

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОД НА КИЛЕ ТОРОСА В ШИРОКОЙ ПОЛОСЕ ЧАСТОТ

© 2023 г. В. А. Григорьев<sup>a, b, \*</sup>, А. А. Луньков<sup>b, c</sup>

<sup>a</sup> Воронежский государственный университет,  
Университетская пл. 1, Воронеж, 394018 Россия

<sup>b</sup> Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской Академии наук,  
ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

<sup>c</sup> Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
ул. 2-я Бауманская 5, Москва, 105005 Россия

\*e-mail: grig4@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.12.2022 г.

После доработки 09.02.2023 г.

Принята к публикации 16.03.2023 г.

В рамках численного моделирования исследуется возможность дистанционного акустического мониторинга килей торосов в мелководных волноводах, покрытых льдом. Рассматривается среднестатистический для арктического региона торос с осадкой кила 8 м, помещенный в волновод глубиной 40 м. Предполагается, что гряда тороса перпендикулярна акустической трассе, длина которой 10 км. Используется точечный широкополосный источник и вертикальная приемная антенна, необходимая для выделения модальных амплитуд. Показано, что взаимодействие мод на киле достаточно ярко проявляется в модуляции амплитуд мод в широкой полосе частот. Предложена методика анализа этой модуляции с помощью построения кепстрограмм (спектрограмм от спектра). На кепстрограммах выявляются дисперсионные кривые, соответствующие парам взаимодействующих мод. Затем по расположению дисперсионных кривых на кепстрограмме можно оценить местоположение кила на трассе.

*Ключевые слова:* мелкое море, модуляция амплитуды моды, кепстрограмма, дисперсионная кривая

DOI: 10.31857/S0320791923600178, EDN: AFIOKL

### ВВЕДЕНИЕ

Характерной особенностью арктического ледяного покрова являются торосы – хаотические нагромождения обломков льда, образующиеся в результате давления ледяных полей друг на друга. Торосы возникают при разломах льдов небольшой толщины (молодых или однолетних) и формируют на ледяном покрове протяженные гряды. В поперечном сечении гряды торосов состоят из надводной и подводной частей (паруса и кила), причем осадка кила в 3–5 раз больше высоты паруса [1] (рис. 1).

Масса льда в торосах составляет около 40% от всей массы льда Арктики [2]. По этой причине торосы играют важную роль в процессах теплообмена между океаном и атмосферой, оказывают влияние на климатические изменения в целом [3]. Кроме того, большая концентрация льда в торосах, особенно в киле, достигающего порою дна, представляет серьезную проблему для судоходства, угрожает эксплуатации нефтегазовых платформ, подводных трубопроводов и линий связи.

Обычно торосы имеют осадку кила около 10 м [1, 4]. Наблюдаются также экстремальные кили с осадкой до 40–50 м [2, 5]. Двигаясь в составе дрейфующих льдов на морских акваториях с глубинами до 50 м, кили торосов цепляют дно и пропахивают глубокие борозды [6]. Заметим, что айсберги в отличие от торосов имеют большие размеры килей. Кили крупных айсбергов оставляют следы на дне до глубин 150 м [6].

Исследования распространения звука в арктических волноводах при наличии неоднородного ледового покрова начали проводиться достаточно давно [7, 8], но продолжают оставаться актуальными и в настоящее время [9, 10]. Это связано с активным освоением арктического региона в последнее десятилетие, что требует адаптации алгоритмов звукоподводной связи [11] и методов акустического мониторинга подледной среды [12]. Отметим, что в указанных выше работах в основном рассматриваются условия глубокого океана и/или решается прямая задача оценки дополнительных потерь при распространении, связанных с наличием килей на протяженных трассах.

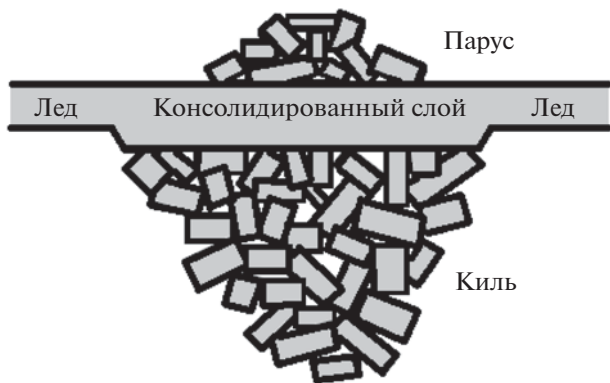


Рис. 1. Схема поперечного сечения гряды тороса.

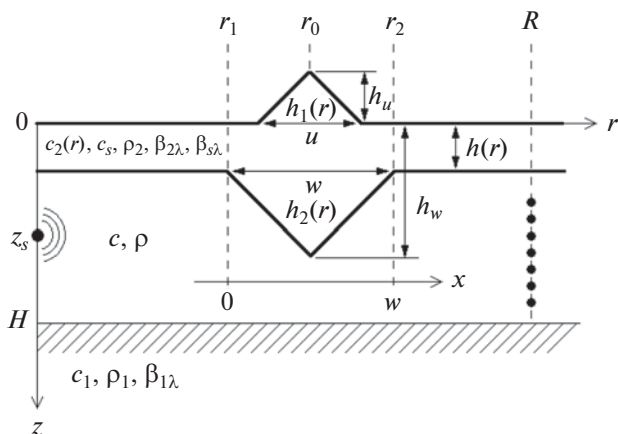


Рис. 2. Модель тороса и волновода.

В настоящей работе в рамках численного моделирования исследуется возможность решения обратной задачи, а именно дистанционного акустического мониторинга килей торосов в шельфовой зоне. В качестве первого приближения будет рассматриваться один среднестатистический торос с осадкой киля 8 м, помещенный в однородный по горизонтали волновод глубиной 40 м. (Средняя глубина Арктического шельфа России не превышает 50 м). Гряда тороса перпендикулярна акустической трассе, длина которой 10 км. Наличие тороса, прежде всего киля, нарушает однородность волновода по горизонтали, что в рамках модового описания распространения звука приводит к взаимодействию мод на киле. В результате на приемнике наблюдается возмущенное звуковое поле, отличное от невозмущенного поля в отсутствие тороса. В частотной области возмущение проявляется в модуляции амплитуд отдельных мод, подобно тому, как это наблюдалось в численных экспериментах [13] при взаимодействии мод на сосредоточенной неоднородности в виде солитона внутренних волн или локаль-

ном поднятии дна. Анализируя период этой модуляции, можно выделить информацию о местоположении киля на трассе.

## 1. МОДЕЛЬ ТОРОСА И ВОЛНОВОДА

### 1.1. Модель тороса

На рис. 1 показана схема поперечного сечения тороса. Парус и киль состоят из нагромождения ледяных блоков, между которыми имеются пустоты, заполненные воздухом (в парусе) и водой (в киле). Вода в верхней части киля на уровне поверхности льда замерзает, образуя консолидированный слой, состоящий только из льда.

Используем простейшую геометрическую модель тороса в виде двух равнобедренных треугольников [14] с вершинами на одной вертикали (рис. 2). Параметры треугольников выберем в соответствии с [1] как средние параметры торосов, измеренные в ряде районов Мирового океана Северного полушария:  $h_u = 2$  м,  $h_w = 8$  м,  $u = 12$  м,  $w = 36$  м (обозначения указаны на рис. 2). Толщину льда за пределами тороса примем равной  $h_0 = 1$  м.

Пусть центр тороса находится на горизонтальном расстоянии  $r_0$  от начала координат (рис. 2). Введем обозначения:  $r_1 = r_0 - w/2$ ,  $r_2 = r_0 + w/2$ . Тогда верхняя  $h_1(r)$  и нижняя  $h_2(r)$  границы льда описываются формулами:

$$h_1(r) = \begin{cases} -2h_u u^{-1}(r - r_0) - h_u, & r_0 - u/2 \leq r \leq r_0, \\ 2h_u u^{-1}(r - r_0) - h_u, & r_0 \leq r \leq r_0 + u/2, \\ 0, & r \notin [r_0 - u/2, r_0 + u/2], \end{cases} \quad (1)$$

$$h_2(r) = \begin{cases} 2(h_w - h_0)w^{-1}(r - r_0) + h_w, & r_1 \leq r \leq r_0, \\ -2(h_w - h_0)w^{-1}(r - r_0) + h_w, & r_0 \leq r \leq r_2, \\ h_0, & r \notin [r_1, r_2]. \end{cases} \quad (2)$$

Акустические параметры льда за пределами тороса возьмем из [15]:  $c_2^0 = 3500$  м/с – скорость продольных волн,  $c_s = 1800$  м/с – скорость поперечных волн,  $\rho_2 = 900$  кг/м<sup>3</sup> – плотность льда,  $\beta_{2\lambda} = 0.3$  дБ/λ – коэффициент затухания продольных волн,  $\beta_{s\lambda} = 1$  дБ/λ – коэффициент затухания поперечных волн.

Акустические параметры тороса будем считать соответствующими приведенным выше параметрам сплошного льда за исключением скорости продольных волн. Полагаем, что она зависит от горизонтальной координаты  $r$  и линейно меняется от  $c_2^0 = 3500$  м/с на краях тороса до  $c_2^1 = 2600$  м/с в центре. Таким образом, скорость  $c_2(r)$  продольных волн в торосе и за его пределами описывается формулой:

$$c_2(r) = \begin{cases} -2(c_2^0 - c_2^1)w^{-1}(r - r_0) + c_2^1, & r_1 \leq r \leq r_0, \\ 2(c_2^0 - c_2^1)w^{-1}(r - r_0) + c_2^1, & r_0 \leq r \leq r_2, \\ c_2^0, & r \notin [r_1, r_2]. \end{cases} \quad (3)$$

Объясним выбор приведенных выше параметров внутри тороса. Средняя пористость тороса составляет около 0.2 [1] (объем незанятого льдом пространства 20%, объем льда 80%). Лды тороса можно считать неподвижными для звука и составляющими жесткий каркас. По этой причине скорость поперечных волн в торосе можно считать примерно такой же, как в сплошном льду. Скорость продольных волн в торосе оценим по подводной части киля в рамках двухкомпонентной модели среды лед–вода, пренебрегая меньшими по объему парусом и консолидированным слоем. Согласно [16] для двухкомпонентной среды имеем следующее выражение для скорости продольных волн:

$$c_p = [((1 - \kappa)\rho_2 + \kappa\rho)((1 - \kappa)K_2 + \kappa K)]^{-1/2}, \quad (4)$$

где  $\kappa$  – пористость тороса,  $\rho$  – плотность воды,  $K$  и  $K_2$  – коэффициент сжимаемости воды и льда. Для чистой воды безо льда имеем  $\kappa = 1$  и при заданных значениях для воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_p = c = 1460 \text{ м/с}$  (см. раздел 1.2) из (4) получаем  $K = 4.7 \times 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}$ . Для сплошного льда без воды имеем  $\kappa = 0$  и при заданных выше значениях для льда  $\rho_2 = 900 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_p = c_2^0 = 3500 \text{ м/с}$  из (4) получаем  $K_2 = 9 \times 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$ . Вычисленные коэффициенты  $K$  и  $K_2$  соответствуют экспериментальным значениям. Используя эти  $K$  и  $K_2$  при пористости  $\kappa = 0.2$ , из (4) получаем  $c_p = 2600 \text{ м/с}$ . Это значение скорости продольных волн примем в центре тороса:  $c_2(r_0) = c_2^1 = 2600 \text{ м/с}$ .

Ввиду малого значения средней пористости тороса другие его акустические параметры (плотность, коэффициенты затухания продольных и поперечных волн) полагаем соответствующими сплошному льду.

### 1.2. Модель волновода

Модель волновода, покрытого льдом и содержащего один торос, представим в каждом поперечном сечении как трехслойное полупространство: лед–вода–дно.

Лед:  $h_1(r) \leq z < h_2(r)$ ,  $c_2(r)$  – скорость продольных волн,  $c_s$  – скорость поперечных волн,  $\rho_2$  – плотность,  $\beta_{2\lambda}$  и  $\beta_{s\lambda}$  – коэффициенты затухания продольных и поперечных волн. Значения указанных параметров приведены в разделе 1.1.

Вода:  $h_2(r) \leq z \leq H$ ,  $H = 40 \text{ м}$ ,  $c = 1460 \text{ м/с}$  – скорость звука,  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$  – плотность.

Дно:  $z > H$ ,  $c_1 = 1600 \text{ м/с}$  – скорость звука,  $\rho_1 = 1600 \text{ кг/м}^3$  – плотность,  $\beta_{1\lambda} = 0.33 \text{ дБ/}\lambda$  – коэффициент затухания звука в дне.

### 2. ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ В ВОДНОМ СЛОЕ

Пусть в системе координат  $(r, z)$  (рис. 2) координаты точечного источника  $(0, z_s)$ , где  $h_0 < z_s < H$ , а координаты приемника  $(R, z)$ . Запишем акустическое давление в точке приема на частоте  $\omega = 2\pi f$  в виде:  $p = \text{Re}\{P \exp(-i\omega t)\}$ , где  $P$  – комплексная амплитуда давления,  $t$  – время. Согласно модовой теории в пренебрежении горизонтальной рефракцией поле  $P$  для неоднородного волновода (неоднородность – это торос) представляется в виде [17]

$$P = \sum_{m=1}^M C_m(R) \frac{\Psi_m(R, z)}{\sqrt{q_m(R)} R} \exp\left(i \int_0^R q_m(r) dr\right), \quad (5)$$

где  $M$  – учитываемое число мод,  $C_m(r)$  – модовые коэффициенты,  $\Psi_m(r, z)$  и  $\xi_m(r) = q_m(r) + i\sigma_m(r)$  – нормированные собственные функции и собственные значения, определяемые из решения задачи Штурма–Лиувилля [18]:

$$\begin{aligned} \Psi_m'' + \varepsilon_m^2 \Psi_m &= 0, & h_2 < z < H, \\ \Psi_m(h_2) + g_{2m} \Psi_m'(h_2) &= 0, \\ \Psi_m(H) + g_m \Psi_m'(H) &= 0, \\ \int_{h_2}^H \Psi_m^2(z) dz + b_m \Psi_m^2(H) &= 1, \end{aligned} \quad (6)$$

где штрих означает производную по  $z$ , величины в аргументах функций соответствуют значениям переменной  $z$ ;  $\varepsilon_m, g_{2m}, g_m, b_m$  – значения функций  $\varepsilon(\xi), g_2(\xi), g(\xi), b(\xi)$  при  $\xi = \xi_m$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\xi) &= \sqrt{k^2 - \xi^2}, \\ g_2 &= \frac{m_2 a^2 (A_{41} + A_{42}) + 2d (aA_{44} - D)}{k_s^4 (2aA_{32} + 2dA_{34} - D)}, \\ g &= \frac{im_1}{\varepsilon_1}, \quad b(\xi) = \frac{i}{2m_1 \varepsilon_1}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \\ k_{1,2,S} &= \frac{\omega}{\dot{c}_{1,2,S}}, \quad \dot{c}_{1,2,S} = \frac{c_{1,2,S}}{1 + i\alpha_{1,2,S}/2}, \\ \alpha_{1,2,S} &= \frac{\beta_{1\lambda, 2\lambda, s\lambda} [\text{дБ/}\lambda]}{27.3}, \quad m_{1,2} = \frac{\rho_{1,2}}{\rho}, \\ \varepsilon_1 &= i\sqrt{\xi^2 - k_1^2}, \quad \varepsilon_{2,S} = \sqrt{k_{2,S}^2 - \xi^2}, \\ a &= k_s^2 - 2\xi^2, \quad d = 2i\varepsilon_s \xi^2, \\ E_{2,S} &= \exp(i\varepsilon_{2,S} h), \quad h = h_2 - h_1, \end{aligned}$$

$D = \det \mathbf{A}$  – определитель матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2i\varepsilon_2 E_2^{-1} & 2i\varepsilon_2 E_2 & aE_S^{-1} & aE_S \\ aE_2^{-1} & aE_2 & -dE_S^{-1} & dE_S \\ a & a & -d & d \\ i\varepsilon_2 & -i\varepsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  – алгебраические дополнения к соответствующим элементам матрицы  $\mathbf{A}$  (первый индекс – строка, второй индекс – столбец,  $M_{ij}$  – минор матрицы  $\mathbf{A}$ , равный определителю оставшейся матрицы при вычеркивании  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца).

Все радикалы  $\sqrt{*}$  в приведенных выше формулах и далее по тексту понимаются однозначно как главное значение<sup>1</sup> комплексного квадратного корня, у которого  $\operatorname{Re} \sqrt{*} > 0$ . Если  $\operatorname{Re} \sqrt{*} = 0$ , то выбирается значение, у которого  $\operatorname{Im} \sqrt{*} > 0$ . Данное правило соответствует функции `sqrt` в пакете прикладных программ MATLAB. В соответствии с данным правилом принципиальная при решении (6) величина  $\varepsilon_1$  выбрана в виде  $\varepsilon_1 = i\sqrt{\xi^2 - k_1^2}$ , что приводит к EJP-разрезу на комплексной плоскости  $\xi$  (гипербола  $\operatorname{Im} \xi = \operatorname{Re} k_1 \operatorname{Im} k_1 / \operatorname{Re} \xi$  при  $\operatorname{Re} \xi \leq \operatorname{Re} k_1$ ). EJP-разрез дает полное и конечное число нормальных мод в результате решения (6). Заметим, что выбор величины  $\varepsilon_1$  в виде  $\varepsilon_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}$  приводит к M-разрезу (гипербола  $\operatorname{Im} \xi = \operatorname{Re} k_1 \operatorname{Im} k_1 / \operatorname{Re} \xi$  при  $\operatorname{Re} \xi \geq \operatorname{Re} k_1$ ), что дает при решении (6) не только нормальные моды, но и квазимоды. Однако в данной работе квазимоды не учитываются ввиду их малого вклада. Запись поля в виде (5) означает также, что не учитывается непрерывный спектр. Подробнее о различных разрезах и классификации мод см. в [19, 20].

Поскольку  $c = \text{const}$ , то из (6) находим уравнение на собственные значения  $\xi_m$ :

$$\begin{aligned} & (1 + g_{2m} g_m \varepsilon_m^2) \sin(\varepsilon_m H_w) + \\ & + \varepsilon_m (g_m - g_{2m}) \cos(\varepsilon_m H_w) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $H_w = H - h_2$  – толщина водного слоя. Собственные функции при  $h_2 \leq z \leq H$  равны:

$$\begin{aligned} \Psi_m(z) &= N_m \bar{\Psi}_m(z), \\ \bar{\Psi}_m(z) &= \sin[\varepsilon_m(z - h_2)] - \\ & - g_{2m} \varepsilon_m \cos[\varepsilon_m(z - h_2)], \\ N_m &= \left[ \int_{h_2}^H \bar{\Psi}_m^2(z) dz + b_m \bar{\Psi}_m^2(H) \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

<sup>1</sup> Второе, не главное значение комплексного квадратного корня отличается от главного значения знаком.

Заметим, что везде в области вне тороса ( $r \notin [r_1, r_2]$ ) собственные функции и собственные значения не зависят от  $r$ . Обозначим их соответственно:  $\Psi_m^0(z)$  и  $\xi_m^0 = q_m^0 + i\sigma_m^0$ . Для области внутри тороса ( $r \in [r_1, r_2]$ ) удобно ввести новую переменную:  $x = r - r_1$ ,  $0 \leq x \leq w$ . Тогда в (5) имеем:  $\Psi_m(R, z) = \Psi_m^0(z)$ ,  $q_m(R) = q_m^0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^R q_m(r) dr &= \int_0^{r_1} + \int_{r_1}^{r_2} + \int_{r_2}^R = \\ &= q_m^0(R - w) + \int_0^w q_m^x(x) dx, \end{aligned}$$

где  $q_m^x(x)$  – реальная часть собственных значений внутри тороса как функция  $x$ .

Коэффициенты  $C_m(r)$  находятся из решения системы дифференциальных уравнений взаимодействия мод в неоднородном волноводе. Воспользуемся уравнениями, полученными в [21], которые применительно к нашему случаю имеют вид

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^M [(\delta_{mn} - I_{mn}) Q_n] \frac{dC_n}{dr} = \\ & = - \sum_{n=1}^M C_n [V_{mn} + \sigma_n (\delta_{mn} - I_{mn})] Q_n, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $m = 1, \dots, M$ ,  $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \frac{i\Psi_m(r, H)\Psi_n(r, H)}{m_1(\varepsilon_{1m} + \varepsilon_{1n})}, \\ Q_n &= \sqrt{q_n(r)} \exp\left(i \int_0^r q_n(r') dr'\right), \\ V_{mn} &= \int_{h_2(r)}^H \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} dz \end{aligned}$$

– коэффициенты взаимодействия мод. Начальные условия для системы (9) при  $r = 0$  задаются формулой:  $C_m(0) = \sqrt{\rho c W} \exp(i\pi/4) \Psi_m^0(z_s)$ , где  $W$  – мощность источника (при расчетах  $W = \text{const}$  для всех рассматриваемых частот звука).

Заметим, что коэффициенты взаимодействия мод в (9) выражаются через интегралы в конечных пределах (по водному слою). Это удобнее с вычислительной точки зрения, чем использование коэффициентов взаимодействия мод, выражающихся через интегралы в бесконечных пределах (по водному слою и дну), что имеет место в других известных уравнениях взаимодействия мод, аналогичных (9) [21]. Другое преимущество

системы (9) состоит в возможности учета взаимодействия не только нормальных мод, но и квазимод [21]. (В нашем случае это преимущество не используется, т.к. квазимоды не рассматриваются).

Заметим также, что в [21] система вида (9) была получена для неоднородного волновода с горизонтальными границами раздела сред. В нашем случае граница льда на киле не горизонтальна и к сделанным в [21] стандартным приближениям в процессе вывода (9) нужно добавить допущение о возможности замены компонент поля вдоль нормали к границе льда на компоненты вдоль оси  $z$  в исходных граничных условиях (выражения (A5) в [18]). Только в этом случае мы приходим к собственным числам и собственным функциям волновода сравнения (6), через которые выражаются коэффициенты  $C_m(r)$  согласно (9).

С физической точки зрения игнорирование угла между нормалью к границе льда и вертикалью означает неучет отраженного в обратном направлении поля от киля. Таким образом, выражения (5) и (9) учитывают только прямое поле и не учитывают отраженного поля. При выбранных выше параметрах тороса вектор нормали к боковой грани киля отклонен от вертикали на  $21^\circ$ . Это нельзя назвать малой величиной, поэтому отражение от киля может быть заметно. Вместе с этим, киль занимает 20% ширины водного слоя. При крайнем допущении полного отражения поля от киля (что недостижимо даже для киля с вертикальными стенками) прямое поле в волноводе все равно будет доминировать на 80%, и выражения (5) и (9) можно считать вполне адекватными (см. также замечание в конце раздела 3).

Введем в (9) матричные обозначения:  $\mathbf{X} = ((\delta_{mn} - I_{mn})Q_n)$ ,  $\mathbf{W} = (-V_{mn}Q_n)$ ,  $\mathbf{Y} = \text{diag}(\sigma_n)$ ,  $\mathbf{C} = (C_m)$ , где  $m$  – номер строки,  $n$  – номер столбца,  $\mathbf{Y}$  – диагональная матрица, составленная из строки  $(\sigma_n)$ . Тогда (9) приобретает вид:

$$\mathbf{X} \frac{d\mathbf{C}}{dr} = (\mathbf{W} - \mathbf{X}\mathbf{Y})\mathbf{C},$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{C}}{dr} = \mathbf{B}\mathbf{C}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{B} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{W} - \mathbf{Y}$ .

Рассмотрим три области:

1)  $0 \leq r \leq r_1$ . Здесь нет взаимодействия мод, т.е.  $V_{mn} = 0$ ,  $\mathbf{W} = 0$ ,  $\mathbf{B} = -\mathbf{Y}$ . Получаем систему независимых уравнений  $\frac{d\mathbf{C}}{dr} = -\mathbf{Y}\mathbf{C}$ , что эквивалентно

$\frac{dC_m}{dr} = -\sigma_m^0 C_m$ . Тогда решение имеет вид

$$C_m(r) = C_m(0) \exp(-\sigma_m^0 r), \quad 0 \leq r \leq r_1, \quad (11)$$

которое при  $r = r_1$  равно

$$C_m(r_1) = C_m(0) \exp(-\sigma_m^0 r_1). \quad (12)$$

2)  $r_1 \leq r \leq r_2$ . Здесь необходимо решить (9) или (10) с начальным условием (12). Перейдем к переменной  $x = r - r_1$ ,  $0 \leq x \leq w$ . Система (9) при этом приобретает вид:

$$\sum_{n=1}^M [(\delta_{mn} - I_{mn}^x) Q_n^x] \frac{dC_n^x}{dx} = - \sum_{n=1}^M C_n^x [V_{mn}^x + \sigma_n^x (\delta_{mn} - I_{mn}^x)] Q_n^x, \quad (13)$$

где

$$I_{mn}^x = \frac{i\Psi_m^x(x, H)\Psi_n^x(x, H)}{m_l(\epsilon_{lm} + \epsilon_{ln})},$$

$$Q_n^x = \sqrt{q_n^x(x)} \exp\left(i \int_0^x q_n^x(x') dx'\right),$$

$$V_{mn}^x = \int_{h_2(x)}^H \Psi_m^x \frac{\partial \Psi_n^x}{\partial x} dz,$$

$C_m^x(x) = C_m(x + r_1) \exp(iq_m^0 r_1)$ ,  $\Psi_m^x(x, z)$  и  $\xi_m^x(x) = q_m^x(x) + i\sigma_m^x(x)$  – собственные функции и собственные значения внутри тороса, как функции  $x$ . Начальные условия для системы (13):  $C_m^x(0) = C_m(r_1) \exp(iq_m^0 r_1)$ . Введем матрицы:  $\mathbf{X}_x = ((\delta_{mn} - I_{mn}^x) Q_n^x)$ ,  $\mathbf{W}_x = (-V_{mn}^x Q_n^x)$ ,  $\mathbf{Y}_x = \text{diag}(\sigma_n^x)$ ,  $\mathbf{C}_x = (C_m^x)$ . Тогда (13) приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{C}_x}{dx} = \mathbf{B}_x \mathbf{C}_x, \quad (14)$$

где  $\mathbf{B}_x = \mathbf{X}_x^{-1}\mathbf{W}_x - \mathbf{Y}_x$ . Если  $\mathbf{S}(x)$  – матрица фундаментальных решений [22]:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dx} = \mathbf{B}_x \mathbf{S}, \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{I}, \quad (15)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица, то  $\mathbf{C}_x(x) = \mathbf{S}(x)\mathbf{C}_x(0)$  или при  $x = w$ :  $\mathbf{C}_x(w) = \mathbf{S}(w)\mathbf{C}_x(0)$ . Переходя к исходным коэффициентам  $C_m$  и переменной  $r$ , получаем

$$C_m(r) = \sum_{n=1}^M S_{mn}(r - r_1) C_n(r_1) \exp\left[i(q_n^0 - q_m^0) r_1\right], \quad (16)$$

$$r_1 \leq r \leq r_2,$$

что при  $r = r_2$  равно

$$C_m(r_2) = \sum_{n=1}^M S_{mn}(w) C_n(r_1) \exp\left[i(q_n^0 - q_m^0) r_1\right]. \quad (17)$$

3)  $r_2 \leq r \leq R$ . Здесь нет взаимодействия мод, поэтому аналогично области 1 получаем:

$$C_m(r) = C_m(r_2) \exp[-\sigma_m^0(r - r_2)], \quad (18)$$

$$r_2 \leq r \leq R,$$

что при  $r = R$  равно

$$C_m(R) = C_m(r_2) \exp[-\sigma_m^0(R - r_2)] \quad (19)$$

или в развернутом виде

$$C_m(R) = \left\{ \sum_{n=1}^M S_{mn}(w) C_n(0) \exp[i(\xi_n^0 - \xi_m^0)r_1] \right\} \times \exp[-\sigma_m^0(R - w)]. \quad (20)$$

Таким образом, выражение (5) принимает вид:

$$P = \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{n=1}^M S_{mn}(w) C_n(0) \exp[i(\xi_n^0 - \xi_m^0)r_1] \right\} \times \frac{\Psi_m^0(z)}{\sqrt{q_m^0 R}} \exp\left(i \int_0^w q_m^x(x) dx + i\xi_m^0(R - w)\right). \quad (21)$$

### 3. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Запишем (21) в виде

$$P = \sum_{m=1}^{M(\omega)} A_m(\omega, r_0) \Psi_m^0(\omega, z), \quad (22)$$

где явно введены зависимости от частоты  $\omega$  и от положения  $r_0$  торося,  $A_m(\omega, r_0)$  – модальные амплитуды (или коэффициенты возбуждения мод), соответствующие (21).

Найдем квадраты модуля модальных амплитуд  $J_m(\omega, r_0) = |A_m(\omega, r_0)|^2$ :

$$J_m(\omega, r_0) = \left| \sum_{n=1}^{M(\omega)} S_{mn}(\omega, w) C_n(\omega, 0) \exp[i(\xi_n^0(\omega) - \xi_m^0(\omega))r_1] \right|^2 \frac{\exp[-2\sigma_m^0(\omega)(R - w)]}{q_m^0(\omega) R}, \quad (23)$$

которые кратко можно записать в виде

$$J_m(\omega, r_0) = \frac{|C_m(\omega, r_0, R)|^2}{q_m^0(\omega) R}, \quad (24)$$

где  $C_m(\omega, r_0, R)$  – модовые коэффициенты (20) с указанными зависимостями от  $\omega$  и  $r_0$ .

Заметим, что для волновода без торося квадраты модуля модальных амплитуд  $J_m^0(\omega) = |A_m^0(\omega)|^2$  имеют вид

$$J_m^0(\omega) = \frac{\rho c W |\Psi_m^0(\omega, z_s)|^2 \exp[-2\sigma_m^0(\omega) R]}{q_m^0(\omega) R}. \quad (25)$$

Выражения (23) вычислим при  $R = 10$  км, различных глубинах источника  $z_s$  и в полосе частот от десятков до сотен Гц.

Далее, проведем анализ с целью определения положения  $r_0$  кия по зависимостям  $J_m(\omega, r_0)$ . Для этого предлагается рассмотреть кепстрограмму (скользящее преобразование Фурье с окном  $\Delta\omega$  от спектра):

$$G_m(\Omega, \omega_0; r_0) = \left[ \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} [J_m(\omega, r_0) - \bar{J}_m(\omega_0, r_0)] \exp(i\Omega\omega) d\omega \right], \quad (26)$$

$$\text{где } \bar{J}_m(\omega_0, r_0) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} J_m(\omega, r_0) d\omega.$$

Пусть величина  $\Delta\omega$  такова, что в этой полосе в выражении (23) можно считать все переменные константами, кроме осциллирующего члена  $\exp[i(q_n^0(\omega) - q_m^0(\omega))r_1]$ , в котором полагаем линейную зависимость  $q_m^0(\omega) = \frac{dq_m^0}{d\omega}(\omega - \omega_0) + q_m^0(\omega_0)$ , где производная берется при  $\omega_0$ . Тогда (23) можно записать в виде

$$J_m = \left| \sum_{n=1}^M a_{mn} \exp\left[i\left(\frac{dq_n^0}{d\omega} - \frac{dq_m^0}{d\omega}\right)r_1\omega\right] \right|^2 \approx \left| \sum_{n=1}^M a_{mn} \exp(-i\Omega_{mn}\omega) \right|^2 = \sum_{n,l=1}^M a_{mn} a_{ml}^* \exp(i\Omega_{nl}\omega), \quad (27)$$

где учтено  $r_1 \approx r_0$ ,  $\Omega_{mn} = \left(\frac{dq_m^0}{d\omega} - \frac{dq_n^0}{d\omega}\right)r_0$ ,  $a_{mn}$  – комплексные константы, определяемые из (23), звездочка означает комплексное сопряжение. Константы  $a_{mn}$  представляют собой почти единичную матрицу, что связано с почти единичной матрицей  $S_{mn}$ . По этой причине  $|a_{mn} a_{ml}^*| \ll |a_{mm} a_{ml}^*|$  и  $|a_{mn} a_{ml}^*| \ll |a_{mn} a_{mm}^*|$ , где  $n \neq m$ ,  $l \neq m$ . Оставляя в (27) только значимые слагаемые, получаем

$$\begin{aligned}
 J_m &\approx \sum_{n=1}^M a_{mn} a_{mn}^* \exp(i\Omega_{mn}\omega) + \\
 &+ \sum_{n=1}^M a_{mn} a_{mm}^* \exp(i\Omega_{nm}\omega) = \\
 &= \sum_{n=1}^M b_{mn} \cos(\Omega_{mn}\omega + \varphi_{mn}),
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

где  $b_{mn} = 2|a_{mm}a_{mn}|$ ,  $\varphi_{mn} = \arg(a_{mm}) - \arg(a_{mn})$ .

Выражение (28) показывает, что в кепстрограмме  $G_m(\Omega, \omega_0; r_0)$  будут наблюдаться частоты модуляций амплитуд мод вида

$$|\Omega_{mn}| = \left| \frac{dq_m^0}{d\omega} - \frac{dq_n^0}{d\omega} \right| r_0.
 \tag{29}$$

На плоскости  $(\Omega, \omega_0)$  эти частоты модуляций представляют собой некоторые линии, которые будем называть дисперсионными кривыми. Зависимость от  $r_0$  проявляется в пропорциональном масштабировании (растягивании) кепстрограммы вдоль оси  $\Omega$ .

Заметим, что дисперсионные кривые определяются параметрами волновода без торося и не зависят от свойств самого торося (или любой другой локальной неоднородности), кроме расстояния  $r_0$  от источника. По этой причине обсуждаемый в разделе 2 вопрос точности описания поля (неучет отраженного поля от киля) важен для решения прямой задачи, но не играет принципиальной роли для решения обратной задачи. Действительно, более или менее точное решение прямой задачи приведет только к изменению яркости кепстрограммы на дисперсионных кривых, но не изменит расположения самих кривых, по которым оценивается положение киля на трассе.

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

### 4.1. Модальные амплитуды

Расчеты модальных амплитуд проводились в полосе 80–520 Гц с шагом 1 Гц. Учитывались только те моды, которые являются распространяющимися (т.е. удовлетворяющими условию  $\text{Re } k_1 < \text{Re } \xi_m < k$  и имеющими минимальное затухание) на протяжении всего канала, включая самый узкий участок под пиком киля. Например, для частоты 300 Гц число распространяющихся мод вне киля равно 7, а в сечении, проходящем через пик киля, таких мод 5. Поэтому при расчетах по формуле (23) бралось 5 мод. Количество учитываемых мод во всех диапазонах частот приведено в табл. 1.

На рис. 3 приведены примеры вычисленных согласно (23) и (25) частотных зависимостей  $J_m(\omega, r_0)$  для волновода с торосям (синяя линия) и

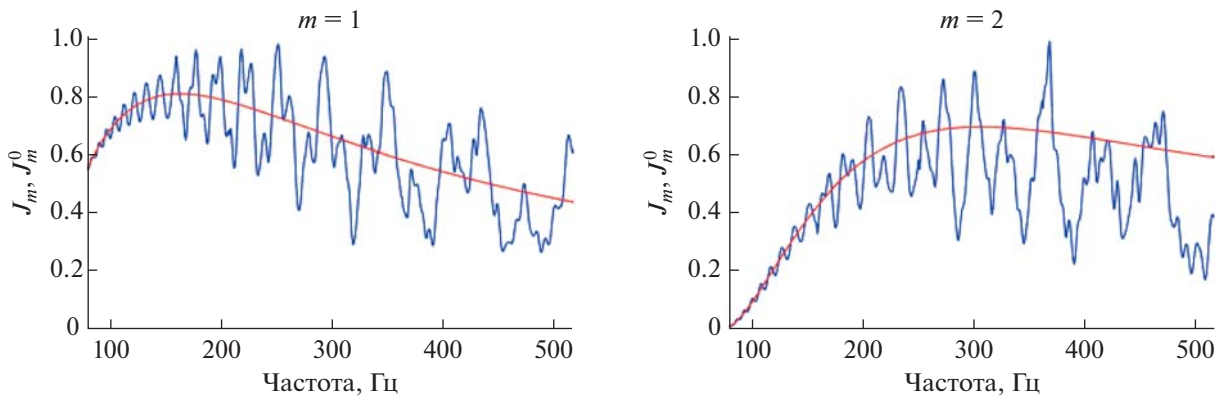
**Таблица 1.** Количество учитываемых мод

Диапазон частот, Гц	Число мод
80–160	2
161–208	3
209–252	4
253–308	5
309–363	6
364–419	7
420–475	8
476–520	9

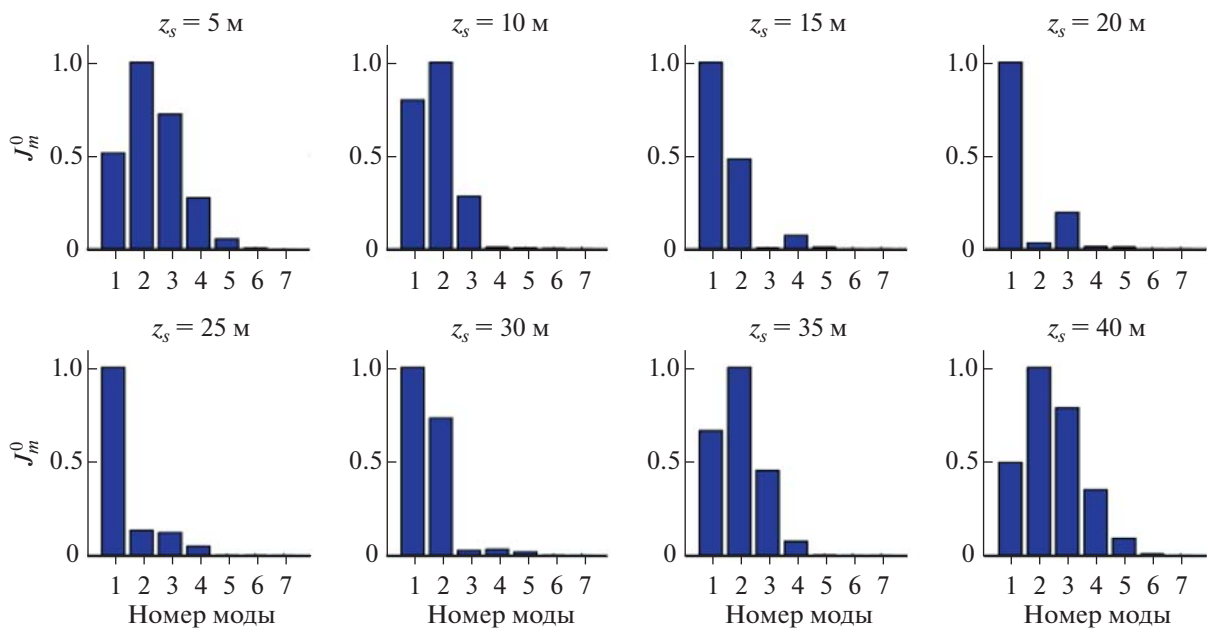
$J_m^0(\omega)$  для волновода без торося (красная линия). Наблюдающаяся в присутствии торося модуляция амплитуд мод содержит информацию о местоположении  $r_0$  киля. Кроме того, картина модуляции зависит от глубины источника  $z_s$ , поскольку глубина источника задает тот или иной набор мод в канале.

На рис. 4 для волновода без торося показаны величины  $J_m^0$  на частоте 300 Гц для всех распространяющихся мод и различных глубин источника. Хорошо видно, как меняется распределение энергии по модам в зависимости от глубины источника. Рис. 4 позволяет предсказать, какие частоты модуляции из полного спектра (29) будут наблюдаться в волноводе с торосям. Например, при  $z_s = 10$  м в канале доминируют первые три моды. Если смотреть спектр модуляции первой моды, то в нем будут доминировать частоты (дисперсионные кривые)  $|\Omega_{12}|$  и  $|\Omega_{13}|$ . При  $z_s = 15$  м рассмотрение спектра модуляции второй моды должно обнаруживать частоты  $|\Omega_{21}| = |\Omega_{12}|$  и  $|\Omega_{24}|$ .

На рис. 5 показаны примеры расчета кепстрограмм  $G_m(\Omega, \omega_0; r_0)$  согласно (26). При этом была подобрана полоса  $\Delta\omega/(2\pi) = 80$  Гц так, чтобы линии в кепстрограмме выглядели наиболее отчетливо. Соответствующие дисперсионные кривые, рассмотренные в предыдущем абзаце, хорошо ложатся на наблюдаемые частоты модуляции. На рис. 5а–5в рассматривается одна и та же ситуация ( $m = 1, z_s = 10$  м), но при разных положениях киля на трассе:  $r_0 = 7.5, 5, 2.5$  км (длина трассы 10 км). Видно, что по мере приближения киля к источнику звука (по мере уменьшения  $r_0$ ) кепстрограмма пропорционально сжимается вдоль горизонтальной оси. При этом на рис. 5в две близкорасположенные дисперсионные кривые сливаются в одну, что необходимо учитывать при определении величины  $r_0$ . В этом случае следует ограничить максимальную частоту сигнала до 250 Гц или выбрать глубину источника так, чтобы не наблюда-



**Рис. 3.** Зависимости  $J_m(\omega, r_0)$  для волновода с торосом (синяя линия) и  $J_m^0(\omega)$  для волновода без торося (красная линия). Моды  $m = 1$  и  $m = 2$ ,  $z_s = 10$  м,  $r_0 = 7.5$  км.



**Рис. 4.** Квадраты модуля модальных амплитуд  $J_m^0$  в волноводе без торося на расстоянии 10 км на частоте 300 Гц при различных глубинах источника.

лись две близкорасположенные дисперсионные кривые, которые могли бы слиться (например, при  $z_s = 20$  м в кепстрограмме первой моды наблюдается одна кривая  $|\Omega_{13}|$ ). Можно использовать также способ, предложенный в [13], — анализировать интервал между соседними максимумами непосредственно по картине модуляции амплитуды моды, без взятия кепстрограммы.

#### 4.2. Выделение модальных амплитуд

Зададимся вопросом, насколько хорошо модальные амплитуды  $A_m$  могут быть выделены с помощью вертикальной антенны. Пусть на неко-

торой частоте  $\omega$  имеем значения комплексной амплитуды  $P(z_n)$ , принимаемые на глубине  $z_n$ :

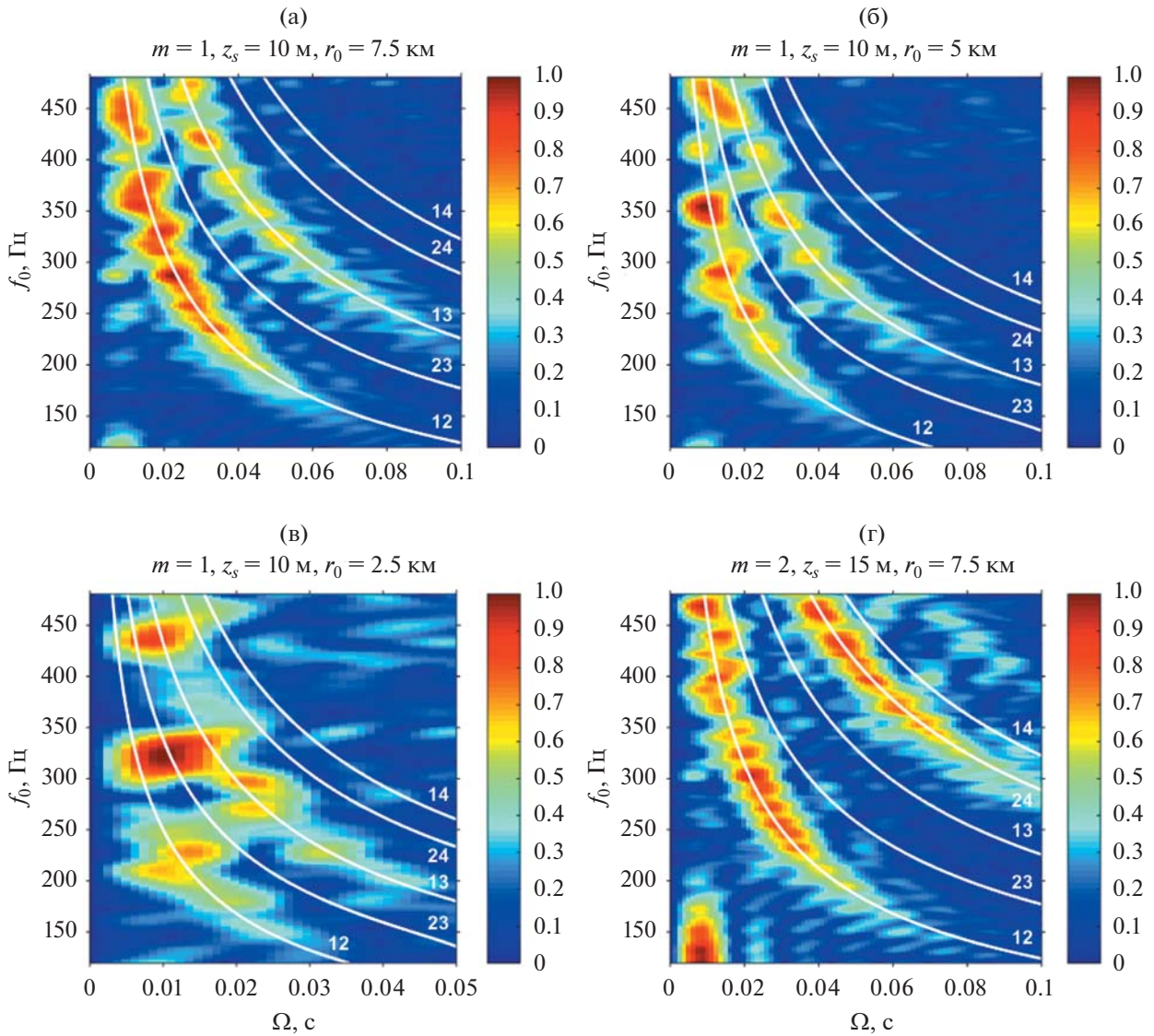
$$\sum_{m=1}^M A_m \psi_m^0(z_n) = P(z_n), \quad n = 1, \dots, N. \quad (30)$$

Значения собственных функций  $\psi_m^0(z_n)$  известны. Требуется найти  $A_m$ .

Используем метод псевдообратной матрицы. Запишем (30) в матричном виде:

$$\Psi \hat{A} = \mathbf{P}, \quad (31)$$





**Рис. 5.** Примеры кепстрограмм  $G_m(\Omega, \omega_0; r_0)$  при указанных на рисунке параметрах, где  $\omega_0 = 2\pi f_0$ . Белые линии – дисперсионные кривые  $|\Omega_{mn}|$ . На рис. 5в масштаб вдоль  $\Omega$  в два раза увеличен.

где  $\Psi = (\psi_m^0(z_n))$  – матрица размера  $N \times M$ ,  $\hat{A} = (A_m)$  – столбец размера  $M \times 1$ ,  $\mathbf{P} = (P(z_n))$  – столбец размера  $N \times 1$ .

Если  $\Psi^+$  – псевдообратная матрица размера  $M \times N$ , то

$$\hat{A} = \Psi^+ \mathbf{P}. \quad (32)$$

Заметим, что решение в виде (32) минимизирует норму  $\|\Psi \hat{A} - \mathbf{P}\|$  [23]. В MATLAB псевдообратная матрица вычисляется процедурой pinv.

Протестируем описанный выше метод выделения модальных амплитуд или, говоря иначе, метод выделения мод. Для этого сформируем со-

гласно (22) принимаемое поле. Затем выделим из этого поля пять значений  $A_m$  на каждой фиксированной частоте, используя метод псевдообратной матрицы. Расчеты показывают, что использование антенн с разным числом элементов, начиная от 40 ( $z_n = 1 : 1 : 40$  м) до 5 ( $z_n = 2 : 8 : 34$  м) не меняют визуального качества выделения первых пяти модальных амплитуд. При использовании 4 элементов антенны ( $z_n = 2 : 10 : 32$  м) хорошо выделяются только 1 и 2 моды. Соответственно, картины кепстрограмм для 1 и 2 мод, полученные после выделения мод антенной с числом элементов более трех, практически неотличимы от идеальных кепстрограмм, вычисленных без выделения мод антенной.

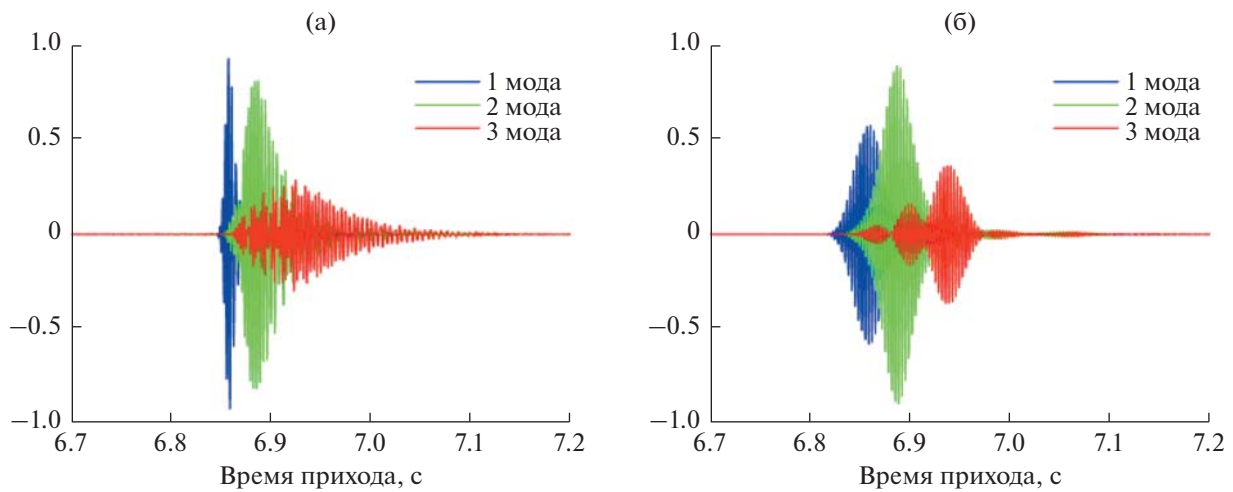


Рис. 6. Модовые импульсы в диапазонах: (а) –  $300 \pm 220$  Гц, (б) –  $300 \pm 40$  Гц.

### 4.3. Модовые импульсы

Если с помощью вертикальной антенны моды выделяются хорошо (раздел 4.2), то по времени прихода модовых импульсов на дальности 10 км моды не разделяются (рис. 6).

Поясним, как получен рис. 6. Предполагается, что излучается сигнал (импульс), амплитудный спектр которого в диапазоне  $[\omega_1, \omega_2]$  представляет собой колоколообразную форму с центром колокола на центральной частоте. При этом амплитуда гармоник излучаемого сигнала описывается окном Чебышева  $w(\omega)$  с уровнем боковых лепестков 100 дБ (процедура `chebwin` в MATLAB), фазовый спектр излучаемого сигнала равен нулю. Во временной области амплитуда излучаемого сигнала также имеет колоколообразную форму с максимумом при  $t = 0$ . Принимаемый модовый импульс описывается выражением

$$p_m(t) = \operatorname{Re} \int_{\omega_1}^{\omega_2} P_m(\omega) w(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (33)$$

где  $P_m(\omega) = A_m(\omega, r_0) \Psi_m^0(\omega, z)$  – комплексная амплитуда  $m$ -й моды (см. (22)).

На рис. 6 показаны принимаемые на расстоянии  $R = 10$  км модовые импульсы первых трех мод, полученные при излучении импульса в диапазонах  $300 \pm 220$  Гц и  $300 \pm 40$  Гц. Другие параметры расчетов:  $r_0 = 7.5$  км,  $z_s = z = 10$  м. Видно, что модовые импульсы значительно пересекаются независимо от рассматриваемой полосы частот. Следовательно, моды не могут быть успешно разделены по времени прихода для рассматриваемого расстояния между источником и приемником.

На рис. 6б обращает на себя внимание модовый импульс третьей моды. Он состоит из трех от-

дельных импульсов с разным временем прихода. Объясняется это следующим образом. В канале при рассматриваемой глубине источника доминируют первые три моды (рис. 4). Групповые скорости первых трех мод (на частоте 300 Гц) равны:

$$v_1 = 1458.0 \text{ м/с}, \quad v_2 = 1451.9 \text{ м/с}, \\ v_3 = 1441.4 \text{ м/с}.$$

Времена прихода основных по амплитуде модовых импульсов для этих трех мод соответственно равны:  $t_1 = R/v_1$ ,  $t_2 = R/v_2$ ,  $t_3 = R/v_3$ . Вместе с этим, моды 1 и 2, первоначально имеющие групповые скорости  $v_1$  и  $v_2$ , взаимодействуют с килем тороуса и порождают другие моды, в частности,

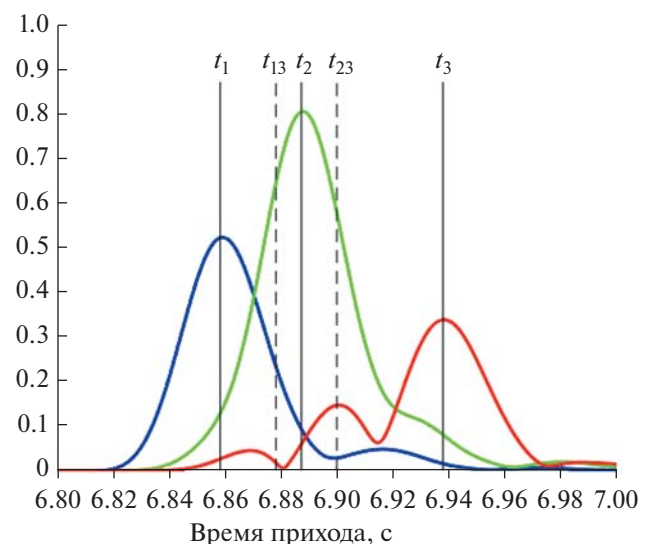


Рис. 7. Огибающие модовых импульсов, показанных на рис. 6б, с вычисленными с помощью групповых скоростей временами прихода.

моду 3, распространяющуюся после своего появления со скоростью  $v_3$ . Таким образом, принимаемые импульсы третьей моды, порожденные от импульсов первой и второй мод, имеют времена прихода соответственно равные:  $t_{13} = r_0/v_1 + (R - r_0)/v_3$ ,  $t_{23} = r_0/v_2 + (R - r_0)/v_3$ . На рис. 7 изображены огибающие модовых импульсов и показаны времена прихода, вычисленные по приведенным выше формулам. Некоторое несогласование наблюдается только между временем  $t_{13}$  и соответствующим максимумом.

Здесь следует отметить, что подход к мониторингу неоднородной подводной среды, основанный на регистрации времен прихода первичных и вторичных модовых импульсов, был впервые предложен и аналитически обоснован в работах [24, 25]. Применительно к мониторингу солитонов внутренних волн в эксперименте SWARM95 данный подход рассматривался в [26, 27]. При этом качественный анализ модовых импульсов требует применения как приемных, так и излучающих антенн.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, результаты моделирования показывают возможность дистанционного акустического мониторинга килей торосов в мелководных волноводах. Физической основой такой возможности является взаимодействие мод на киле, достаточно ярко проявляющееся в модуляции амплитуд мод в широкой полосе частот. Предложена методика анализа этой модуляции с помощью построения кепстрограмм. На кепстрограммах выявляются дисперсионные кривые, соответствующие взаимодействующим модам. Затем по расположению дисперсионных кривых на кепстрограмме можно определить местоположение килея на трассе. С практической точки зрения для мониторинга торосов достаточно источника, излучающего широкополосный сигнал, и приемной вертикальной антенны, расположенной на расстоянии нескольких километров.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-72-10121, <https://rscf.ru/project/22-72-10121/>.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strub-Klein L., Sudom D.* A comprehensive analysis of the morphology of first-year sea ice ridges // *Cold Regions Science and Technology*. 2012. V. 82. P. 94–109.
2. *Wadhams P.* A farewell to ice: a report from the Arctic. Oxford University Press, 2017. 240 p.
3. *Иванов Б.В.* Особенности турбулентного теплообмена вблизи восторженных участков морского льда // *Проблемы Арктики и Антарктики*. 2020. Т. 66. № 3. С. 364–380.
4. *Огородов С.А., Баранская А.В., Белова Н.Г., Кокин О.В., Маслаков А.А., Алексютина Д.М., Мазнев С.В., Новикова А.В., Селюженко В.В., Шабанова Н.Н., Вергун А.П., Кондратьева Д.М.* Атлас абразионной и ледово-эксаразионной опасности прибрежно-шельфовой зоны Российской Арктики. МГУ, 2020. <https://arcticcoast.ru/>
5. *Порубаев В.С.* Максимальная осадка килей гряд торосов в глубоководной части Северного Ледовитого океана // *Проблемы Арктики и Антарктики*. 2014. № 2 (100). С. 75–81.
6. *Огородов С.А., Баранская А.В., Белова Н.Г., Богатова Д.М., Кокин О.В., Маслаков А.А., Шабанова Н.Н., Мазнев С.В., Новикова А.В., Кондратьева Д.М., Вергун А.П.* Атлас абразионной и ледово-эксаразионной опасности прибрежно-шельфовой зоны российской Арктики // *Современные исследования трансформации криосферы и вопросы геотехнической безопасности сооружений в Арктике* / Под ред. Мельникова В.П. и Садуртдинова М.Р. Салехард: 2021. С. 315–318.
7. *Diachok O.I.* Effects of sea-ice ridges on sound propagation in the Arctic Ocean // *J. Acoust. Soc. Am.* 1976. V. 59. № 5. P. 1110–1120.
8. *Кудряшов В.М.* Расчет звукового поля в арктическом волноводе // *Акуст. журн.* 1996. Т. 42. № 3. С. 438–442.
9. *Hope G., Sagen H., Storheim E., Hobaek H.* Measured and modeled acoustic propagation underneath the rough Arctic sea-ice // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 142. № 3. P. 1619–1633.
10. *Ballard M.S.* Three-dimensional acoustic propagation effects induced by the sea ice canopy // *J. Acoust. Soc. Am.* 2019. V. 146. № 4. P. EL364–EL368.
11. *Балакин Р.А., Вилков Г.И.* Адаптация гидроакустического канала связи с технологией OFDM к негативному влиянию дрейфующего ледяного покрова // *Акуст. журн.* 2019. Т. 65. № 2. С. 223–231.
12. *Mikhalevsky P.N., Gavrilov A.N.* Acoustic thermometry in the Arctic Ocean // *Polar Research*. 2001. V. 20. № 2. P. 185–192.
13. *Луньков А.А., Шерменева М.А.* Взаимодействие мод на сосредоточенной неоднородности в мелководном акустическом волноводе в широкой полосе частот // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 5. С. 510–519.
14. *Андреев О.М.* Учет внутренней структуры килея тороса при термодинамических расчетах эволюции консолидированного слоя // *Лед и снег*. 2020. Т. 60. № 4. С. 547–556.
15. *Collis J.M., Frank S.D., Metzler A.M., Preston K.S.* Elastic parabolic equation and normal mode solutions for seismo-acoustic propagation in underwater environments with ice covers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2016. V. 139. № 5. P. 2672–2682.
16. *Рожин Ф.В., Тонаканов О.С.* Общая гидроакустика. М.: Издательство Московского университета, 1988. 160 с.
17. *Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J.* Fundamentals of Shallow Water Acoustics. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2012. 540 p.
18. *Григорьев В.А., Кучер К.М., Луньков А.А., Макаров М.М., Петников В.Г.* Акустические характеристики дна

- озера Байкал // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 5. С. 517–526.
19. Григорьев В.А., Петников В.Г. О возможности представления акустического поля в мелком море в виде суммы нормальных мод и квазимод // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 6. С. 681–698.
  20. Григорьев В.А. Оценка скорости звука в газонасыщенном слое осадков по времени прихода сигнала послевестника // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 3. С. 288–299.
  21. Grigor'ev V.A., Lunkov A.A., Petnikov V.G. Effect of Sound-Speed Inhomogeneities in Sea Bottom on the Acoustic Wave Propagation in Shallow Water // Physics of Wave Phenomena. 2020. V. 28. № 3. P. 255–266.
  22. Тихонов А.Н., Васильева А.Д., Свешиников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 231 с.
  23. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 559 с.
  24. Нечаев А.Г., Хилько А.И. Дифференциальная акустическая диагностика случайных неоднородностей океана // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 2. С. 285–289.
  25. Нечаев А.Г., Хилько А.И. Определение локальных характеристик океанических неоднородностей, распределенных вдоль акустической трассы // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 4. С. 694–699.
  26. Katsnelson B.G., Grigorev V., Badiy M., Lynch J.F. Temporal sound field fluctuations in the presence of internal solitary waves in shallow water // J. Acoust. Soc. Am. 2009. V. 126. № 1. P. EL41–EL48.
  27. Григорьев В.А., Кацнельсон Б.Г., Бадиев М., Lynch J. Акустические эффекты, обусловленные взаимодействием мод при распространении звука в мелком море в присутствии внутренних солитонов // Сборник трудов XIX сессии Российского акустического общества. Т. 2. М.: ГЕОС, 2007. С. 183–186.