin D.G., Leighton T.G.* An activated fluid stream — New techniques for cold water cleaning // Ultrason. Sonochem. 2016. V. 29. P. 612–618.  
<https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2015.10.001>
- Secker T.J., Leighton T.G., Offin D.G., Birkin P.R., Herve' R.C., Keevil C.W.* A cold water, ultrasonically activated stream efficiently removes proteins and prion-associated amyloid from surgical stainless steel // J. Hospital Infection. 2020. V. 106. P. 649–656.  
<https://doi.org/10.1016/j.jhin.2020.09.021>
- Malakoutikhah M., Dolder C.N., Secker T.J., Zhu M., Harling C.C., Keevil C.W., Leighton T.G.* Industrial lubricant removal using an ultrasonically activated water stream, with potential application for Coronavirus decontamination and infection prevention for SARS-CoV-2 // Transaction of the IMF. 2020. V. 98. № 5. P. 258–270.
- Maksimov A.O., Leighton T.G.* Transient processes near the acoustic threshold of parametrically-driven bubble shape oscillations // Acta Acust. Acust. 2001. V. 87. P. 322–332.
- Maksimov A.O., Leighton T.G.* Pattern formation on the surface of a bubble driven by an acoustic field // Proc. Roy. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci. 2012. V. 468. P. 57–75.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.2011.0366>
- Maksimov A.O., Leighton T.G.* Acoustic radiation force on a parametrically distorted bubble // J. Acoust. Soc. Am. 2018. V. 143. P. 296–305.  
<https://doi.org/10.1121/1.5020786>
- Leighton T.G.* The acoustic bubble. Academic Press, London, San Diego, 1994. 640 p.
- Devin C.* Survey of thermal, radiation, and viscous damping of pulsating air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Am. 1959. V. 31. P. 1654–1667.
- Barber B.P., Hiller R.A., Lofstedt R., Puttermann S.J., Weninger K.R.* Defining the unknowns of sonoluminescence // Phys. Rep. 1997. V. 281. № 2. P. 65–143.
- Lauterborn W., Kurz T.* Physics of bubble oscillation // Rep. Prog. Phys. 2010. V. 73. P. 106501.
- Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 760 с.