

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛЕДОВОГО ПОКРОВА С ПОМОЩЬЮ СЕЙСМОАКУСТИЧЕСКОГО ШУМА

© 2023 г. Д. А. Преснов<sup>а, \*</sup>, А. Л. Собисевич<sup>а,</sup> А. С. Шуруп<sup>а, b, \*\*</sup>

<sup>а</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук,  
ул. Большая Грузинская, 10, стр. 1, Москва, 123995 Россия

<sup>б</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет,  
ГСП-1, Ленинские горы, 1, стр. 2, Москва, 119991 Россия

\*e-mail: presnov@physics.msu.ru

\*\*e-mail: shurup@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 07.04.2023 г.

После доработки 02.05.2023 г.

Принята к публикации 22.06.2023 г.

Предложен и апробирован на экспериментальных данных метод оценки параметров ледового покрова океана (толщина, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность), не требующий применения источника. Для реализации рассматриваемого подхода требуются два расположенных на поверхности льда одноканальных сейсмоприемника, регистрирующих вертикальную компоненту колебательной скорости сейсмического шума. Спектрально-корреляционный анализ функции взаимной корреляции шумов, зарегистрированных приемниками, позволяет оценить дисперсионную зависимость групповой скорости изгибно-гравитационной волны, распространяющейся по ледовой пластине. Решение обратной задачи основано на анализе дисперсии не только групповой, но и фазовой скорости, что позволяет увеличить объем первичных данных. Полученные оценки параметров льда соответствуют результатам независимых наблюдений, проводимых в ходе эксперимента, а также оценкам других авторов, полученным для характеристик льда в регионе проведения эксперимента.

**Ключевые слова:** изгибные волны, ледяной покров, лед, сейсмические станции, сейсмоакустический шум, нормальные волны

**DOI:** 10.31857/S0320791923600385, **EDN:** SMJYOA

### ВВЕДЕНИЕ

Стремительный рост деловой активности на шельфе арктических морей, сопровождающийся увеличением объема перевозок по Северному морскому пути, в сочетании с повышенным интересом правительственных и общественных организаций к состоянию морского ледового покрова как индикатора глобальных климатических изменений, предопределил бурное развитие технической и методической базы ледовых наблюдений [1]. Толщина льда играет ключевую роль в параметрах ледяного покрова замерзающих водоемов мирового океана. Так как морской лед находится на границе между океаном и атмосферой, его толщина и распределение по регионам отражают состояние обеих сред, обеспечивая интегральный показатель климатических колебаний и динамики атмосферных и гидрологических процессов. Более того, межгодовые и климатические изменения толщины льда на судоходных путях явля-

ются важным параметром для оценивания и планирования новых морских транспортных систем.

В естественных условиях лед неоднороден по толщине, имеет вертикальную слоистость, при этом в зависимости от условий формирования льдины, соленость и плотность слоев может различаться. Деформированный лед (такой как сморози, торосы и наслоения) обладает еще более сложной структурой. Измерение толщины морского льда является одной из наиболее важных и сложных задач. В наши дни разработаны и широко используются в полевых исследованиях несколько методов [2]: 1) бурение льда; 2) методы эхолокации с использованием сонаров на подледных буях и лодках; 3) электромагнитные методы; 4) визуальные и телевизионные наблюдения с борта судов и ледоколов, осуществляющих ледовое плавание. Однако для масштабных измерений толщина льда остается одним из наиболее трудных параметров. Перспективным является применение дистанционных неконтактных методов определения параметров льда, как с искусственных спутни-

ков Земли, так и с воздушных судов, включая беспилотные летательные аппараты.

Несмотря на большое разнообразие подходов к оценке толщины льда все они не лишены недостатков. Так, большинство контактных методов подразумевают непосредственное присутствие человека, что существенно усложняет процедуру, учитывая в том числе суровые погодные условия Арктики. Дистанционные методы сталкиваются с трудностями в облачную погоду и не всегда могут обеспечить высокое пространственное разрешение при измерениях. В связи с этим перспективным является совместное использование спутниковых наблюдений и результатов “наземных” наблюдений [3], в качестве которых могут выступать сейсмо- и гидроакустические данные, содержащие информацию о характеристиках упругих волн, распространяющихся в ледовом покрове [4, 5].

Распространение упругих волн в ледовом покрове океана исследуется на протяжении многих десятилетий, начиная с работ уже прошлого века [6, 7] и заканчивая совсем недавними исследованиями в этой области [8, 9]. Использование сейсмоакустических волн позволяет оценить толщину льда  $h$ , а также его механические свойства — плотность  $\rho$ , модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\mu$  [10]. Несмотря на всю свою привлекательность, сейсмоакустический мониторинг характеристик льда редко реализуется на практике. Основная причина связана с необходимостью использования специальных источников, что приводит к заметному увеличению стоимости эксперимента и его технической сложности. Привлечение методов шумовой интерферометрии [11–13] позволяет предложить схему пассивного мониторинга льда, использующую в качестве источника информации о среде естественные шумы, возникающие, например, при локальных механических разрушениях ледовой пластины, а также за счет ветрового воздействия. В этом случае функция взаимной корреляции шумов, измеренных двумя разнесенными в пространстве сейсмоприемниками, позволяет оценить характеристики функции Грина, т.е. получить данные, как если бы сигнал излучался и принимался в точках расположения сейсмоприемников.

В последние годы интерес к этой идее неуклонно растет, причем как правило исследователи используют множество приемников на льду, формирующих сейсмоакустическую антенну. Упорядочив корреляционные функции по увеличению расстояния между точками наблюдения, можно сформировать корреляционную матрицу, вдоль строк и столбцов которой будут изменяться расстояние и время. Двойное Фурье-преобразование этой матрицы позволяет перейти от координат “расстояние—время” к координатам “волновое число—частота” и, используя тот или иной

метод обработки, оценить фазовую скорость модовых составляющих [9, 14], формирующих сейсмоакустическое поле в ледовой пластине. Аналитическая связь между фазовыми скоростями мод и характеристиками льда в виде дисперсионного уравнения позволяет решить прямую задачу расчета модельных частотных зависимостей фазовых скоростей в зависимости от параметров льда. Решение прямой задачи, в свою очередь, используется для восстановления характеристик льда за счет выбора тех их значений, которые обеспечивают наилучшее совпадение численно рассчитанных и экспериментально измеренных фазовых скоростей в рассматриваемом частотном диапазоне.

В настоящей работе представлена пассивная схема оценки характеристик ледового покрова по данным о вертикальной составляющей колебательной скорости сейсмоакустических шумов, измеренных двумя разнесенными в пространстве стационарными приемниками, установленными на лед. В этом случае спектрограмма шумовой корреляционной функции позволяет оценить дисперсионную зависимость групповой скорости изгибно-гравитационной волны, формирующей основной вклад в вертикальную компоненту регистрируемого шумового поля. Для решения обратной задачи предложен подход, учитывающий дисперсию не только групповой, но и фазовой скорости, что позволяет увеличить объем первичных данных для решения обратной задачи, улучшая тем самым ее обусловленность. Предложенный пассивный сейсмоакустический мониторинг характеристик льда ( $h$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $\mu$ ) апробирован на экспериментальных данных, зарегистрированных на поверхности льда озера Байкал.

#### ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК ЛЕДОВОГО ПОКРОВА ПО ДАННЫМ О ДИСПЕРСИИ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

В случае ледовой пластины толщины  $h$ , лежащей на жидком полупространстве, на низких частотах  $f$ , для которых величина  $fh$  не превышает  $\approx 50$  Гц м (такое условие характерно для натуральных экспериментов, проводившихся в Арктическом регионе [8–10]), сейсмоакустическое поле формируется преимущественно тремя модами [8]: продольной модой, поляризованной вдоль направления распространения волны, поперечной модой с горизонтальной поляризацией вдоль поверхности пластины [9] и изгибно-гравитационной модой [10]. При использовании трехкомпонентного сейсмоприемника, установленного вертикально на поверхности льда, один из горизонтальных каналов которого ориентирован вдоль трассы распространения, указанные волны

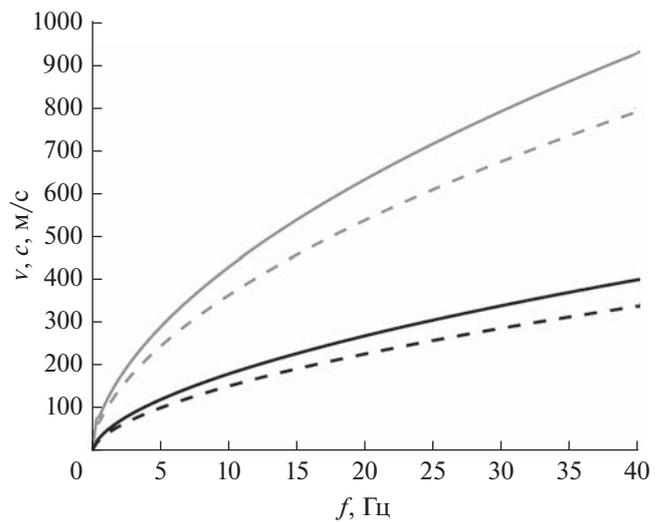
естественным образом разделяются и дают преимущественный вклад каждая на соответствующем канале [13]: изгибно-гравитационная мода регистрируется на вертикальном канале, поперечная мода – на горизонтальном канале, ориентированном перпендикулярно направлению распространения волны, продольная – на горизонтальном канале, ориентированном вдоль трассы распространения, где также будет наблюдаться и вклад от изгибно-гравитационной волны, так как для нее характерна эллиптическая поляризация. При этом продольная и поперечные моды практически не обладают дисперсией в рассматриваемом частотном диапазоне и распространяются со скоростями продольных и поперечных волн в безграничном упругом пространстве; в то же время для изгибно-гравитационной волны дисперсия проявляется заметно (рис. 1) [14]. Характерный вид временной зависимости изгибно-гравитационной волны начинается с высокочастотной части, которая приходит раньше, и завершается медленно распространяющейся низкочастотной составляющей поля этой моды. В рассматриваемой в настоящей работе схеме оценки параметров ледового покрова используются одноканальные датчики, регистрирующие вертикальную компоненту сейсмического шума в низкочастотной области, где основной вклад в регистрируемое поле дает изгибно-гравитационная волна.

Для рассматриваемых условий  $fh < 50$  Гц м справедливо дисперсионное уравнение изгибно-гравитационной волны, распространяющейся вдоль упругого однородного изотропного ледового слоя, расположенного на жидком полупространстве [1, 10]:

$$k^4 - \frac{h\rho\omega^2}{D} + \frac{\rho_w}{D} \left( g - \frac{\omega^2}{\sqrt{k^2 - k_w^2}} \right) = 0, \quad (1)$$

где  $k = \omega/c$ ,  $k_w = \omega/c_w$  – волновое число;  $g = 9.8$  м/с<sup>2</sup> – ускорение свободного падения;  $\omega = 2\pi f$  – циклическая частота;  $h, \rho$  – толщина и плотность ледовой пластины;  $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$  – цилиндрическая жесткость ледовой пластины, где  $E, \mu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; в дальнейшем плотность жидкости и скорость акустических волн в ней предполагаются известными и равными  $\rho_w = 1020$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_w = 1500$  м/с, соответственно. Отметим, что более сложное дисперсионное уравнение, применимое для мелкого моря и учитывающее наличие твердого основания – дна, было получено, например в [15], однако в этой работе не рассматривалось действие силы тяжести.

Дисперсионное уравнение (1) позволяет по заданным параметрам льда  $h, \rho, E, \mu$  рассчитать дисперсионную зависимость фазовой скорости



**Рис. 1.** Примеры дисперсионных зависимостей скоростей изгибно-гравитационной волны: фазовая скорость  $c(f)$  (черным цветом) рассчитана на основе уравнения (1); групповая скорость  $v(f)$  (серым цветом) – с использованием формулы (2). Сплошными линиями изображены результаты расчетов, полученных при численном моделировании (табл. 2), штриховыми линиями в результате решения обратной задачи при экспериментальной апробации (табл. 3).

изгибно-гравитационной волны  $c(f)$ . Вычисление групповой скорости  $v(f)$  осуществляется путем численного дифференцирования значений  $c(f)$  на основе формулы Рэлея (рис. 1), которая может быть записана в виде:

$$v^{(ph)} = \frac{c}{1 - \frac{f}{c} \frac{dc}{df}}. \quad (2)$$

В итоге, решение обратной задачи может быть основано на минимизации многопараметрического функционала невязки

$$\varepsilon_{gr}(h, \rho, E, \mu) = \left\| v(f) - v^{(ph)}(f; h, \rho, E, \mu) \right\|_{L_2},$$

где  $v(f)$  – групповая скорость, оцененная из экспериментальных данных,  $v^{(ph)}(f; h, \rho, E, \mu)$  – результаты численного моделирования, которые зависят от искомым параметров льда  $h, \rho, E, \mu$ ;  $\|\cdot\|_{L_2}$  обозначает норму  $L_2$ . В дальнейшем, для удобства изложения численное значение невязки между экспериментальными и модельными групповыми скоростями обозначается как  $\chi_c$  и вычисляется следующим образом:

$$\chi_c = \sqrt{\frac{\sum_i |v(f_i) - v^{(ph)}(f_i; h, \rho, E, \mu)|^2}{\sum_i v^2(f_i)}}, \quad (3)$$

где  $f_i$  – дискретизированные значения частот в рассматриваемой полосе.

Как отмечалось ранее, при решении задачи оценки параметров ледового покрова зачастую используют данные о фазовой скорости [8–10]. Фазовая информация более чувствительна к изменениям среды, по сравнению с амплитудной, фактически, заложенной в групповой скорости. В связи с этим ставится задача включить в процесс решения обратной задачи информацию о фазе изгибно-гравитационной волны. При наличии множества приемников, оценка фазовой скорости осуществляется стандартными методами [16]. Однако при наличии только одной пары стационарных точек наблюдения решение этой задачи затруднительно. Дело в том, что задача нахождения неизвестной фазовой скорости  $c(f)$  по данным в виде  $v(f)$  является неоднозначной. Действительно, из (2) следует, что для нахождения  $c(f)$  требуется интегрирование  $v(f)$ . Это приводит к необходимости оценки неизвестной в общем случае постоянной интегрирования  $C$ :

$$c^{(\text{gr})} = f \left[ \int \frac{df}{v} + C \right]^{-1}. \text{ Например, при численном}$$

интегрировании от нижней частоты  $f_0$  рассматриваемого частотного диапазона, постоянная интегрирования определяется как  $C = f_0/c(f_0)$  [17], однако значение  $c(f_0)$  неизвестно. Решение отмеченной проблемы неоднозначного восстановления фазовой скорости из групповой может быть основано на итерационной процедуре, использующей в качестве начального приближения асимптотику  $c(f)$  при  $f \rightarrow 0$ , которая оценивается из (1) аналитически, или на основе численной аппроксимации дифференциального уравнения (2), однако подробное рассмотрение этих вопросов выходит за рамки настоящей работы.

Как оказалось, для решения обратной задачи неоднозначность оценки фазовой скорости из  $v(f)$  может быть устранена. Для этого предлагается использовать аналог метода Кейпона, изначально разработанного и положительно зарекомендовавшего себя для решения задач пространственного и временного спектрального оценивания, обеспечивающего при определенных условиях разрешение лучше рэлеевского [18]. Алгоритм оценки параметров льда с использованием фазовой информации  $c^{(\text{gr})}$  основывается на максимизации следующей функции правдоподобия:

$$L(h, \rho, E, \mu) = \left[ \langle \Phi(h, \rho, E, \mu) | R_{\text{ph}}^{-1} | \Phi(h, \rho, E, \mu) \rangle \right]^{-1}, \quad (4)$$

где  $\Phi(h, \rho, E, \mu) = \exp\{-i2\pi f/c(f; h, \rho, E, \mu)\}$  – фазирующий вектор, вычисляемый на основе модельных данных  $c(f; h, \rho, E, \mu)$ ,  $R_{\text{ph}} = |\Phi_{\text{ph}}\rangle\langle\Phi_{\text{ph}}|$  – аналог выборочной корреляционной матрицы,

построенной на основе фазовой скорости  $c^{(\text{gr})}(f)$ , вычисленной для произвольной константы интегрирования  $C$ :

$$\Phi_{\text{ph}} = \exp\left\{ \frac{-i2\pi f}{c^{(\text{gr})}(f)} \right\} = \exp\left\{ -i2\pi \int \frac{df}{v} - i2\pi C \right\};$$

$|\dots\rangle, \langle\dots|$  – обозначения Дирака для вектор-столбца и вектор-строки, которые в рассматриваемом случае эрмитово сопряжены, что и обеспечивает исключение неизвестной переменной интегрирования  $C$  при формировании матрицы  $R_{\text{ph}}$ . Таким образом, алгоритм (5) позволяет учесть при решении обратной задачи фазовую информацию, при этом неоднозначность оценки  $c^{(\text{gr})}$  из экспериментальной групповой скорости  $v(f)$  снимается. Функцию правдоподобия (5) можно преобразовать в вид функционала, подлежащего минимизации  $\varepsilon_{\text{ph}}(h, \rho, E, \mu) = \sqrt{-\ln(L)}$ . Итоговый вид функционала, учитывающего и фазовую, и групповую скорости, минимизация которого позволяет оценить параметры льда в рассматриваемой обратной задаче, представляется в следующем виде:

$$\varepsilon(h, \rho, E, \mu) = \varepsilon_{\text{gr}}(h, \rho, E, \mu) + \alpha \varepsilon_{\text{ph}}(h, \rho, E, \mu), \quad (5)$$

где коэффициент  $\alpha$  выбирается таким образом, чтобы значения  $\varepsilon_{\text{gr}}$  и  $\varepsilon_{\text{ph}}$  были сравнимы по порядку величины на первых шагах поиска минимума.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Исходя из того, что входные данные для решения обратной задачи (дисперсионные кривые групповой скорости) являются реализациями некоторых случайных величин (в силу случайного характера ошибок их определения в эксперименте), решения  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$  также носят вероятностный характер, что позволяет применять методы статистического оценивания для их анализа. Первым этапом решения обратной задачи является параметризация модели среды – выбор параметров, подлежащих оценке, и задание множества возможных значений с целью ограничения области поиска решения. На основе данных литературных источников [8, 19–22] были определены диапазоны изменений параметров льда  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ , которые наблюдались при натуральных исследованиях (см. табл. 1).

Для исследования решения обсуждаемой обратной задачи можно воспользоваться широко используемым в геофизических приложениях байесовским подходом [23, 24], когда все параметры описываются в вероятностных терминах. В этом случае результат решения обратной задачи представляется с помощью условной плотности вероят-

**Таблица 1.** Используемые диапазоны значений восстанавливаемых параметров модели, по литературным данным

	Минимальное значение	Максимальное значение
Толщина льда, $h$ , м	0.5	1.5
Плотность, $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	700	1000
Модуль Юнга, $E$ , ГПа	2	15
Коэффициент Пуассона, $\mu$	0.1	0.5

ности  $p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}})$  параметров модели  $\mathbf{m} = [\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}]$  при условии, что измеренные данные принимают заданное значение  $\mathbf{d}_{\text{obs}} = v(f_i)$ . Таким образом, каждой конкретной модели ставится в соответствие некоторая вероятность, определяемая измерениями. Функция  $p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}})$  носит название апостериорного распределения (полученного после проведения опыта, т.е. после проведения измерений) и имеет размерность, равную числу неизвестных параметров модели (в нашем случае – четыре). Зная апостериорное распределение, можно получить как итоговое решение обратной задачи, используя наиболее вероятную или среднюю модель, так и получить оценки допустимых диапазонов для отдельных параметров модели.

Для того чтобы оценить апостериорное распределение  $p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}})$ , используется формула Байеса для условной вероятности, которую можно переписать в виде [25, 26]:

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}}) = \frac{p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m}) p(\mathbf{m})}{\int p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m}) p(\mathbf{m}) d\mathbf{m}}, \quad (6)$$

здесь  $p(\mathbf{m})$  – это распределение вероятностей, которое выражает то, что мы знаем о параметрах модели до проведения измерений (обычно предполагается равномерное распределение в диапазоне возможного изменения параметров, см. табл. 1),  $p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m})$  – функция правдоподобия, которая определяется для фиксированных измерений  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$ . Из (6) следует оценка  $p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}}) \sim p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m}) p(\mathbf{m})$ , которая связывает апостериорное распределение с данными наблюдений и априорной информацией о модели.

В нашем случае мера близости экспериментальных и модельных данных определяется функционалом (5). Если модельные данные близки к измеренным, то тестовая модель близка к реальной модели, а функционал (5) стремится к минимуму. В большинстве практических случаев, ошибки измерений представляют собой нормально распределенные случайные величины [9, 26], в итоге, минимизация квадратичного функционала невязки

эквивалентна максимизации вероятности гауссовской функции правдоподобия:

$$p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m}) \sim \exp\left(\frac{-\varepsilon(\mathbf{m})^2}{2\sigma^2}\right), \quad (7)$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия результатов измерений.

На практике в случае большого числа параметров полный перебор моделей становится невозможным и единственным вариантом оценки апостериорного распределения становится его вычисление в различных точках пространства параметров модели. В результате требуется многократное решение прямой задачи, т.е. нахождение корней дисперсионного уравнения (1) относительно фазовой скорости  $c$ . Так как  $c$  нельзя выразить из (1) аналитически, то искать решение приходится в неявной форме, используя, например, стандартные итерационные методы, что требует дополнительных временных затрат. Для рассматриваемого далее частотного диапазона 1–40 Гц и для значений параметров  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$  из диапазонов их изменений, заданных выше, путем численного моделирования было установлено, что  $c \leq 3.5c_w$ ,  $c\omega \gg g$ . В итоге, дисперсионное уравнение (1) может быть записано в упрощенном виде:

$$c^5 + Ac^4 - B = 0,$$

где  $A = \frac{h\rho\omega}{\rho_w}$ ,  $B = \frac{D}{\rho_w}\omega^3$ . Тем самым, задача нахождения дисперсионной зависимости  $c(f)$  сводится к задаче отыскания корней полинома 5-ой степени с заданными коэффициентами, которая решается стандартными безытерационными методами, реализованными в виде готовых функций во многих программных приложениях. Однако оценка апостериорной вероятности для всего пространства параметров модели, например, с однородным шагом, остается недостижимой за разумное время, так как размерности всех четырех неизвестных параметров перемножаются в размерности искомого распределения вероятностей.

В этой связи, эффективно использование методов статистического оценивания для генерации

представительной выборки из всего пространства возможных параметров модели. Для решения этой задачи нами применялся один из наиболее популярных алгоритмов – МСМС (Markov chain Monte Carlo) [23, 24], позволяющий получить ансамбль реализаций  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ , удовлетворяющих исходным данным с заданной вероятностью. В частности, использовалась реализация метода Метрополиса–Гастингса, функционирующая в соответствии со следующим алгоритмом:

1) На основе стартовой модели  $\mathbf{m}$  (которая представляет из себя вектор параметров модели  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ ) предлагается новая модель, путем выбора из распределения вероятностей  $q(\mathbf{m}'|\mathbf{m})$  такого, что новая предлагаемая модель  $\mathbf{m}'$  зависит только от текущей модели  $\mathbf{m}$ . В качестве  $q(\mathbf{m}'|\mathbf{m})$  обычно используется гауссовское распределение вероятностей, со средним значением в точке с текущими параметрами.

2) Для модели  $\mathbf{m}'$  решается прямая задача, после чего вычисляется функционал невязки (5), функция правдоподобия (7) и, собственно, значение апостериорного распределения для предлагаемой модели.

3) Принимается решение использовать новые параметры модели или нет, на основе распределения вероятностей (учтена симметричность  $q(\mathbf{m}'|\mathbf{m}) = q(\mathbf{m}|\mathbf{m}')$ ):

$$\alpha(\mathbf{m}|\mathbf{m}') = \min \left( 1, \frac{p(\mathbf{m}'|\mathbf{d}_{\text{obs}})}{p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}})} \right).$$

Таким образом, если предлагаемая модель имеет более высокое значение апостериорной функции распределения, она всегда принимается и становится текущей моделью. Если это значение меньше, то новая модель принимается с вероятностью равной отношению значений апостериорных распределений. В случае, когда априорные распределения совпадают (6), условие принятия новых параметров модели определяется просто отношением функций правдоподобия. В итоговый результат включается выбранная на данном этапе модель (новая или старая) и алгоритм повторяется до тех пор, пока выборка не заполнится требуемым количеством реализаций.

Следовательно, в выборку попадают такие параметры модели  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ , которые наилучшим образом описывают измеренные данные, что соответствует минимуму функционала невязки или максимуму функции правдоподобия. На основе полученного обширного ансамбля реализаций, для каждого оцениваемого параметра строится апостериорная функция плотности вероятности, анализ которой дает итоговые оценки  $\langle \hat{h} \rangle, \langle \hat{\rho} \rangle, \langle \hat{E} \rangle, \langle \hat{\mu} \rangle$  и дисперсии этих оценок.

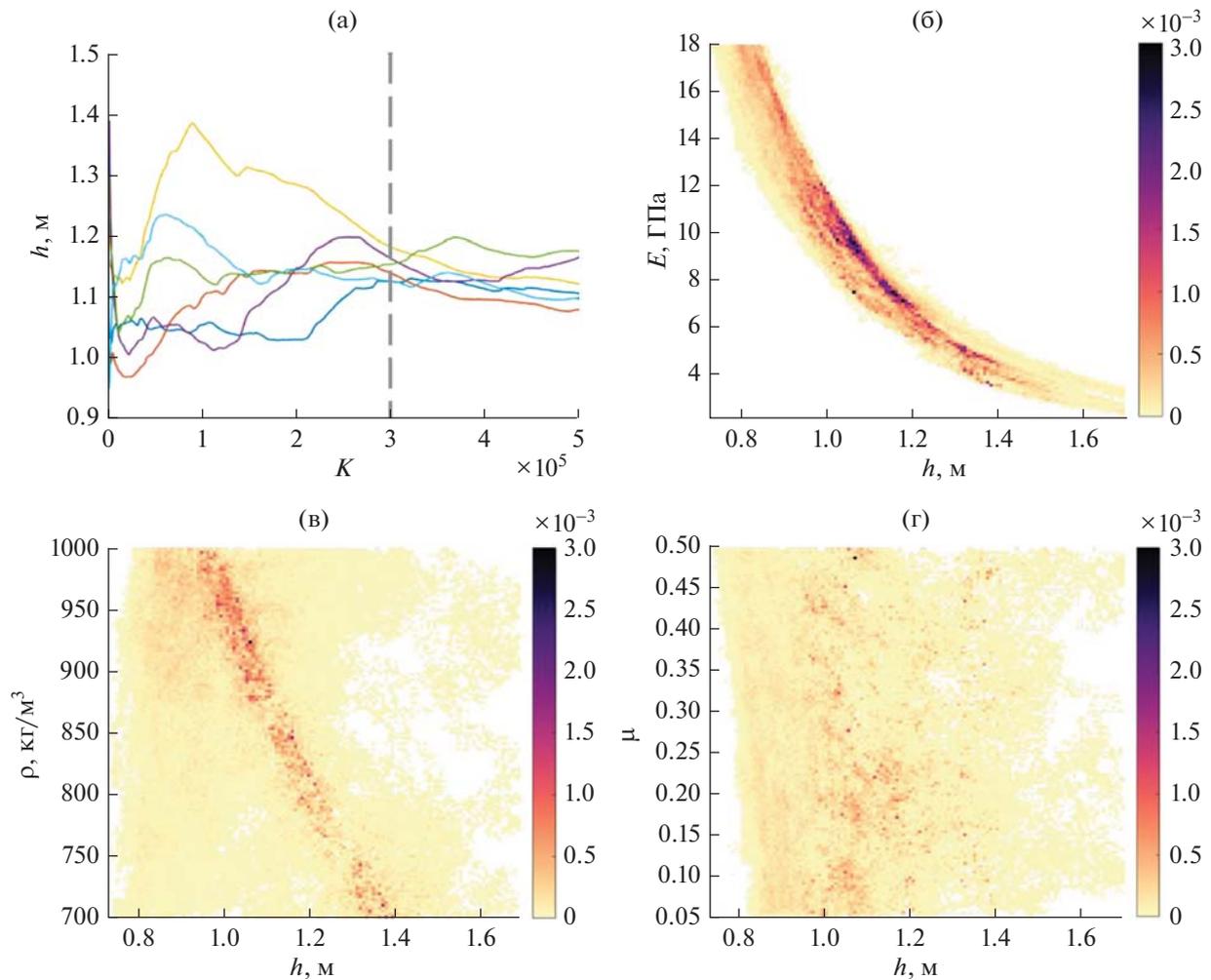
В рамках исследования алгоритма (5) рассматривалось восстановление параметров  $h, \rho, E, \mu$  на основе модельных дисперсионных зависимостей  $v^{(\text{ph})}(f; h_0, \rho_0, E_0, \mu_0)$ , полученных путем решения прямой задачи для следующих истинных значений параметров  $h_0 = 1.1$  м,  $\rho_0 = 870$  кг/м<sup>3</sup>,  $E_0 = 8$  ГПа,  $\mu_0 = 0.3$ , которые выбирались произвольным образом из принятых выше диапазонов их изменений. При этом использовалась широкая полоса частот ( $\approx 150$  частот) в диапазоне от 1 до 40 Гц. Изложенный выше алгоритм запускался параллельно для шести различных начальных точек, сгенерированных случайным образом для контроля сходимости метода. Для изучения всего пространства моделей генерировалась достаточно обширная выборка, содержащая  $N = 500000$  реализаций.

Чтобы оценить достаточность числа реализаций в рассматриваемой задаче, были рассчитаны зависимости средних значений толщины льда

$$\langle \hat{x}^{(K)} \rangle = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{x}_i^2} \quad (\hat{x} - \text{условное обозначение}$$

для  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ ) от количества элементов выборки  $K = 1 \dots N$ , используемых при вычислении среднего. На рис. 2а приведен вид этой зависимости для толщины льда при разных начальных значениях алгоритма МСМС. Как можно видеть на рис. 2а, после усреднения уже по  $K \approx 300000$

среднее значение случайной величины  $\hat{h}$  слабо изменяется для всех реализаций марковских процессов, т.е. рассматриваемого количества “испытаний”  $N = 500000$  достаточно для получения стационарного состояния марковской цепи. Аналогичные зависимости получаются для параметров  $\hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ . В качестве итоговой выборки можно использовать модели, начиная с 300000 реализации, что позволит исключить элементы, на которые оказывает влияние стартовая модель. Для изучения свойств апостериорного распределения вероятностей все шесть независимых марковских цепей объединялись в одну выборку. Таким образом был получен обширный набор параметров модели  $\mathbf{m} = [\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}]$ , удовлетворительно описывающий входные данные  $\mathbf{d}_{\text{mod}}$ , в качестве которых использовались модельные дисперсионные кривые  $v^{(\text{ph})}(f; h_0, \rho_0, E_0, \mu_0)$ . По полученным значениям  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$  строились двумерные гистограммы отдельно для каждого оцениваемого параметра в зависимости от толщины льда (рис. 2). Цветовая шкала гистограмм соответствует нормированной частоте, с которой значения параметров встречаются в общем ансамбле полученных решений, тем самым определяя функции плотности вероятности  $p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{mod}})$  для искомых параметров модели  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ .



**Рис. 2.** Результат оценки апостериорной функции вероятности для пространства восстанавливаемых параметров с использованием модельных данных: (а) – сходимость средних значений для различных начальных состояний; (двумерные гистограммы полученных решений в зависимости от: (б) – толщины ледового слоя и модуля Юнга, (в) – толщины и плотности льда, (г) – толщины льда и коэффициента Пуассона.

Как видно на рис. 2, наиболее вероятные значения параметров наблюдаются для толщины льда  $\hat{h}$  и модуля Юнга  $\hat{E}$ , для которых распределения локализованы вблизи истинных значений  $h_0, E_0$ . Здесь необходимо отметить, что локализация максимума плотности вероятности достигается за счет включения в процедуру решения обратной задачи второго слагаемого в уравнении (5). В противном случае возникает неоднозначность совместной оценки  $\hat{h}$  и  $\hat{E}$ , для устранения которой необходимо фиксировать один из параметров. Для  $\hat{\rho}$  функция плотности вероятности не локализуется вблизи истинного значения  $\rho_0$  и имеет сравнительно широкое распределение по диапазону возможных значений (рис. 2в). Тем не менее, следующая из графика близкая к линейной зависимость между  $\hat{\rho}$  и  $\hat{h}$  позволяет оценивать

среднее значение случайной величины  $\hat{\rho}$ , которое с приемлемой точностью соответствует истине  $\rho_0$  (см. табл. 2). Для коэффициента Пуассона выделяющихся значений  $\hat{\mu}$  не наблюдается вовсе; функция плотности вероятности для этого параметра близка к равномерной (рис. 2г), в итоге, среднеквадратическое отклонение этой оценки получается весьма существенным (см. табл. 2).

Аналогичные результаты были получены ранее в [4], где также восстанавливались параметры ледового покрова по сейсмоакустическим данным. В [4], как и в настоящей работе, оцениваемые функции плотности вероятности для толщины льда  $\hat{h}$  и модуля Юнга  $\hat{E}$  имеют более локализованный характер по сравнению с  $\hat{\rho}$ . При этом для коэффициента Пуассона  $\hat{\mu}$  аналогичная зависимость имеет форму, близкую к гауссовской, в

**Таблица 2.** Результаты восстановления по модельным данным. Оценки, полученные простым арифметическим усреднением, представлены в столбце  $\langle x \rangle \pm \sigma_x$  ( $x$  обозначает каждый из рассматриваемых параметров  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ ); результаты, полученные с учетом функции плотности вероятности, приведены в столбце  $\bar{x} \pm \bar{\sigma}_x$ ; истинные значения параметров  $h_0, \rho_0, E_0, \mu_0$  представлены в столбце  $x_0$

	$\langle x \rangle \pm \sigma_x$	$\bar{x} \pm \bar{\sigma}_x$	$x_0$
Толщина льда, $h$ , м	$1.1 \pm 0.2$	$1.1 \pm 0.2$	1.1
Плотность, $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$(8.6 \pm 0.9) \times 10^2$	$(8.6 \pm 0.9) \times 10^2$	870
Модуль Юнга, $E$ , ГПа	$9 \pm 4$	$9 \pm 4$	8
Коэффициент Пуассона, $\mu$	$0.25 \pm 0.12$	$0.26 \pm 0.13$	0.3

то время как в настоящем исследовании локализации  $\hat{\mu}$  не наблюдается. Это отличие связано с различным подходом к решению обратной задачи. В [4] вместо дисперсионной зависимости групповой скорости изгибно-гравитационной волны  $v(f)$  в качестве исходных данных используется ее фазовая скорость  $c(f)$ , а кроме того, скорость продольных  $c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}}$  и попереч-

ных  $c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\mu)}}$  волн во льду. Таким образом, использовался намного больший объем первичной информации, что требовало анализировать данные с более чем 90 трехкомпонентных геофонов, расположенных на поверхности льда. В то время как для оценки групповой скорости  $v(f)$  в настоящем исследовании достаточно использовать данные всего с двух однокомпонентных сейсмометров. Столь принципиальное сокращение количества используемых датчиков существенно упрощает и удешевляет проведение эксперимента, однако приводит к заметным ограничениям на объем используемой информации и, как следствие, на возможность раздельного восстановления рассматриваемых характеристик ледового покрова. Дополнительная априорная информация может заметно улучшать результаты раздельного восстановления параметров. Другой подход повышения качества решения обратной задачи связан с уменьшением количества неизвестных. Например, дисперсионное уравнение (1) можно решать относительно трех неизвестных  $h, \rho$  и  $D$ . Коэффициенты  $E, \mu$  одновременно присутствуют в цилиндрической жесткости льда  $D$ , при этом величина  $E$  примерно на девять порядков больше, чем  $\mu$ , что, по-видимому, и приводит к столь слабому выделению  $\mu$  на фоне  $E$  при использовании только уравнения (1) без дополнительных ограничений на эти характеристики. Рассмотрение упомянутых направлений улучшения результатов восстановления мы относим к перспективам дальнейших исследований.

Для заданной функции плотности вероятности  $p(x)$  случайной величины  $x$ , оценки ее среднего по ансамблю реализаций значения  $\bar{x}$  и среднеквадратического отклонения  $\bar{\sigma}_x$  вычисляются стандартным способом:  $\bar{x} = \int_X xp(x)dx$ ,  $\bar{\sigma}_x = \sqrt{\int_X (x-\bar{x})^2 p(x)dx}$ , где  $X$  – область определения  $x$ . Используя эти соотношения, были получены средние по ансамблю значения для рассматриваемых решений  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$  и их среднеквадратические отклонения. Результаты в виде  $\bar{h} \pm \bar{\sigma}_h$  (аналогично для  $\hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ ), а также оценки, полученные при арифметическом усреднении в виде  $\langle \hat{h} \rangle \pm \sigma_h$  (аналогично для  $\hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ ), представлены в табл. 2. Там же приведены истинные значения параметров  $h_0, \rho_0, E_0, \mu_0$ , которые использовались при моделировании входных данных  $v^{(ph)}(f; h_0, \rho_0, E_0, \mu_0)$ . Как видно из табл. 2, оценки восстанавливаемых параметров описывают их истинные значения в пределах полученной точности. На рис. 1 сплошными линиями приведены дисперсионные зависимости результатов восстановления групповой скорости  $\bar{v} = v^{(ph)}(f; \bar{h}, \bar{\rho}, \bar{E}, \bar{\mu})$ , для которой значение невязки (3)  $\chi_c$  составляет  $\approx 0.021$  (для решения  $\hat{v} = v^{(ph)}(f; \langle \hat{h} \rangle, \langle \hat{\rho} \rangle, \langle \hat{E} \rangle, \langle \hat{\mu} \rangle)$  невязка оказалась равной  $\chi_c \approx 0.029$ ).

Полученные в рамках численного моделирования результаты применения рассматриваемого метода оценки параметров ледового покрова позволяют перейти к его экспериментальной апробации. Далее приводится описание полевого эксперимента и результатов восстановления параметров ледового покрова в натуральных условиях.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ АПРОБАЦИЯ

Экспедиционные исследования выполнялись во второй половине марта 2020 г. на льду озера

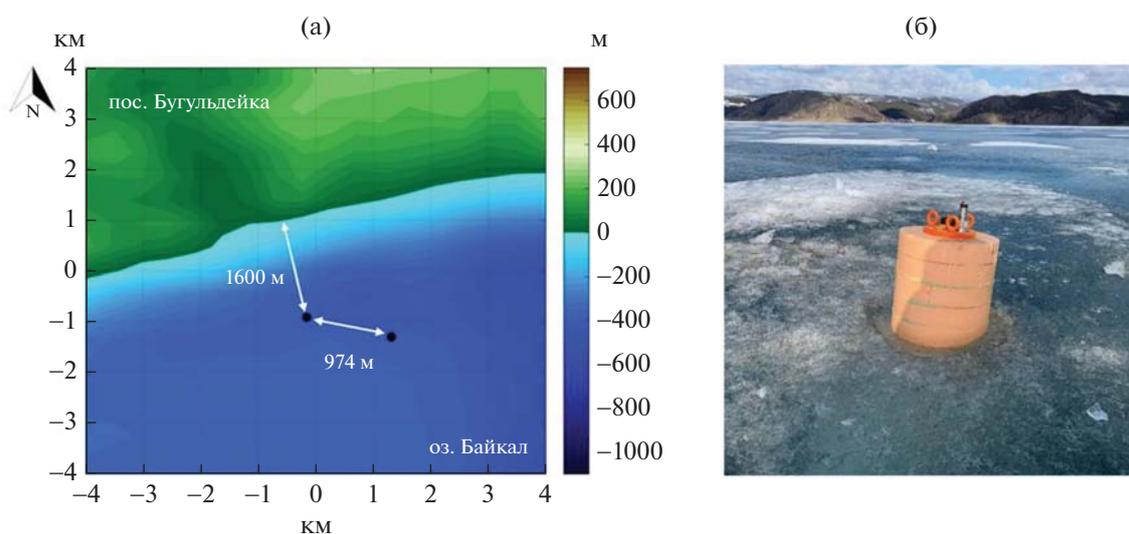
Байкал в районе пос. Бугульдейка, Иркутской области, вблизи геодинамического полигона ИЗК СО РАН. Ставилась задача размещения сейсмического и гидроакустического оборудования на поверхности льда с целью изучения особенностей регистрации сейсмических событий и искусственных сигналов от расположенного на противоположном берегу озера 100-тонного вибратора ЦВО-100 [27]. Параллельно с этой задачей был получен массив непрерывных наблюдений низкочастотного сейсмоакустического шума, формирующегося в ледовых условиях, на анализ которого направлено настоящее исследование. Лед озера Байкал имеет уникальную структуру, он обладает высокой оптической прозрачностью, что связано с тем, что лед очень плотный и не содержит пузырьков воздуха, которые обычно присутствуют во льду других водоемов. Кроме того, обширные размеры озера и сильные ветра делают его практически свободным от снежного покрова, но возникающие при этом напряжения создают торосы и трещины. Необходимо отметить, что в зимний период здесь функционирует ледовая автомобильная переправа на остров Ольхон длиной более 10 км, что делает разработку методов автономного контроля толщины и прочности льда актуальной и практически важной задачей.

На протяжении всего времени работы экспедиции температура воздуха колебалась от 0 до 5°C, что обеспечило благоприятные условия для выполнения измерений. Сам лед был достаточно прочным и толстым – его толщина составляла 1 метр, что теоретически позволяет использовать транспорт для передвижения по льду. При этом следует отметить, что поверхность льда озера слегка подтаивала в солнечные часы. Установка оборудования на льду выполнялась с использованием опыта предшествующих исследований [9, 19]. Во льду вырубалась лунка, позволяющая полностью погрузить прибор под поверхность льда, для защиты от ветровой помехи. Дно лунки заполнялось песком, благодаря чему датчик проще выровнять по горизонтали. В качестве основного измерительного оборудования использовались автономные гео-гидроакустические буи [28], специально разработанные для применения в ледовых условиях, с учетом возможных низких температур и сильных воздействий на корпус прибора. Гео-гидроакустический буй, созданный на основе широкополосного сейсмометра СМЕ4211, способен обеспечить непрерывную регистрацию вертикальных упругих колебаний в полосе частот 0.033–50 Гц в течение одной недели. В рамках настоящего исследования была выбрана частота обработки 250 Гц. Приемная группа на поверхности льда состояла из шести автономных буев и одной трехкомпонентной станции, апертура установки составляла  $\approx 1.2$  км [27]. В качестве эксперимента один из приборов был помещен в теп-

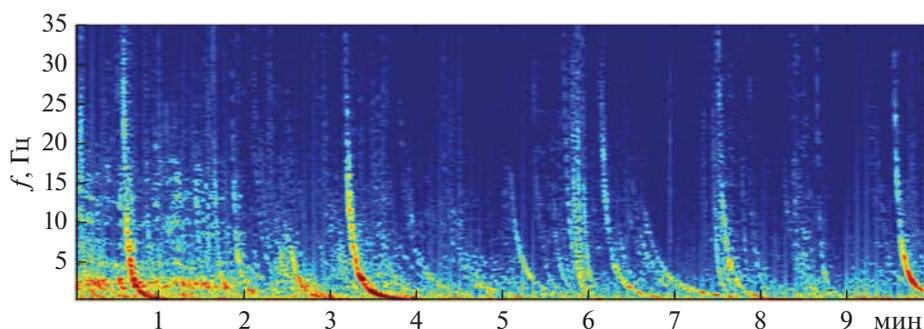
лоизолирующий кожух из пенопласта для оценки возможности снижения влияния температуры на показания сейсмометра, однако это привело к тому, что прибор получил положительную плавучесть и из-за ускоренного таяния льда в этой лунке буй плавал (рис. 3б), поэтому он был исключен из дальнейшего анализа. Дополнительно для временных подводных наблюдений использовались низкочастотные пьезокерамические гидрофоны. Место установки станций было выбрано с учетом достаточной удаленности от берега и существенной глубины озера, которая составляла  $\approx 400$  м. В таком режиме автономные станции непрерывно функционировали несколько суток, благодаря чему было зарегистрировано несколько локальных и региональных сейсмических событий. В настоящей работе рассматриваются экспериментальные данные сейсмоакустических шумов, записанных на поверхности льда только двумя приборами (рис. 3а).

Общий визуальный анализ экспериментальных волновых форм показывает, что фоновые сейсмоакустические сигналы, регистрируемые на поверхности льда, весьма интенсивны. При измерении вертикальных колебаний льда основной вклад в волновое поле на льду связан с волновыми модами изгибно-гравитационного типа (рис. 3), генерируемыми ветром, водными потоками, пузырьками газа, ударяющимися о поверхность льда или “льдотрясениями”, которые вызываются, как известно, внутренней деформацией ледовой пластины из-за относительного дрейфа и теплового расширения льда, приводя к растрескиванию. В качестве примера на рис. 4 приведена обработка 10-минутного участка экспериментальной записи с использованием методов спектрально-временного анализа. На ней можно визуально распознать по меньшей мере 12 поступающих сигналов, обладающих дисперсией, характерной для изгибно-гравитационной моды, временная зависимость которой начинается с высокочастотной части, приходящей раньше, и завершается медленно распространяющейся низкочастотной составляющей поля этой моды. По опыту сейсмоакустических измерений, например, на Ладожском озере и озере Умбозеро [13, 14], следует отметить, что уровень сейсмоакустической зашумленности льда озера Байкал существенно выше. Например, шумы льда здесь ощущаются даже в слышимом диапазоне. Однако количественный анализ подобных импульсных сигналов затруднителен, так как источник возмущения и его расположение в общем случае неизвестны.

Эффективным способом оценки времени распространения сигнала между двумя приемниками является исследование функции взаимной корреляции шумов [11, 12]. За счет усреднения за длительный период накопления шумового сигнала вклад в функцию взаимной корреляции будут



**Рис. 3.** (а) – Схема проведения эксперимента и глубина озера Байкал в районе работ, черными точками отмечены положения приемников; (б) – фотография приемника – вмораживаемого гео-гидроакустического буя в процессе эксперимента.



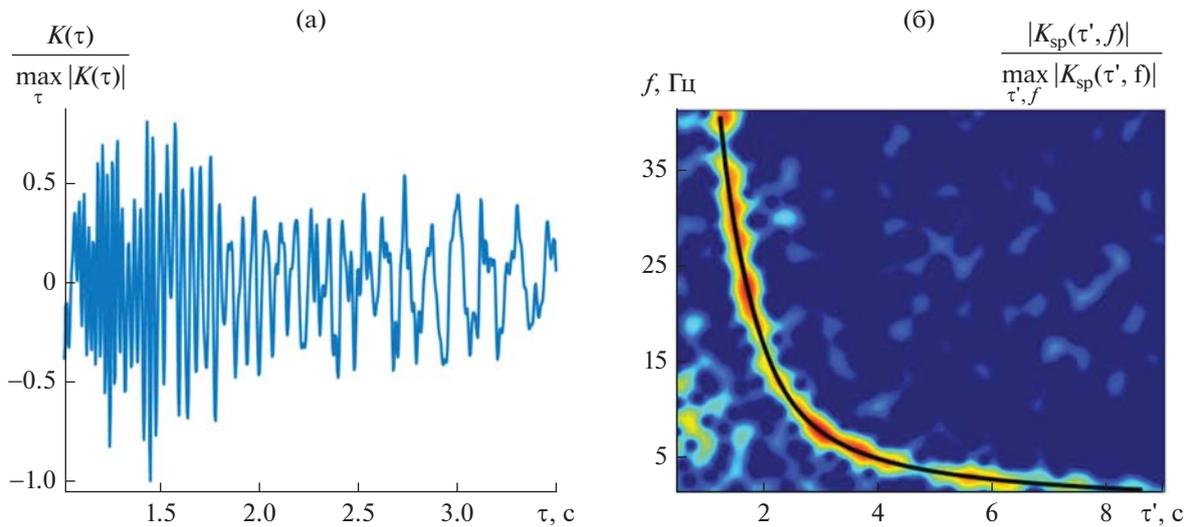
**Рис. 4.** Типичная спектрограмма сигнала, регистрируемого на льду озера Байкал – выделяются импульсные вступления в виде диспергирующих изгибно-гравитационных сигналов.

вносить только источники, расположенные вблизи оси между приемниками, в результате чего функция взаимной корреляции должна иметь два симметричных относительно нулевой временной задержки максимума, положения которых соответствуют времени пробега сигнала между приемниками. В случае диспергирующей волны в ледовом покрове сигнал растягивается во времени, однако его симметричность также остается важным критерием достоверной оценки времени пробега. Для получения симметричных корреляционных пиков использовался следующий алгоритм обработки экспериментальных данных.

На предварительном этапе обработки экспериментальных данных использовались стандартные операции удаления линейного тренда и полосовой фильтрации. Необходимыми процедурами являются “нормализация” амплитуды и “обеление” спектра сигнала, которые можно считать стан-

дартными в задачах, где применяется шумовая интерферометрия [16]. Особенностью обработки именно ледовых сигналов являются подобранные эмпирическим путем параметры методов, использовавшихся в [16]. Длительность интервала разбиения в настоящем исследовании составила один час при полной длительности непрерывных измерений, равной 53 ч. Для амплитудной нормализации использовался диапазон частот 3–16 Гц с шириной окна бегущего среднего  $\approx 73$  с. В процедуре обеления спектра использовалось спектральное окно скользящего среднего  $\approx 1.4$  Гц. После этого вычислялись часовые взаимно-корреляционные функции шумовых сигналов для пары станций, которые затем усреднялись за весь рассматриваемый период.

На данном этапе проводимого исследования была выбрана одна пара приемников, расположенных на расстоянии  $R \approx 974$  м (рис. 3а), которое заведомо



**Рис. 5.** Нормированная полусумма  $K(\tau) = [C(\tau) + C(-\tau)]/2$  двух фрагментов экспериментальной функции взаимной корреляции  $C(\tau)$  для пары приемников, показанных на рис. 3а, соответствующих положительным и отрицательным задержкам. (а) – Изображена часть итоговой полусуммы  $K(\tau)$ , содержащая характерные для изгибно-гравитационной волны особенности – первые высокочастотные приходы с последующими низкочастотными вступлениями. (б) – Нормированный модуль спектрограммы  $|K_{sp}(\tau', f)|$  функции взаимной корреляции  $K(\tau)$ , рассчитанный по экспериментальным данным. Черной линией изображена оценка дисперсионной зависимости групповой скорости изгибно-гравитационной волны, полученная в результате решения обратной задачи.

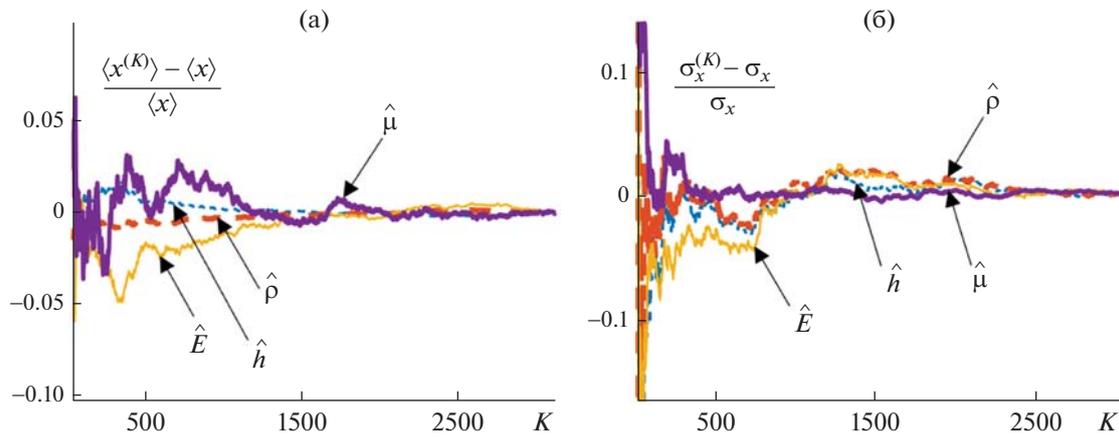
больше, чем три длины волны изгибно-гравитационных возмущений. В дальнейшем будет анализироваться полусумма фрагментов функции взаимной корреляции, соответствующих положительным и отрицательным задержкам (рис. 5а), что позволяет дополнительно повысить отношение сигнал/помеха за счет учета взаимности распространения сигналов между сейсмоприемниками. Для простоты изложения далее итоговая полусумма будет называться просто функцией взаимной корреляции  $K(\tau) = [C(\tau) + C(-\tau)]/2$ . На рис. 5б представлен модуль спектрограммы  $|K_{sp}(\tau', f)|$  функции взаимной корреляции  $K(\tau)$ . Сама спектрограмма  $K_{sp}(\tau', f)$  рассчитывалась как оконное Фурье-преобразование от  $K(\tau)$ :

$$K_{sp}(\tau', f) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)h(\tau - \tau') \exp(-i2\pi f \tau) d\tau.$$

Здесь  $f$  – частота в герцах, а служащий аргументом функции  $K(\tau)$  временной сдвиг  $\tau$  – в секундах. При вычислении  $K_{sp}(\tau', f)$  функция окна  $h(\tau - \tau')$  имела характерную длительностью  $\approx 0.77$  с (с центром в точке  $\tau = \tau'$ ); сдвиг по центральной временной задержке  $\tau'$  осуществлялся с шагом  $\approx 0.04$  с. На рис. 5б отчетливо прослеживаются максимумы спектрограммы, соответствующие временам прихода основной энергии сигнала в различные моменты времени на различных частотах. Другими словами, наблюдается дисперси-

онная зависимость групповой скорости изгибно-гравитационной волны, которая дает основной вклад в регистрируемую вертикальную компоненту колебательной скорости сейсмоакустического шума. Определение координат  $(\tau', f)$  максимумов модуля спектрограммы  $|K_{sp}(\tau', f)|$  дает оценку зависимости групповой скорости от частоты  $v(f)$ , где  $v = R/\tau'$ ,  $R \approx 974$  м – известное расстояние между сейсмоприемниками. Полученная на основе максимумов  $|K_{sp}(\tau', f)|$  зависимость  $\tau'(f)$  изображена на рис. 5б черной линией. Ошибка полученной оценки  $v(f)$  по данным, представленным на рис. 5б, не превышает 3% в среднем по рассматриваемому частотному диапазону. В итоге, частотно-временной анализ функции взаимной корреляции шумового поля, зарегистрированного на поверхности ледового покрова парой разнесенных в пространстве сейсмоприемников, позволяет оценить усредненную вдоль трассы между приемниками дисперсию групповой скорости  $v(f)$  изгибно-гравитационной волны. Эти данные используются далее для оценки параметров льда  $h, \rho, E, \mu$ , которые также следует понимать как средние значения вдоль линии, соединяющей приемники (рис. 3а).

В качестве метода поиска минимума функции многих переменных (5) использовался стандартный для геофизических приложений алгоритм “имитации отжига” (simulated annealing) [23], так же относящийся к классу методов МСМС. Одной из особенностей этого подхода является вероят-



**Рис. 6.** Результаты, полученные при обработке экспериментальных данных: (а) – сходимость центрированных относительно нуля нормированных средних значений  $\frac{\langle x^{(K)} \rangle - \langle x \rangle}{\langle x \rangle}$  и (б) – среднеквадратических отклонений  $\frac{\sigma_x^{(K)} - \sigma_x}{\sigma_x}$  при увеличении количества “испытаний”  $K$  ( $x$  – условное обозначение для  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ ).

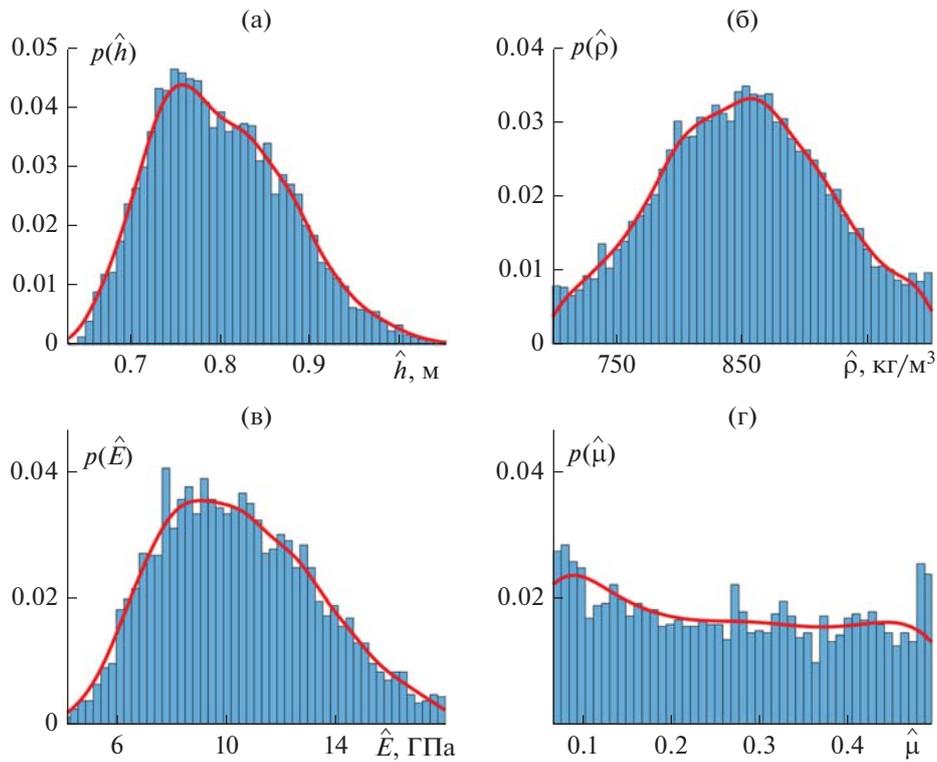
ностный метод определения направления поиска минимума в пространстве неизвестных параметров; в рассматриваемом случае – на множестве возможных значений параметров  $h, \rho, E, \mu$ . Многократное применение алгоритма “отжига” позволяет получить набор решений  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ , обеспечивающих минимальное значение  $\varepsilon(h, \rho, E, \mu)$  с ошибкой не более заданного уровня, определяемого в нашем случае точностью эксперимента. Алгоритм “отжига” запускался  $N = 10000$  раз, в каждом из этих “испытаний” выполнялось 500 итерационных шагов, после чего поиск решения останавливался. Полученные таким образом оценки  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$  дают значения невязок  $\chi_c$  2.5%, т.е. на уровне шумов в исходных экспериментальных данных. Чтобы оценить достаточность числа реализаций  $N = 10000$ , помимо средних значений (как в разделе по численному моделированию) были рассчитаны зависимости среднеквадратических отклонений

$$\sigma_x^{(K)} = \sqrt{[\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle]^2} = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{x}_k - \langle \hat{x} \rangle)^2} \quad (\hat{x} -$$

условное обозначение для  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ ) от количества элементов выборки  $K = 1 \dots N$ , используемых при вычислении. На рис. 6 приведены центрированные относительно нуля и нормированные оценки вида  $(\hat{x}^{(K)} - \langle \hat{x} \rangle) / \langle \hat{x} \rangle, (\sigma_x^{(K)} - \sigma_x) / \sigma_x$ , где  $\langle \hat{x} \rangle, \sigma_x$  – значения, полученные при усреднении по всему рассматриваемому ансамблю реализаций, т.е. при  $K = N$ . На рис. 6а, 6б демонстрируется уменьшение средних значений  $\langle \hat{h} \rangle, \langle \hat{\rho} \rangle, \langle \hat{E} \rangle, \langle \hat{\mu} \rangle$  для рассматриваемых решений  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$  и их среднеквадратических отклонений  $\sigma_h, \sigma_\rho, \sigma_E, \sigma_\mu$  с увеличением

количества  $K$  используемых для их вычисления решений. Как видно на рис. 6а, 6б, уже при  $K \approx 3000$  наблюдается сходимость этих оценок с приемлемой точностью.

Гистограммы, рассчитанные по наборам случайных величин  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ , представлены на рис. 7, где сплошными линиями изображены оценки функций плотности вероятности  $p(\hat{h}), p(\hat{\rho}), p(\hat{E}), p(\hat{\mu})$  для рассматриваемых параметров ледового покрова. Как видно, на рис. 7 распределения  $p(\hat{h}), p(\hat{E}), p(\hat{\rho})$  локализованы вблизи наиболее вероятных значений  $\hat{h}, \hat{E}, \hat{\rho}$ ; для  $\hat{\mu}$  распределения  $p(\hat{\mu})$  не обладают явно выраженными максимумами. Результаты оценок параметров ледового покрова в виде средних и наиболее вероятных  $\bar{h} \pm \bar{\sigma}_h, \langle \hat{h} \rangle \pm \sigma_h$  (аналогично для  $\hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ ), полученных на основе обработки экспериментальных данных, приведены в табл. 3. На рис. 5б и на рис. 1 изображены дисперсионные зависимости экспериментальной групповой скорости  $v = v(f)$  и результата ее восстановления  $\bar{v} = v^{(ph)}(f; \bar{h}, \bar{\rho}, \bar{E}, \bar{\mu})$  с невязкой (3)  $\chi_c \approx 1.9 \times 10^{-2}$  (для решения  $\hat{v} = v^{(ph)}(f; \langle \hat{h} \rangle, \langle \hat{\rho} \rangle, \langle \hat{E} \rangle, \langle \hat{\mu} \rangle)$ ) невязка оказалась равной  $\chi_c \approx 8.1 \times 10^{-2}$  на фоне спектрограммы  $K_{sp}(\tau', f)$  функции взаимной корреляции шумов. Как видно на рис. 5б, рис. 7, а также в табл. 3, полученные оценки параметров ледового покрова описывают экспериментальные данные с высокой точностью (невязка по исходным данным  $\chi_c \approx 2\%$ ), при этом с меньшей среднеквадратичной ошибкой восстанавливаются толщина



**Рис. 7.** Гистограммы, построенные по различным реализациям решений  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ ; функции плотности вероятности  $p(\hat{h}), p(\hat{\rho}), p(\hat{E}), p(\hat{\mu})$ , оцененные по рассматриваемым наборам  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ , изображены на гистограммах сплошными толстыми линиями.

льда и плотность. Модуль Юнга характеризуется большим разбросом значений, при этом оцененное среднее значение представляется статистически значимым (рис. 7в). Для коэффициента Пуассона наиболее вероятного значения и вовсе не обнаруживается (рис. 7г), что приводит к существенному среднеквадратическому отклонению для этого параметра. Оценки вида  $\langle x \rangle \pm \sigma_x$ , полученные при простом усреднении по всему множеству реализаций  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ , оказываются хуже результатов, получаемых при учете вида функции плотности вероятности (см. табл. 3).

Следует отметить, что оценка  $E = 10 \pm 3$  ГПа соответствует значениям модуля Юнга, полученным независимо другими авторами в [20] при натурных измерениях на озере Байкал, а оценка толщины  $h = 0.79 \pm 0.08$  м находится в соответствии с наблюдениями, проводимыми в ходе выполнения настоящего эксперимента. Таким образом, в пассивном режиме были определены параметры льда озера Байкал, которые соответствуют трассе между двумя приемниками сейсмоакустического сигнала, установленными на льду (рис. 3а).

**Таблица 3.** Результаты восстановления по экспериментальным данным. Оценки, полученные простым арифметическим усреднением, представлены в столбце  $\langle x \rangle \pm \sigma_x$  ( $x$  обозначает каждый из рассматриваемых параметров  $\hat{h}, \hat{\rho}, \hat{E}, \hat{\mu}$ ); результаты, полученные с учетом функции плотности вероятности, приведены в столбце  $\bar{x} \pm \bar{\sigma}_x$

	$\langle x \rangle \pm \sigma_x$	$\bar{x} \pm \bar{\sigma}_x$
Толщина льда, $h$ , м	$1 \pm 0.3$	$0.79 \pm 0.08$
Плотность, $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$(8.5 \pm 0.7) \times 10^2$	$(8.4 \pm 0.7) \times 10^2$
Модуль Юнга, $E$ , ГПа	$7 \pm 5$	$10 \pm 3$
Коэффициент Пуассона, $\mu$	$0.25 \pm 0.15$	$0.22 \pm 0.13$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие методов исследования Северного Ледовитого океана является критически важным для России, обладающей самым протяженным арктическим шельфом. Наблюдающиеся в настоящее время существенные климатические изменения в этом регионе требуют оперативного мониторинга состояния ледового покрова. Сокращение мощности ледового покрова на Арктическом шельфе открывает широкие возможности для промышленного освоения ресурсов этого региона, позволяет использовать новые транспортные артерии в системе глобальной мировой торговли. Прогнозирование такой деятельности является стратегически важной задачей.

В работе предложен метод оценки толщины, плотности, модуля Юнга и коэффициента Пуассона ледового покрова с упрощенными требованиями на его практическую реализацию. Используются всего лишь два разнесенных в пространстве сейсмоприемника, регистрирующих вертикальную компоненту колебательной скорости сейсмоакустического шума. Спектрально-корреляционный анализ зарегистрированных шумов позволяет оценить дисперсионную зависимость групповой скорости изгибно-гравитационной моды ледового покрова, что является исходными данными для восстановления средних значений параметров льда между точками наблюдения. Использование двух одноканальных сейсмоприемников существенно снижает стоимость и упрощает техническую сложность проведения эксперимента по сравнению с подходами, использующими антенные системы с десятками многоканальных приемников [8, 9], однако усложняет решение обратной задачи в виду существенного уменьшения объема исходных данных и количества ограничений на значения восстанавливаемых параметров. Тем не менее, результаты обработки экспериментальных данных с помощью представленного подхода указывают на возможность решения обратной задачи с приемлемой точностью. Отчасти это связано с тем, что фактическое количество используемых частот  $\approx 150$  заметно превышает количество восстанавливаемых параметров льда (четыре характеристики льда  $h, \rho, E, \mu$ ). Более того, предложенный алгоритм (5) использует информацию не только о групповой, но и о фазовой скорости изгибно-гравитационной волны, тем самым дополнительно увеличивая объем исходных данных. Важным фактором является также сравнительно высокое отношение сигнал/помеха, которое удалось получить в рассматриваемом эксперименте при спектрально-корреляционной обработке сейсмических шумов (рис. 5б). В перспективе, использование трехкомпонентных сейсмометров позволит учитывать данные о продольной и поперечной модах ледового покрова,

дающих вклад в регистрируемый шум на низких частотах. В этом случае решение обратной задачи может быть заметно улучшено за счет привлечения новых первичных данных, а также дополнительных ограничений на допустимые значения восстанавливаемых параметров. Подробный анализ этих возможностей относится к перспективам дальнейших исследований.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-77-00067.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Собисевич А.Л., Преснов Д.А., Шуруп А.С.* Фундаментальные основы совершенствования пассивных сейсмогидроакустических методов исследования шельфа Арктики // *Акуст. журн.* 2021. Т. 67. № 1. С. 72–97.
2. *Алексеева Т.А., Фролов С.В., Сероветников С.С.* Обзор методов и основных результатов измерения толщины морского льда в Арктике // *Российская Арктика.* 2021. № 1(12). С. 33–49.
3. *Belter H.J., Krumpen T., Hendricks S., Hoelmann J., Janout M.A., Ricker R., Haas C.* Satellite-based sea ice thickness changes in the Laptev Sea from 2002 to 2017: comparison to mooring observations // *The Cryosphere.* 2020. V. 14. P. 2189–2203.
4. *Черных Е.Н., Ключевский А.В., Ружич В.В.* Сравнительное исследование записей близких землетрясений на скальном грунте и ледовом покрове озера Байкал // *Сейсмические приборы.* 2012. № 4. С. 55–66.
5. *Serdyukov A., Koulakov I., Yablokov A.* Numerical modelling of seismic waves from earthquakes recorded by a network on ice floes // *Geophys. J. Int.* 2019. V. 218. № 1. P. 74–87.
6. *Ewing M., Crary A.P.* Propagation of elastic waves in ice I // *Physics.* 1934. № 5. P. 165–168.
7. *Ewing M., Crary A.P.* Propagation of elastic waves in ice II // *Physics.* 1934. № 5. P. 181–184.
8. *Moreau L., Boué P., Serripierrri A., Weiss J., Hollis D. et al.* Sea ice thickness and elastic properties from the analysis of multimodal guided wave propagation measured with a passive seismic array // *J. Geophys. Res. Oceans.* 2020. V. 125. № 4. P. e2019JC015709.
9. *Serripierrri A., Moreau L., Boué P., Weiss J., Roux P.* Recovering and monitoring the thickness, density, and elastic properties of sea ice from seismic noise recorded in Svalbard // *The Cryosphere.* 2022. V. 16. № 6. P. 2527–2543.
10. *Stein P.J., Euerle S.E., Parinella J.C.* Inversion of pack ice elastic wave data to obtain ice physical properties // *J. Geophys. Res. Oceans.* 1998. V. 103. P. 21783–21793.
11. *Wapenaar K.* Retrieving the elastodynamic Green's function of an arbitrary inhomogeneous medium by cross correlation // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93. № 25. P. 254301-1–254301-4.
12. *Weaver R.L., Lobkis O.I.* Diffuse fields in open systems and the emergence of the Green's function // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. V. 116. № 5. P. 2731–2734.

13. Собисевич А.Л., Преснов Д.А., Собисевич Л.Е., Шуруп А.С. О локализации геологических отдельных арктического шельфа на основе анализа модовой структуры сейсмоакустических полей // Докл. Росс. Акад. наук. 2018. Т. 479. № 1. С. 80–83.
14. Преснов Д.А., Собисевич А.Л., Шуруп А.С. Исследование возможностей пассивной томографической реконструкции параметров мелкого моря по данным натуральных измерений на поверхности льда // Изв. РАН. Сер. физич. 2020. Т. 84. № 6. С. 815–818.
15. Коньков А.И., Лебедев А.В., Разин А.В. Анализ поверхностных волн в упругой среде с водоносным слоем // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59. № 4. С. 320–332.
16. Тихоцкий С.А., Преснов Д.А., Собисевич А.Л., Шуруп А.С. Использование низкочастотных шумов в пассивной сейсмоакустической томографии дна океана // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 1. С. 107–116.
17. Осетров А.В., Дроздова Л.Ф., Мышинский Э.Л. Определение фазовой скорости в акустических волноводах по известной групповой скорости // Noise Theory and Practice. 2020. Т. 6. № 4. С. 90–94.
18. Буров В.А., Касаткина Е.Е. Применение метода максимального правдоподобия к обработке сигналов с градиентного приемника // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 1. С. 22–25.
19. Богородский В.В. Упругие характеристики льда // Акуст. журн. 1958. Т. 4. № 1. С. 19–23.
20. Тимофеев В.Ю., Ардюков Д.Г., Гранин Н.Г., Жданов А.А., Кучер К.М., Бойко Е.В., Тимофеев А.В. Деформация ледового покрова, приливные и собственные колебания уровня озера Байкал // Физическая мезомеханика. 2010. Т. 13. С. 58–71.
21. Смирнов В.Н., Миронов Е.У. Исследования прочности, морфометрии и динамики льда в инженерных задачах при освоении шельфа в замерзающих морях // Проблемы Арктики и Антарктики. 2010. № 2(85). С. 5–15.
22. Марченко А.В., Карулин Е.Б., Чистяков П.В. Экспериментальное определение упругих характеристик морского ледяного покрова // Научно-технический сборник Вести газовой науки. 2020. № 3(45). С. 129–140.
23. Sambridge M., Mosegaard K. Monte Carlo methods in geophysical inverse problems // Rev. Geophys. 2002. V. 40. № 3. P. 1009.
24. Tarantola A. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. Society for industrial and applied mathematics, 2005. 339 p.
25. Bertero M., Boccacci P., De Mol C. Introduction to Inverse Problems in Imaging. Taylor & Francis Group, 2022. 341 p.
26. Dosso S.E., Dettmer J. Bayesian matched-field geoaoustic inversion // Inverse Problems. 2011. Т. 27. № 5. P. 055009.
27. Собисевич А.Л., Преснов Д.А., Тубанов Ц.А., Черемных А.В., Загорский Д.Л., Котов А.Н., Нумалов А.С. Байкальский сейсмоакустический эксперимент // Докл. Росс. Акад. наук. Науки о Земле. 2021. Т. 496. № 1. С. 82–86.
28. Собисевич А.Л., Преснов Д.А., Агафонов В.М., Собисевич Л.Е. Вмораживаемый автономный геоакустический буй нового поколения // Наука и технологические разработки. 2018. Т. 97. № 1. С. 25–34.