

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ ВЛИЯНИЯ ПОДРЕЗКИ ТОНАЛЬНЫХ ОТВЕРСТИЙ ДЕРЕВЯННЫХ ДУХОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ НА СМЕЩЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ВОЗДУШНОГО КАНАЛА

© 2023 г. Р. А. Герасимов\*

*Военный ордена Жукова университет радиоэлектроники,  
Советский пр. 126, Череповец, 162622 Россия*

*\*e-mail: roman-gerasimoff@yandex.ru*

Поступила в редакцию 07.09.2022 г.

После доработки 19.12.2022 г.

Принята к публикации 22.12.2022 г.

Рассмотрено влияние наличия и величины радиуса кривизны в местах соединения тональных отверстий деревянных духовых инструментов с основным воздушным каналом (подрезка) на смещение его собственных частот. Приведена методика и формулы для численного расчета, позволяющие определять величину эффективного радиуса для открытого и закрытого тональных отверстий с переменным поперечным сечением. На основе полученных зависимостей с помощью метода передаточных матриц осуществлен расчет собственных частот воздушного канала с одним отверстием и проведено сравнение с результатами компьютерного моделирования в программе COMSOL Multiphysics 5.6. Показано, что увеличение степени подрезки звукового отверстия приводит к росту его эффективного радиуса, что повышает резонансные частоты в случае открытого отверстия и понижает в случае закрытого. Усреднение акустической массы (для открытого) и объема (для закрытого) по продольным сечениям отверстия, не обладающего вращательной круговой симметрией в области соединения с основным каналом, дает лучшие результаты при нахождении резонансных частот в сравнении с моделированием.

*Ключевые слова:* духовые музыкальные инструменты, подрезка тональных отверстий, метод передаточных матриц, метод конечных элементов, расчет собственных частот

DOI: 10.31857/S0320791923600257, EDN: QRYMZA

### ВВЕДЕНИЕ

Акустические свойства деревянных духовых инструментов в основном являются следствием их геометрии. Диаметр и высота звуковых отверстий, их расположение вдоль основного ствола канала и его геометрия, а также высота клапанов с подушками над отверстиями являются первостепенными факторами при определении резонансных частот, тембра, игровых характеристик и возможностей инструмента. Кривизна основного ствола воздушного канала, а также такие небольшие детали как толщина стенок тональных отверстий, наличие радиуса кривизны на границе соединения отверстия с основным каналом, тип подушек и резонатора, тоже оказывают влияние на положение собственных частот инструмента. Следует помнить, что любые незначительные изменения формы канала — расширения, сужения, разрывы, шероховатости, изгибы и т.д. — будут влиять на форму волны, распространяющейся вдоль канала, а следовательно, и на ее амплитудно-частотную характеристику, определяющую

тембр воспроизводимой ноты. Незначительные, на порядок меньше миллиметра, изменения геометрии корпуса могут оказать заметное влияние на результирующий звук и ощущения музыканта.

Глубокое и детальное изучение акустических характеристик воздушных каналов деревянных духовых инструментов увеличивает понимание их исторической эволюции и взаимосвязей между основными изменениями в конструкции и процессами генерации и передачи звука в модифицированных каналах. Это помогает также определять пертурбативные свойства дизайна, которые отличают инструменты одной и той же общей конструкции друг от друга, например, связь между изменениями в звуковых отверстиях или канале и откликом инструмента на исполнителя. Поскольку такие свойства зависят даже от небольших изменений в воздушном столбе, необходимо создавать подробные и точные модели, чтобы делать надежные прогнозы игровых характеристик инструмента.

В работах по изучению акустических характеристик воздушных каналов с тональными отверстиями обычно рассматривается только простая геометрия, когда основной канал представляет собой прямой цилиндр с боковым отростком (одним или несколькими) в виде такого же прямого цилиндра меньших размеров [1–8]. На практике деревянные духовые инструменты часто имеют радиус кривизны на стыке между боковым отверстием и основным каналом.

Подрезка тональных отверстий – это метод, который веками использовался производителями деревянных духовых инструментов для улучшения их игровых характеристик. Известен факт, что у звуковых отверстий хороших инструментов из дерева, таких как кларнеты, гобои и флейты эпохи Возрождения был удален материал из-под звукового отверстия, что эффективно уменьшало резкость краев. Подрезка подразумевает расширение звукового отверстия в области его соединения с основным воздушным каналом инструмента, при этом внешний размер отверстия остается неизменным. Данная процедура может включать в себя все, что угодно – от минимального закругления внутренних краев отверстия до изменения радиуса на большей части его высоты. Есть две основные причины для подрезания звукового отверстия: регулировка высоты ноты, сыгранной с ним как с первым открытым отверстием, и улучшение качества этой ноты, описывающей ее тембр, громкость или легкость исполнения.

В работе [9] экспериментально измерялся входной акустический импеданс специально изготовленных кларнетов со сменными звуковыми отверстиями как с острыми, так и с подрезанными краями, а также были проведены эксперименты, в ходе которых восемнадцать кларнетистов оценивали инструменты со скошенными и закругленными краями. При этом подавляющее большинство участников охарактеризовали инструменты с некоторой степенью подрезания или закругления как более качественные, чем с острыми краями. Несмотря на это, теме подрезки звуковых отверстий деревянных духовых инструментов посвящена очень небольшая часть литературы по музыкальной акустике. В работе [10] говорится, что закругление внутренних краев звуковых отверстий инструмента уменьшает турбулентность в колеблющемся потоке, идущем через них. Используя линейную акустическую теорию, в работе [11] описывается влияние подрезки на настройку нот в разных регистрах. Автор [11] называет также одним из результатов подрезки снижение потерь энергии, идущей на образование вихрей в потоке через отверстие. Влияние закругления краев боковых отверстий на нелинейные эффекты рассматривалось в случае волн с большими амплитудами в работе [12] и для различных уровней звука в [13] на прямоугольной геометрии

с расширением отверстия в виде усеченного конуса. Авторы [14] представляют метод экспериментального определения последовательного и шунтирующего акустического импеданса открытого звукового отверстия с подрезанием, рассматривая также конусообразное расширение отверстия.

Как видно, наличие сглаженности краев тонального отверстия оказывает влияние на частоту и тембр воспроизводимых нот, уменьшает локальные нелинейные явления потока (отрыв пограничного слоя и образование струй и вихрей) в звуковом отверстии, улучшая игровые характеристики инструмента. Но ни в одной из вышеперечисленных работ не приводится конкретного алгоритма расчета собственных частот воздушного канала с отверстием, имеющим переменное поперечное сечение, и влияния степени подрезки на смещение этих частот. В данной работе будут приведены методика и формулы для численного расчета, позволяющие определять величину эффективного радиуса для закрытого и открытого тональных отверстий, имеющих некоторый радиус кривизны (закругление) на стыке с основным каналом. На основе полученных зависимостей с помощью метода передаточных матриц будет осуществлен расчет собственных частот воздушного канала с одним отверстием и проведено сравнение с результатами компьютерного моделирования в программе COMSOL Multiphysics 5.6.

## МОДЕЛЬ

В работе рассматривался цилиндрический воздушный канал длиной  $L$  и радиусом  $a$ , в центре которого расположено перпендикулярное боковое отверстие высотой  $t$  и радиусом  $b$ , имеющее некоторый радиус кривизны  $r$  в месте сочленения отверстия с основным каналом (рис. 1).

Для нахождения собственных частот канала с перпендикулярным боковым отверстием использовался метод передаточных матриц. В данном методе каждая секция волновода (воздушного канала инструмента) представляется в виде матрицы  $T$ , связывающей звуковое давление  $p$  и объемную скорость  $U$  звуковых колебаний воздуха на входной и выходной плоскостях поперечного сечения  $S$  канала, и выражается как:

$$\begin{bmatrix} p_{\text{in}} \\ Z_0 U_{\text{in}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{\text{out}} \\ Z_0 U_{\text{out}} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $Z_0 = \rho c / S$  – акустическое сопротивление (импеданс) цилиндрического канала (трубы) площадью  $S = \pi a^2$ ,  $\rho$  – плотность воздуха,  $c$  – скорость звука в среде. Характеристики системы в целом рассчитываются на основе каждой передаточной матрицы и приведенного импеданса излучения открытого конца  $\bar{Z}_{\text{rad}} = p_{\text{out}} / Z_0 U_{\text{out}}$ :

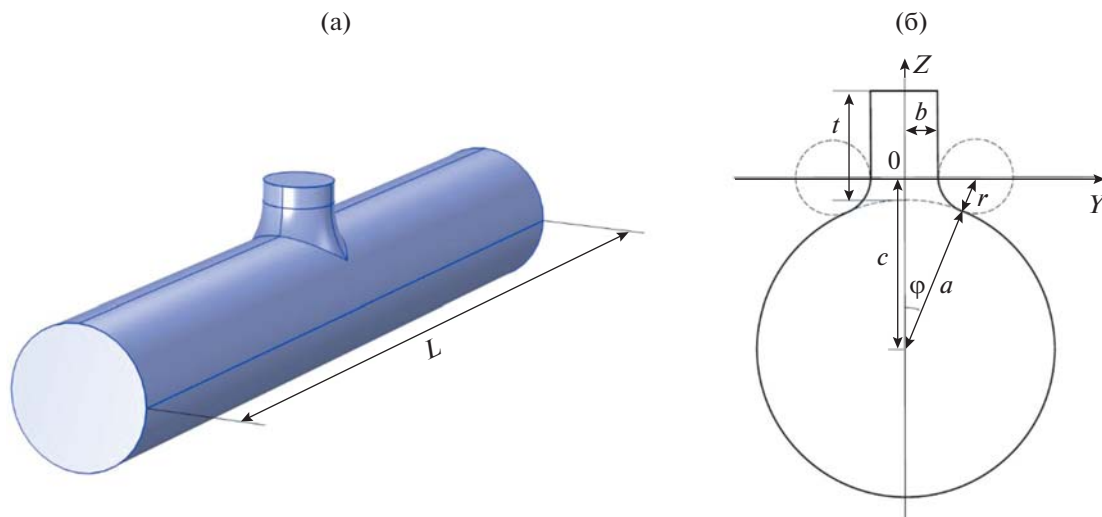


Рис. 1. (а) – Схематический вид прямого цилиндра длиной  $L$  с перпендикулярным боковым отверстием со скругленными краями, (б) – схема поперечного сечения цилиндра в плоскости  $ZOY$  в месте расположения бокового отверстия.

$$\begin{bmatrix} p_{in} \\ Z_0 U_{in} \end{bmatrix} = \left( \prod_{i=1}^n T_i \right) \begin{bmatrix} \bar{Z}_{rad} \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

а затем рассчитывается входной импеданс  $\bar{Z}_{in} = p_{in}/Z_0 U_{in}$ .

Воздушные каналы деревянных духовых инструментов представляют собой волноводы, состоящие из цилиндрических или конических секций с открытыми или закрытыми звуковыми отверстиями. Теоретическое выражение передаточной матрицы цилиндра длиной  $L$  без учета потерь энергии определяется как:

$$T_{cyl} = \begin{bmatrix} \cos kL & j \sin kL \\ j \sin kL & \cos kL \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где  $k = 2\pi f/c$  – волновое число,  $j = \sqrt{-1}$ .

Тональное отверстие может быть представлено в виде симметричной Т-образной секции (рис. 2), характеристики которой зависят от двух параметров: шунтирующего  $\bar{Z}_s = Z_s/Z_0$  и последовательного  $\bar{Z}_a = Z_a/Z_0$  импедансов. Передаточная матрица звукового отверстия имеет вид [1]

$$T_{hole} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{Z}_a/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\bar{Z}_s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \bar{Z}_a/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\bar{Z}_a}{2\bar{Z}_s} & \bar{Z}_a \left( 1 + \frac{\bar{Z}_a}{4\bar{Z}_s} \right) \\ \frac{1}{\bar{Z}_s} & 1 + \frac{\bar{Z}_a}{2\bar{Z}_s} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Импедансы  $\bar{Z}_s$  и  $\bar{Z}_a$  рассматриваются для открытого ( $o$ ) и закрытого ( $c$ ) состояний звукового отверстия и зависят от геометрических параметров

и частоты колебаний. Шунтирующий импеданс может быть представлен как [3, 11]

$$\bar{Z}_s^{(o)} = \frac{1}{\delta^2} (jkt_s^{(o)} + \xi_s), \tag{5}$$

$$\bar{Z}_s^{(c)} = -j \frac{1}{\delta^2 kt_s^{(c)}}, \tag{6}$$

где  $\xi_s$  – характерное шунтирующее сопротивление открытого отверстия,  $t_s$  – эквивалентная длина звукового отверстия, параметр  $\delta = b/a$  – отношение радиуса тонального отверстия к радиусу основного канала воздушного столба. Шунтирующее сопротивление  $\xi_s$  не влияет на расчетные резонансные частоты деревянных духовых инструментов, поэтому большинство исследователей усилий сосредоточено на определении поправки на эквивалентную длину  $t_s$ , которую в случае открытого отверстия авторы [12] представляют в виде

$$kt_s^{(o)} = kt_i + \text{tg}[k(t + t_m + t_r)],$$

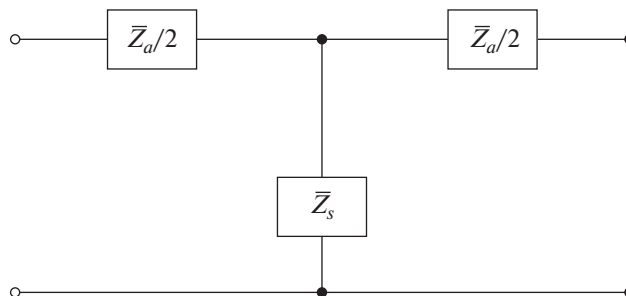


Рис. 2. Эквивалентная блок-схема тонального отверстия.

где  $t$  – геометрическая высота отверстия (рис. 1б),  $t_i$  – коррекция внутренней длины,  $t_m$  – эквивалентная длина, соответствующая дополнительно объему звукового отверстия, возникающему на стыке с основным каналом,  $t_r$  – поправка на длину, соответствующая дополнительному затуханию колебаний в связи с излучением и инерцией среды. В низкочастотном приближении ( $k(t + t_m + t_r) \ll 1$ ) можно записать

$$t_s^{(o)} = t + t + t_m + t_r. \quad (7)$$

Для параметра  $t_i$  (при условии  $t > b$ ) в литературе существует ряд формул. В данной работе при расчетах было использовано выражение авторов [5]

$$t_i = (0.82 - 1.4\delta^2 + 0.75\delta^{2.7})b. \quad (8)$$

Для длины  $t_m$  в случае острых краев те же авторы дают достаточно точное приближение

$$t_m = \frac{b\delta}{8}(1 + 0.207\delta^3). \quad (9)$$

Поправка  $t_r$ , соответствующая излучению, зависит от частоты колебаний и внешней геометрии окончания отверстия. В низкочастотном приближении ( $k(t + t_m + t_r) \ll 1$ ) это может быть

$$t_r = 0.6133b \text{ (труба без фланца)}, \quad (10)$$

$$t_r = 0.8216b \text{ (труба с бесконечным фланцем)} \quad (11)$$

либо другое промежуточное значение для более сложных ситуаций [15].

В случае закрытого бокового отверстия эквивалентную длину можно представить в виде

$$kt_s^{(c)} = \text{tg}[k(t + t_m)].$$

Коррекция внутренней длины также может быть рассмотрена для закрытого отверстия, но ее влияние невелико и становится значительным только на высоких частотах, поэтому в случае низких частот ( $k(t + t_m) \ll 1$ ) можно записать

$$t_s^{(c)} = t + t_m. \quad (12)$$

Последовательный импеданс звукового отверстия представляет собой небольшую отрицательную акустическую инертность

$$\bar{Z}_a^{(o/c)} = -jkt_a^{(o/c)}, \quad (13)$$

что немного уменьшает эффективную длину инструмента, увеличивая резонансные частоты. В уравнении (13) соответствующая поправка на длину  $t_a$  имеет ряд выражений, полученных разными авторами. В данной работе в случае открытого отверстия использовалось соотношение авторов [5]

$$t_a^{(o)} = 0.28b\delta^2, \quad (14)$$

в случае закрытого отверстия [6]

$$t_a^{(c)} = \frac{b\delta^2}{1.78 \text{cth}(1.84t/b) + 0.940 + 0.540\delta + 0.285\delta^2}. \quad (15)$$

В целом для цилиндрического канала с одним отверстием, основываясь на методе передаточных матриц, можно записать

$$\begin{bmatrix} p_{in} \\ Z_0 U_{in} \end{bmatrix} = T_{cyl} T_{hole} T_{cyl} \begin{bmatrix} \bar{Z}_{rad} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где импеданс излучения  $\bar{Z}_{rad}$  открытого конца в общем случае зависит от частоты колебаний и для трубы без фланца в низкочастотном приближении ( $ka \ll 1$ ) имеет вид [16]

$$\bar{Z}_{rad} = \frac{(ka)^2}{4} + jk(0.6133a), \quad (17)$$

а для трубы с фланцем [17]

$$\bar{Z}_{rad} = \frac{(ka)^2}{2} + jk(0.8216a). \quad (18)$$

При условии  $\bar{Z}_{in} = p_{in}/Z_0 U_{in} \rightarrow \infty$  можно определить резонансные частоты канала.

Появление радиуса кривизны  $r$  на стыке тонального отверстия с основным каналом влечет изменение его радиуса и смещение резонансных частот. Расчет собственных частот воздушного канала в данном случае можно осуществить по описанным выше формулам, заменив боковое отверстие на акустически ему эквивалентное с острыми краями и эффективным радиусом  $b_{eff}$ .

## ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

Радиус  $b_{eff}$  можно определить из равенства шунтирующих импедансов  $Z_s$  отверстий с острыми и скругленными краями. Открытое тональное отверстие в основном эквивалентно акустической инертности [18], поэтому

$$Z_s^{(o)} = j\omega m_a. \quad (19)$$

Акустическую массу  $m_a$  в случае переменного поперечного сечения можно рассчитать как

$$m_a = \rho \int_{L_h} \frac{1}{S(z)} dz, \quad (20)$$

где  $\rho$  – плотность воздуха,  $S(z)$  – площадь поперечного сечения отверстия на уровне  $z$ ,  $L_h$  – высота отверстия.

Закрытое отверстие, имеющее объем  $V$ , в основном ведет себя как акустическая податливость  $c_a$  [18], поэтому

$$Z_s^{(c)} = -j \frac{1}{\omega c_a}, \quad (21)$$

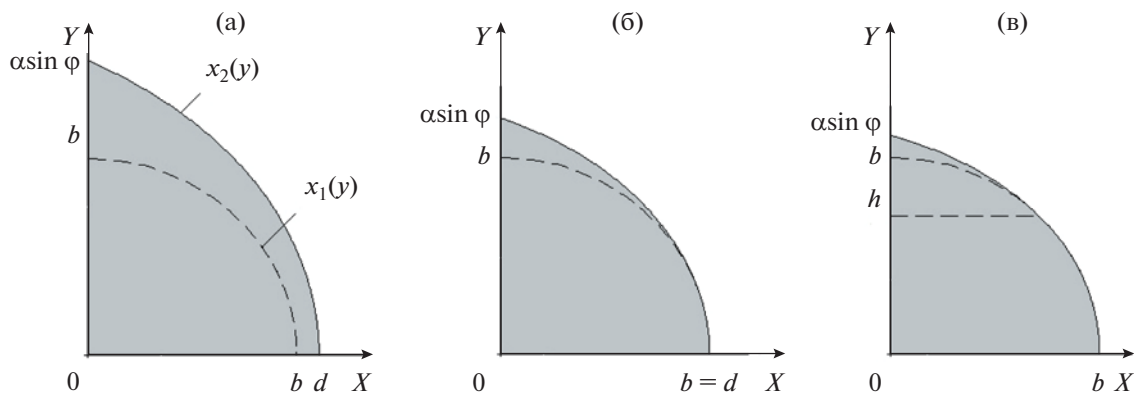


Рис. 3. Поперечное сечение тонального отверстия в плоскости основания ( $z = -r \cos \varphi$ ): (а) – при  $r > r_0$ , (б) – при  $r = r_0$ , (в) – при  $r < r_0$ .

где

$$c_a = \frac{V}{\rho c^2}. \tag{22}$$

Для дальнейшего численного расчета необходимо записать уравнения поверхностей, ограничивающих тональное отверстие.

Основной канал, расположенный перпендикулярно плоскости рис. 1б вдоль оси  $X$ , определяется уравнением

$$(z + c)^2 + y^2 = a^2, \tag{23}$$

где параметр  $c = (a + r) \cos \varphi$ .

Сглаженность соединения звукового отверстия с основным каналом можно представить как наличие тора с образующей окружностью радиуса  $r$ , “опоясывающего” цилиндрическое отверстие. Его уравнение будет иметь вид

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2, \tag{24}$$

где  $R = b + r$  – расстояние от оси  $Z$  до центра образующей окружности. При любом радиусе кривизны  $r$  высота  $t$  тонального отверстия над каналом остается неизменной, а тор в плоскости сечения  $ZOY$  касается основного канала, поэтому в данной плоскости происходит плавный переход от канала к отверстию, в отличие от всех остальных вертикальных плоскостей сечения, где будет существовать некий угол на стыке (рис. 1).

Уравнение бокового отверстия имеет вид  $x^2 + y^2 = b^2$ , откуда

$$x_1(y) = \sqrt{b^2 - y^2}.$$

Решив совместно (23) и (24), определим уравнение линии пересечения нижней части тора и основного канала

$$x_2(y) = \sqrt{(R - \sqrt{r^2 - (\sqrt{a^2 - y^2} - c)^2})^2 - y^2}.$$

В зависимости от величины радиуса кривизны  $r$  отверстие в плоскости основания ( $z = -r \cos \varphi$ ) будет иметь различные формы поперечного сечения (рис. 3). Параметр  $d$  (рис. 3а) находится из условия

$$d = x_2(0) = R - \sqrt{r^2 - (a - c)^2},$$

откуда при  $d = b$  (рис. 3б) можно получить граничное значение приведенного радиуса кривизны ( $\epsilon = r/b$ )

$$\epsilon_0 = \frac{\delta}{2(1 - \delta)}.$$

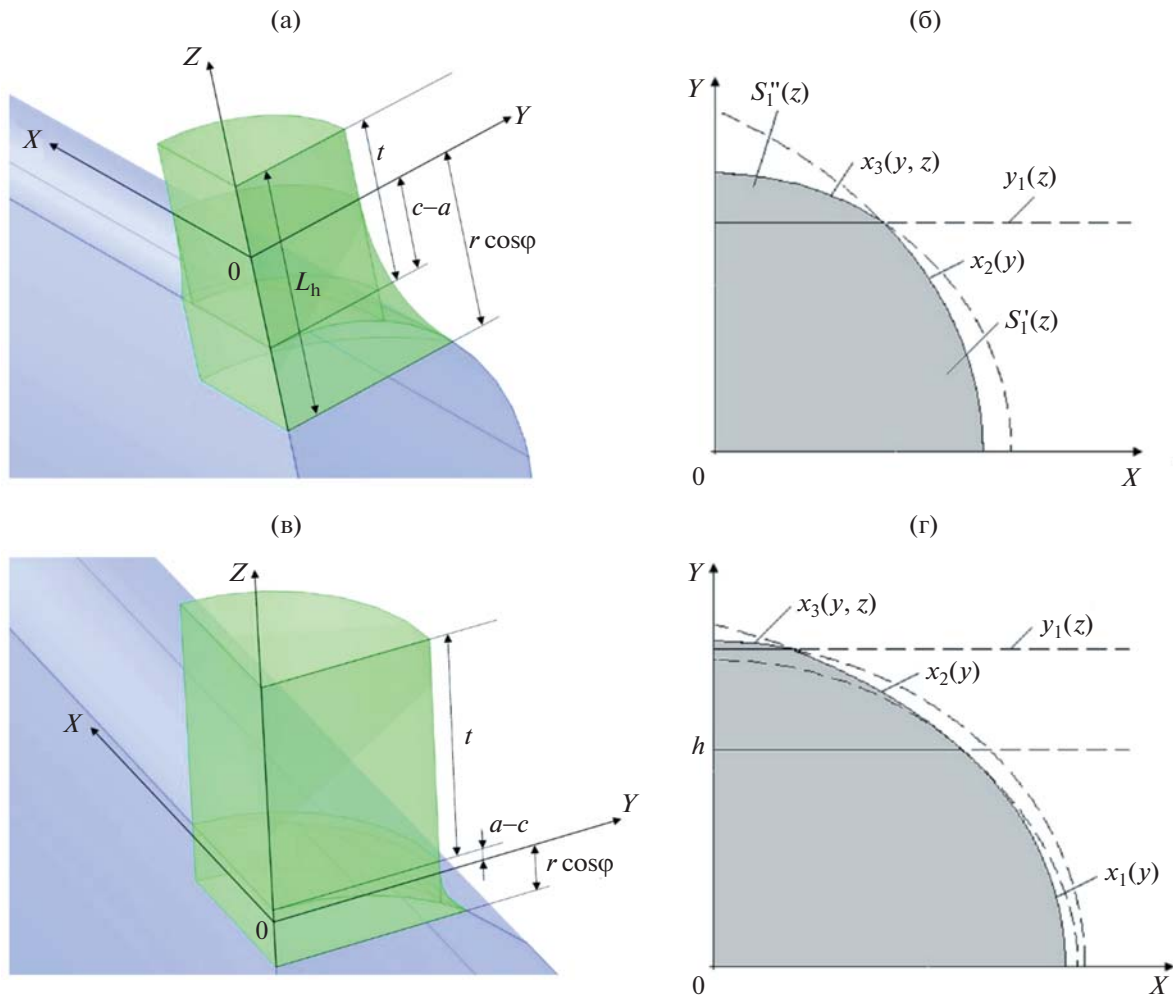
При дальнейшем уменьшении радиуса  $r$  закругленность краев отверстия будет начинаться только на некотором расстоянии  $h$  от оси основного канала (рис. 3в), определяемого условием  $x_1(h) = x_2(h)$ , откуда

$$h = \sqrt{b^2 - 2r(a - b)}.$$

В общем площадь поперечного сечения тонального отверстия зависит от координаты  $z$  и в случае  $r > r_0$  имеет три различных для вычисления области (рис. 4а). При  $-r \cos \varphi \leq z < -(c - a)$  (рис. 4б)

$$S_{11}(z) = S'_1(z) + S''_1(z) = 4 \left( \int_0^{y_1(z)} \int_0^{x_2(y)} dx dy + \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \int_0^{x_3(y,z)} dx dy \right), \tag{25}$$

где  $y_1(z) = \sqrt{a^2 - (z + c)^2}$  находится из (23), а пределы  $x_3(y, z) = \sqrt{(R - \sqrt{r^2 - z^2})^2 - y^2}$ ,  $y_2(z)|_{x=0} = R - \sqrt{r^2 - z^2}$  выражаются из (24). При



**Рис. 4.** (а) – Полный объем тонального отверстия при  $r > r_0$ , (б) – поперечное сечение отверстия вблизи основания на уровне  $-r \cos \varphi \leq z < -(c - a)$  при  $r > r_0$ , (в) – объем тонального отверстия при  $r < r_0$ , (г) – поперечное сечение отверстия вблизи основания на уровне  $-r \cos \varphi \leq z < -(c - a)$  при  $r < r_0$ .

$-(c - a) \leq z < 0$  поперечное сечение представляет собой окружность с постепенно уменьшающимся от  $d$  до  $b$  радиусом

$$S_2(z) = 4 \int_0^{y_2(z)} \int_0^{x_3(y,z)} dx dy, \quad (26)$$

а при  $0 \leq z \leq t - (c - a)$  – окружность постоянно-го радиуса  $b$ ,

$$S_3(z) = \pi b^2.$$

В случае малых радиусов кривизны ( $r \leq r_0$ , рис. 4в) отверстие не будет иметь поперечного сечения с площадью  $S_2(z)$ , а площадь сечения в области основания (рис. 4г) при  $-r \cos \varphi \leq z < -(c - a)$  будет равна

$$S_{12}(z) = 4 \left( \int_0^h \int_0^{x_1(y)} dx dy + \int_h^{y_1(z)} \int_0^{x_2(y)} dx dy + \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \int_0^{x_3(y,z)} dx dy \right). \quad (27)$$

Интегрирование в формулах (25)–(27) проводится в пределах первой четверти.

Акустическую массу всего объема отверстия при  $r > r_0$  можно рассчитать как

$$m_{a1} = \rho \left[ \int_{-r \cos \varphi}^{-(c-a)} \frac{1}{S_{11}(z)} dz + \int_{-(c-a)}^0 \frac{1}{S_2(z)} dz + \int_0^{t-(c-a)} \frac{1}{S_3(z)} dz \right], \quad (28)$$

а при  $r \leq r_0$

$$m_{a2} = \rho \left[ \int_{-r \cos \varphi}^0 \frac{1}{S_{12}(z)} dz + \int_0^{t-(c-a)} \frac{1}{S_3(z)} dz \right]. \quad (29)$$

Тональное отверстие, имеющее закругленные края, в отличие от отверстия с острыми краями, не обладает вращательной круговой симметрией в области соединения с основным каналом (сечения  $S_{11}$  и  $S_{12}$ ), что также должно оказывать влияние на смещение резонансных частот. Чтобы учесть указанную несимметричность, в данной работе дополнительно было проведено усреднение акустических масс (28)–(29) по центральным продольным сечениям отверстия. Зависимость формы вертикального сечения отверстия от угла поворота секущей плоскости эквивалентна зависимости от координаты  $z_1$ , выше которой площадь поперечного сечения  $S_{11}$  или  $S_{12}$  изменяется, а ниже  $z_1$  – остается постоянной (рис. 4а, 4в), т.е.

$$m_{a1}(z_1) = \rho \left[ \int_{-r \cos \varphi}^{z_1} \frac{1}{S_{11}(z_1)} dz + \int_{z_1}^{-(c-a)} \frac{1}{S_{11}(z)} dz + \int_{-(c-a)}^0 \frac{1}{S_2(z)} dz + \int_0^{t-(c-a)} \frac{1}{S_3(z)} dz \right], \quad r > r_0,$$

$$m_{a2}(z_1) = \rho \left[ \int_{-r \cos \varphi}^{z_1} \frac{1}{S_{12}(z_1)} dz + \int_{z_1}^0 \frac{1}{S_{12}(z)} dz + \int_0^{t-(c-a)} \frac{1}{S_3(z)} dz \right], \quad r \leq r_0.$$

Усредненные акустические массы

$$m_{a1}^{\text{av}} = \frac{1}{r \cos \varphi - (c-a)} \int_{-r \cos \varphi}^{-(c-a)} m_{a1}(z_1) dz_1, \quad r > r_0, \quad (30)$$

$$m_{a2}^{\text{av}} = \frac{1}{r \cos \varphi} \int_{-r \cos \varphi}^0 m_{a2}(z_1) dz_1, \quad r \leq r_0. \quad (31)$$

Следует также учитывать, что изменение радиуса, обусловленное наличием подрезки у тонального отверстия, затрагивает и другие параметры, связанные с ним. Поэтому некорректно было бы искать эффективный радиус  $b_{\text{eff}}$ , рассматривая только изменившуюся геометрию отверстия и связанную с ней акустическую массу (30)–(31). Данные выражения должны включать все величины, входящие в эквивалентную длину  $t_s$  (см. формулу (7)) открытого отверстия, поэтому

$$m_a' = m_a^{\text{av}} + \rho \int_0^{t_i+t_m+t_r} \frac{1}{S_3(z)} dz, \quad (32)$$

где  $t_i$ ,  $t_m$  и  $t_r$  определяются зависимостями (8), (9) и (10)–(11) соответственно.

Эквивалентное отверстие с острыми краями и радиусом  $b_{\text{eff}}$  представляет собой прямой цилиндр с акустической массой

$$m_a^{\text{eq}} = \rho \frac{t_i(b_{\text{eff}}) + L_h + t_m(b_{\text{eff}}) + t_r(b_{\text{eff}})}{\pi b_{\text{eff}}^2}, \quad (33)$$

где  $L_h = t - (c - a) + r \cos \varphi$  – полная геометрическая высота отверстия. Приравнявая массы (32) и (33) (а значит, и шунтирующие импедансы отверстий), можно найти эффективный радиус  $b_{\text{eff}}$  и рассчитать резонансные частоты воздушного канала с открытым отверстием при различных радиусах кривизны  $r$ .

Объем тонального отверстия, исключаяющий объем основного канала (рис. 5а, 5б), будет определяться выражениями

$$V_1 = \int_{-r \cos \varphi}^{-(c-a)} S_1''(z) dz + \int_{-(c-a)}^0 S_2(z) dz + \int_0^{t-(c-a)} S_3(z) dz, \quad r > r_0, \quad (34)$$

$$V_2 = \int_{-r \cos \varphi}^0 S_1''(z) dz + \int_0^{a-c} S_4(z) dz + \int_{a-c}^{t+(a-c)} S_3(z) dz, \quad r \leq r_0, \quad (35)$$

где площадь поперечного сечения  $S_4(z) = 4 \int_{y_1(z)}^b \int_0^{x_1(y)} dx dy$ . Аналогичным образом можно учесть отсутствие круговой симметрии у отверстия в области его соединения с основным каналом и использовать вместо выражений (34)–(35) усредненные объемы. Процедура усреднения должна затрагивать только дополнительный объем  $V_m'$ , обусловленный наличием радиуса кривизны на стыке цилиндра и канала, поэтому необходимо записать выражение для собственного объема отверстия, выделив отдельно слагаемое  $V_m'$  (рис. 5а, 5б).

Объем цилиндрического отверстия с острыми краями ( $r = 0$ , при этом  $c = c_0 = \sqrt{a^2 - b^2}$ ) равен

$$V_0 = \int_0^{a-c_0} S_4(z) dz + \pi b^2 t, \quad (36)$$

где первое слагаемое определяет дополнительный объем  $V_m'$  в области сочленения отверстия и основного канала.

Поперечные сечения дополнительного объема  $V_m'$  при  $r > r_0$  ( $c \neq c_0$ ) имеют три различные для вы-

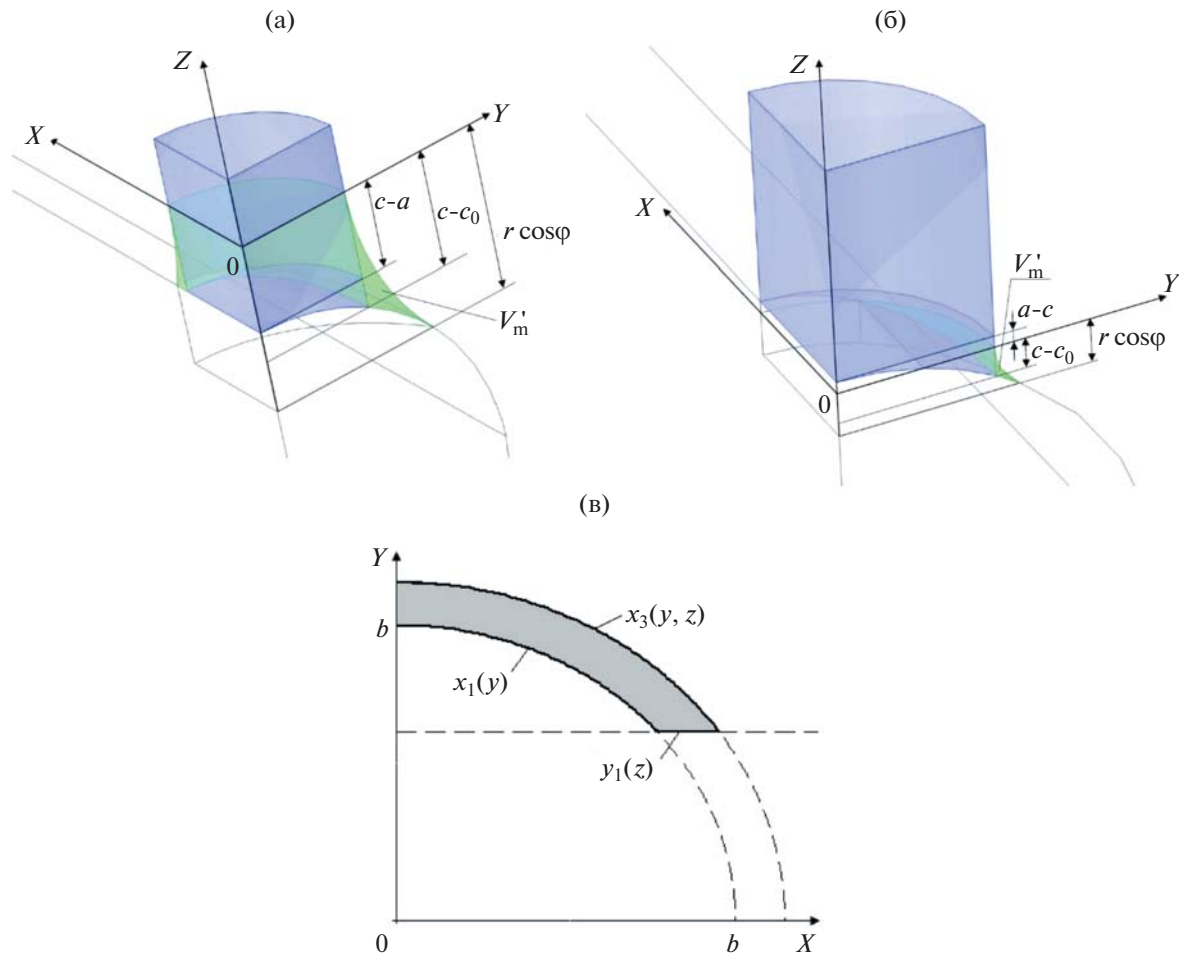


Рис. 5. (а) – Тональное отверстие с выделенным дополнительным объемом  $V'_m$  при  $r > r_0$ , (б) – в случае  $r < r_0$ , (в) – поперечное сечение объема  $V'_m$  на уровне  $-(c - c_0) \leq z < -(c - a)$ .

числения области. При  $-r \cos \varphi \leq z < -(c - c_0)$  (рис. 4б)

$$S_{1m}(z) = S_1''(z), \quad (37)$$

при  $-(c - c_0) \leq z < -(c - a)$  сечение имеет вид кольцевого элемента (рис. 5в)

$$S_{2m}(z) = 4 \left[ \int_{y_1(z)}^b \int_{x_1(y)}^{x_3(y,z)} dx dy + \int_b^{y_2(z)} \int_0^{x_3(y,z)} dx dy \right], \quad (38)$$

а при  $-(c - a) \leq z < 0$  представляет кольцо с постепенно уменьшающимся до величины  $b$  радиусом внешней окружности (рис. 5а)

$$S_{3m}(z) = 4 \left[ \int_0^b \int_{x_1(y)}^{x_3(y,z)} dx dy + \int_b^{y_2(z)} \int_0^{x_3(y,z)} dx dy \right]. \quad (39)$$

Интегрирование в формулах (37)–(39) проводится в пределах первой четверти.

Собственный объем тонального отверстия при  $r > r_0$  в зависимости от координаты его нижнего уровня  $z_1$  будет иметь вид

$$V_1(z_1) = V_0 + \int_{z_1}^{-(c-c_0)} S_{1m}(z) dz + \int_{-(c-c_0)}^{-(c-a)} S_{2m}(z) dz + \int_{-(c-a)}^0 S_{3m}(z) dz$$

для  $-r \cos \varphi \leq z_1 < -(c - c_0)$  либо

$$V_2(z_1) = V_0 + \int_{z_1}^{-(c-a)} S_{2m}(z) dz + \int_{-(c-a)}^0 S_{3m}(z) dz$$

при  $-(c - c_0) \leq z_1 < -(c - a)$ . Среднее значение объема тонального отверстия



$$V_1^{\text{av}} = \frac{1}{r \cos \varphi - (c - a)} \times \left[ \int_{-r \cos \varphi}^{-(c-c_0)} V_1(z_1) dz_1 + \int_{-(c-c_0)}^{-(c-a)} V_2(z_1) dz_1 \right]. \quad (40)$$

В случае малых радиусов кривизны ( $r \leq r_0$ ) площадь  $S_{3m}(z) = 0$ , а средний объем

$$V_2^{\text{av}} = \frac{1}{r \cos \varphi} \left[ \int_{-r \cos \varphi}^{-(c-c_0)} V_1(z_1) dz_1 + \int_{-(c-c_0)}^0 V_2(z_1) dz_1 \right]. \quad (41)$$

Шунтирующий импеданс (6) эквивалентного отверстия с острыми краями в низкочастотном приближении будет иметь вид

$$Z_s^{(c)} = -j \frac{\rho c}{\pi b_{\text{eff}}^2} \frac{1}{k(t + t_m(b_{\text{eff}}))}. \quad (42)$$

Приравнивая импедансы (42) и (21), учитывая, что  $k = \omega/c$ , а также выражение (22), получим уравнение

$$\pi b_{\text{eff}}^2 (t + t_m(b_{\text{eff}})) = V, \quad (43)$$

позволяющее определить эффективный радиус  $b_{\text{eff}}$  и рассчитать резонансные частоты воздушно-го канала с закрытым отверстием при различных радиусах кривизны  $r$ . Правая часть выражения (43) предполагает использование усредненных объемов (40)–(41).

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Оценка входного импеданса и, соответственно, резонансных частот деревянных духовых инструментов с помощью метода конечных элементов (МКЭ) включает построение трехмерной модели столба воздуха, окруженного сферой, принимающей излучение, и решение уравнения Гельмгольца  $\nabla^2 p + k^2 p = 0$  для ряда выбранных частот. Сетка конечных элементов должна занимать объем как внутри, так и снаружи моделируемой части инструмента, а окружающая сферическая область должна иметь неотражающие граничные условия. В данном случае для увеличения степени точности моделирования и выделения зависимости собственной частоты канала именно от величины радиуса кривизны  $r$  и обусловленного им дополнительного объема  $V_m'$  можно отказаться от построения сферической области, увеличив длину канала и тонального отверстия на соответствующий параметр коррекции (10) либо (11), связанный с излучением открытых концов. Отсутствие окружающей сферической области позволит без существенного ущерба для результата, оставаясь в рамках ограниченных вычисли-

тельных мощностей, увеличить качество разбиения интересующих нас областей.

В качестве моделируемого объекта был взят воздушный канал (труба) длиной  $L = 10$  см и радиусом  $a = 8$  мм. Канал имел одно центральное перпендикулярное боковое цилиндрическое отверстие с радиусом  $b = 4$  мм и высотой  $t = 5.6$  мм ( $\delta = 0.5$ ;  $\epsilon_0 = 0.5$ ). Высота отверстия  $t$  над каналом сохранялась неизменной при любом радиусе кривизны  $r$  (рис. 16). Моделирование проводилось для открытого с одной стороны канала без фланца. Открытое отверстие также имело бесфланцевое окончание. С учетом симметрии рассматривалась только половина модели, поэтому на плоскости симметрии было задано граничное условие, определяющее нулевое нормальное ускорение ( $a_n = 0$ ). В случае открытых торцов (основного канала и отверстия) на границе задавалось нулевое значение по акустическому давлению ( $p = 0$ ). Канал с отверстием содержал три домена – две цилиндрических области (основной канал и отверстие), а также выделенную область дополнительного объема  $V_m'$  (рис. 6). Для дискретизации геометрии и решения во всех доменах использовались криволинейные элементы Лагранжа второго порядка. На рис. 6 представлено разбиение воздушного канала сеткой тетраэдрических конечных элементов в районе тонального отверстия. Плотность сетки была увеличена в области дополнительного объема  $V_m'$  для лучшего выявления оказываемого им влияния на смещение собственной частоты канала. Количество степеней свободы (DOF) в пределах моделируемого объема составляло около  $(2...3) \times 10^5$ , что существенно превосходит минимально рекомендуемое на кубический метр  $(1728/\lambda_{\text{min}}^3)$ , где  $\lambda_{\text{min}}$  – наименьшая длина волны в моделировании [19]. В данном случае  $\lambda_{\text{min}} \approx 28.6$  см, что соответствует  $f_{\text{max}} = 1.2 \times 10^3$  Гц. Все эксперименты были выполнены в программе COMSOL Multiphysics 5.6 с использованием встроенного модуля “Pressure Acoustics”. Влияние термовязкостных потерь незначительно для большинства тональных отверстий деревянных духовых инструментов, поэтому при моделировании и в расчетах они не учитывались.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 7 показаны зависимости эффективно-го радиуса  $b_{\text{eff}}$  (рис. 7а) и частоты  $f$  основного тона (рис. 7б) воздушного канала от приведенного радиуса кривизны  $r/b$  краев для открытого тонального отверстия. Видно, что с увеличением степени подрезки краев отверстия растет его эффективный радиус, за счет чего происходит некоторое уменьшение длины канала и смещение

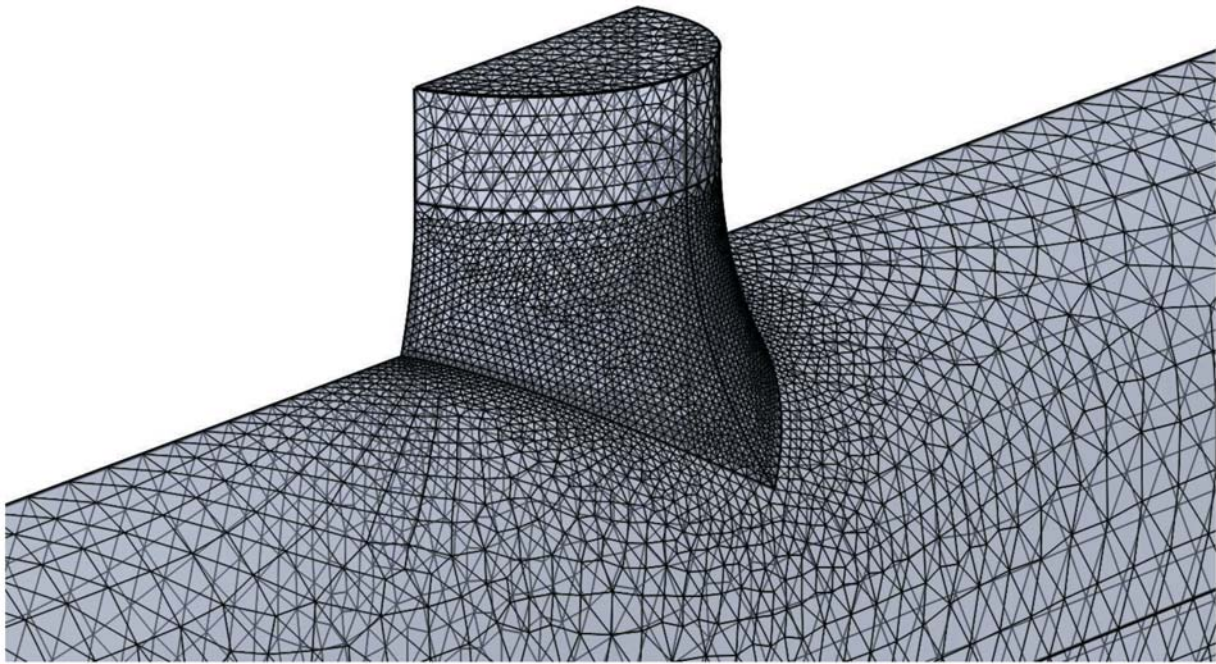


Рис. 6. Визуализация сетки конечных элементов в области тонального отверстия и дополнительного объема  $V_m'$ .

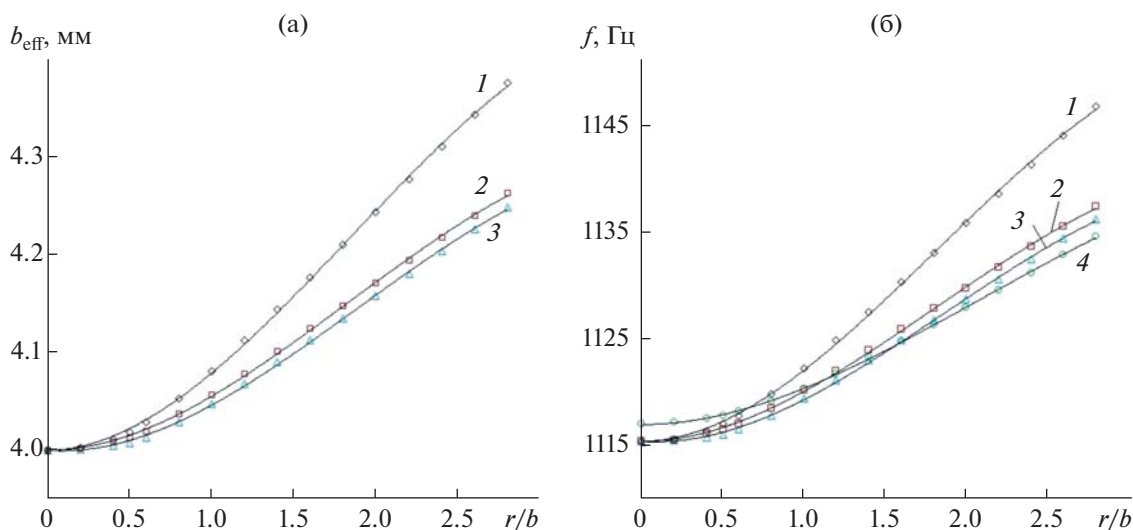
резонансной частоты. Для сравнения частоты были рассчитаны в разных приближениях. В самом грубом приближении эффективный радиус  $b_{\text{эф}}$  находился из равенства акустических масс отверстия (28)–(29) и эквивалентного ему цилиндра с массой  $m_a = \rho L_h / \pi b_{\text{эф}}^2$  (рис. 7а, 7б, кривые 1). Остальные зависимости на рис. 7 построены с учетом изменения параметров  $t$ ,  $t_m$  и  $t_r$  без усреднения (кривые 2) либо с использованием усреднения (30)–(31) акустической массы отверстия (кривые 3). Видно, что расчетные зависимости (кривые 2 и 3) коррелируют с результатами компьютерного моделирования (кривая 4), которые могут быть несколько завышены из-за отсутствия окружающей канал сферической области воздушного пространства и замены ее на соответствующую поправку (10) к длинам канала и отверстия. В расчетах не учитывалось также влияние изменения эффективного радиуса отверстия на поправку  $t_a$ , связанную с последовательным импедансом звукового отверстия  $Z_a$ . Корректировка длины  $t_a \sim 10^{-4}$  м, что на порядок меньше высоты  $t$  и поправок  $t_i$  и  $t_r$ , определяющих  $Z_s$ , поэтому при нахождении эффективного шунтирующего импеданса отверстия  $Z_s^{\text{эф}} = Z_s - Z_a/4$  вторым слагаемым можно было пренебречь. Несмотря на указанные допущения, видно, что результаты компьютерного моделирования ближе к расчетным с учетом усреднения акустической массы отверстия при  $r/b \geq 1.4$ . Учитывая возможную за-

вышенность результатов моделирования, можно сделать вывод о том, что большее соответствие будет и при  $r/b < 1.4$ , если использовать усреднение (30)–(31). Отметим при этом, что наименьшая разница частот двух последовательных тонов, которую может обнаружить слушатель, составляет примерно  $c_1 = 8$  центов (0.5%) на частоте 200 Гц и уменьшается до  $c_2 = 3$  центов (0.2%) на частоте 1 кГц [20]. Относительный интервал (в процентах) между двумя тонами  $f_1$  и  $f_2$  определяется как

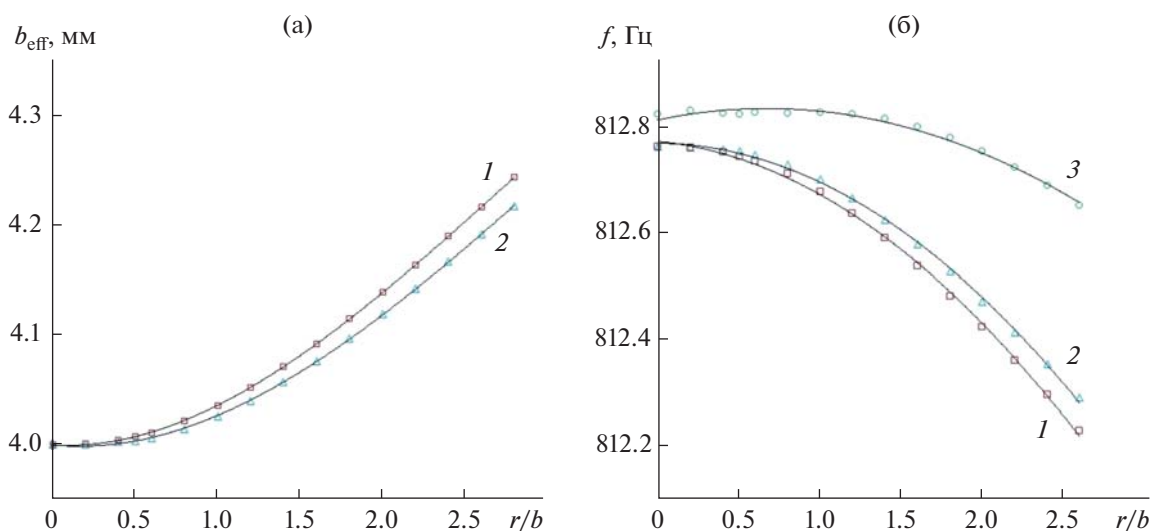
$$\frac{\Delta f}{f_1} = (2^{\frac{c}{1200}} - 1) \times 100\%,$$

где  $c$  – разность частот тонов, выраженная в центах. Из приведенных зависимостей можно установить, что слышимая разность в 0.2% ( $\Delta f \approx 2$  Гц,  $f_1 = 1100$  Гц) будет достигаться при значениях приведенного радиуса кривизны  $r/b > 0.8$ . Поэтому использование на практике подрезки тональных отверстий с малыми значениями параметра  $\epsilon$  ( $\epsilon \leq \epsilon_0$ ) для корректировки высоты нот не будет иметь должного эффекта.

На рис. 8 показаны зависимости радиуса  $b_{\text{эф}}$  (рис. 8а) и частоты  $f$  основного тона (рис. 8б) воздушного канала от отношения  $r/b$  для закрытого тонального отверстия. С увеличением степени подрезки краев отверстия аналогичным образом растет его эффективный радиус, за счет чего происходит увеличение объема воздушного канала и



**Рис. 7.** (а) — Зависимость эффективного радиуса  $b_{\text{eff}}$  открытого тонального отверстия от отношения  $r/b$ , (б) — сравнение зависимостей частоты  $f$  основного тона воздушного канала от приведенного радиуса кривизны  $r/b$  краев открытого звукового отверстия. 1 — Расчеты с использованием акустической массы (28)–(29), 2 — по формуле (32) без усреднения (30)–(31), 3 — по формуле (32) с использованием усреднения (30)–(31), 4 — результаты компьютерного моделирования. Сплошные линии — кубические аппроксимации расчетных данных и результатов моделирования.



**Рис. 8.** (а) — Зависимость эффективного радиуса  $b_{\text{eff}}$  закрытого тонального отверстия от отношения  $r/b$ , (б) — сравнение зависимостей частоты  $f$  основного тона воздушного канала от приведенного радиуса кривизны  $r/b$  краев закрытого звукового отверстия. 1 — Расчеты без усреднения объема (с использованием (34)–(35)), 2 — расчеты с усреднением объема (с использованием (40)–(41)), 3 — результаты компьютерного моделирования. Сплошные линии — кубические аппроксимации расчетных данных и результатов моделирования.

соответствующее понижение его резонансной частоты. Отметим, что изменение частоты в данном случае в рамках моделирования незначительно ( $\approx 0.15$  Гц). Расхождение между моделированием и численными расчетами имеет тот же порядок и, возможно, обусловлено несколько завышенными значениями компьютерного эксперимента. Мож-

но также заметить, что результаты моделирования ближе к расчетным с учетом усреднения (40)–(41) собственного объема отверстия. Малые изменения частоты ( $\sim 10^{-1}$  Гц) не могут быть обнаружены слушателем, но стоит помнить, что кумулятивный эффект от ряда тональных отверстий, имеющих какую-либо степень подрезки,

уже может оказать заметное влияние на характеристики инструмента.

Приведенный в данной работе алгоритм расчета эффективных радиусов тональных отверстий и определения собственных частот воздушного канала может быть применен для любых видов симметричной подрезки, применяющихся при изготовлении духовых инструментов и подробно описанных в исследовании [9]. Следует также помнить, что не существует простого способа вычисления положения и размеров каждого звукового отверстия по отдельности. Это означает, что небольшое изменение геометрии одной части инструмента, например, формы тонального отверстия для исправления определенной ноты, может оказать неожиданное и, чаще всего, неблагоприятное влияние на другие ноты (резонансные частоты) с точки зрения высоты тона, тембра, стабильности и т.д. Решение этой задачи дополнительно должно включать в себя использование некоторого алгоритма глобальной оптимизации, с помощью которого можно вычислить расположение, размеры и форму тональных отверстий инструмента для всевозможных аппликатур.

Другая сложность, ограничивающая точность любых расчетов и моделирований, заключается в количественной оценке механико-акустических свойств амбушюра слушателя. Тем не менее в рамках разумных предположений, основанных на экспериментах, математические модели музыкальной акустики могут быть решены, чтобы предсказать поведение и расширить области разработки и проектирования качественных музыкальных инструментов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Keefe D.* Woodwind tonehole acoustics and the spectrum transformation function / Ph.D. thesis, Case Western Reserve University, 1981.
2. *Keefe D.* Experiments on the single woodwind tonehole // *J. Acoust. Soc. Am.* 1982. V. 72. № 3. P. 688–699. <https://doi.org/10.1121/1.388249>
3. *Keefe D.* Theory of the single woodwind tonehole // *J. Acoust. Soc. Am.* 1982. V. 72. № 3. P. 676–687. <https://doi.org/10.1121/1.388248>
4. *Keefe D.* Woodwind air column models // *J. Acoust. Soc. Am.* 1990. V. 88. № 1. P. 35–51. <https://doi.org/10.1121/1.399911>
5. *Nederveen C., Jansen J., van Hassel R.R.* Corrections for woodwind tonehole calculations // *Acustica.* 1998. V. 84. P. 957–966.
6. *Dubos V., Kergomard J., Khettabi A., Dalmont J., Keefe D., Nederveen C.* Theory of sound propagation in a duct with a branched tube using modal decomposition // *Acustica.* 1999. V. 85. P. 153–169.
7. *Lefebvre A., Scavone G.P.* Characterization of woodwind instrument toneholes with the finite element method // *J. Acoust. Soc. Am.* 2012. V. 131. № 4. P. 3153–3163. <https://doi.org/10.1121/1.3685481>
8. *Lefebvre A., Scavone G.P., Kergomard J.* External tonehole interactions in woodwind instruments // *Acta Acust. United Ac.* 2013. V. 99. № 6. P. 975–985. <https://doi.org/10.3813/aaa.918676>
9. *Greenham A.C.* Clarinet Toneholes: A Study of Undercutting and its Effects / PhD thesis, London Metropolitan University, United Kingdom, 2003. <https://repository.londonmet.ac.uk/7273/>
10. *Benade A.H.* Fundamentals of musical acoustics. Oxford University Press, 1976. <https://doi.org/10.1063/1.3037454>
11. *Nederveen C.* Acoustical aspects of woodwind instruments (Revised ed.). Illinois: Northern Illinois University Press, 1998. (Original work published 1969) <https://doi.org/10.2307/842089>
12. *Dalmont J., Nederveen C., Dubos V., Ollivier S., Meserette V., te Slight E.* Experimental determination of the equivalent circuit of an open side hole: Linear and non-linear behavior // *Acustica.* 2002. V. 88. P. 567–575.
13. *MacDonald R.* A Study of the Undercutting of Woodwind Toneholes Using Particle Image Velocimetry / PhD thesis, University of Edinburgh, United Kingdom, 2009. <http://www.acoustics.ed.ac.uk/research/phd-theses/>
14. *Garcia Mayen H., Kergomard J., Vergez C., Guillemain P., Jousserand M., Pachebat M., Sanchez P.* Characterization of open woodwind toneholes by the tube reversed method // *J. Acoust. Soc. Am.* 2021. V. 150. № 5. P. 3763–3772. <https://doi.org/10.1121/10.0007131>
15. *Dalmont J., Nederveen C., Joly N.* Radiation impedance of tubes with different flanges: numerical and experimental investigations // *J. Sound Vib.* 2001. V. 244. № 3. P. 505–534. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3487>
16. *Levine H., Schwinger J.* On the radiation of sound from an unflanged circular pipe // *Phys. Rev.* 1948. V. 73. P. 383–406. <https://doi.org/10.1103/physrev.73.383>
17. *Nomura Y., Yamamura I., Inawashiro S.* On the acoustic radiation from a flanged circular pipe // *J. Phys. Soc. Japan.* 1960. V. 15. № 3. P. 510–517. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.15.510>
18. *Лепендин Л.Ф.* Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
19. *Lefebvre A.* Computational Acoustic Methods for the Design of Woodwind Instruments / PhD thesis, Computational Acoustic Modeling Laboratory McGill University, Montreal, Canada, 2010. (Дата обращения 18.03.2023 г.) [https://www.music.mcgill.ca/caml/lib/exe/fetch.php?media=publications:phd\\_lefebvre\\_2010.pdf](https://www.music.mcgill.ca/caml/lib/exe/fetch.php?media=publications:phd_lefebvre_2010.pdf)
20. *Hartmann W.M.* Pitch, periodicity, and auditory organization // *J. Acoust. Soc. Am.* 1996. V. 100. № 6. P. 3491–3502. <https://doi.org/10.1121/1.417248>