

ДИСКРЕТНАЯ АКУСТИКА: ARMA-МОДЕЛИРОВАНИЕ
ВРЕМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ, ТЕОРИЯ

© 2023 г. Ю. И. Бобровницкий^а *, И. А. Карпов^а

^аФедеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова
Российской академии наук, Малый Харитоньевский пер. 4, Москва, 101990 Россия

*e-mail: yuri@imash.ac.ru

Поступила в редакцию 30.06.2023 г.

После доработки 28.08.2023 г.

Принята к публикации 19.09.2023 г.

В физике, в частности, акустике время традиционно рассматривается как непрерывная координата. Некоторое исключение составляет обработка сигналов, где дискретизация необходима для расчетов на компьютерах. Но все акустические задачи формулируются и решаются с помощью непрерывных по времени моделей, описываемых дифференциальными уравнениями и их решениями в виде непрерывных функций времени. Между тем эти задачи могут быть эквивалентным образом сформулированы и решены с помощью дискретно-временных моделей, описываемых конечно-разностными уравнениями и их решениями в виде временных рядов. Как показывает опыт некоторых других областей науки, например, теории управления, дискретный подход имеет ряд преимуществ перед непрерывным подходом, использование которых значительно облегчает решение многих задач. Данная статья имеет цель частично восполнить имеющийся здесь пробел в акустике и направлена на создание теоретических основ дискретно-временного подхода к решению акустических задач. Статья ограничена рассмотрением одной широко распространенной в акустике колебательной системы – линейной структуры с N степенями свободы, состоящей из сосредоточенных инерционных, упругих и диссипативных элементов, к которой, в частности, приводит метод конечных элементов. Для нескольких непрерывных моделей этой системы в статье построены эквивалентные дискретно-временные модели, выведены конечно-разностные уравнения и получены их решения. Критерием эквивалентности непрерывных и дискретных моделей в статье принято математически точное равенство соответственных решений во все дискретные моменты времени. Исходя из этого критерия, между параметрами непрерывных и дискретных моделей и их уравнений установлены аналитические связи, позволяющие по непрерывной модели системы строить ее дискретно-временную модель и, наоборот, по известной дискретной модели строить ее непрерывную модель. Особое внимание в статье уделено вынужденным колебаниям системы под действием кинематического возбуждения, важного во многих акустических задачах, тогда как в литературе рассматривается исключительно силовое возбуждение. В статье также рассмотрено одно из самых полезных свойств дискретного моделирования – простота построения дискретных моделей по экспериментально измеренным сигналам. Приведен соответствующий пример. Отметим, что термин “ARMA-модель” является сокращением для “модели авторегрессии и скользящего среднего”, общепринятым в теории управления, теории систем и в других областях науки.

Ключевые слова: колебательные системы с N степенями свободы, эквивалентность дискретной и непрерывной моделей, энергетический критерий адекватности модели

DOI: 10.31857/S0320791923600671, EDN: CQEZFR

ВВЕДЕНИЕ

В акустике все физические переменные (давление, смещения и др.) традиционно рассматриваются как непрерывные функции времени и пространственных координат, а колебательные модели сред и структур описываются дифференциальными уравнениями, обыкновенными или в частных производных. В последнее время, однако, исследователям и инженерам все чаще приходится иметь дело с ситуациями, где переменные и

непрерывные функции дискретизируются и заменяются числовыми рядами. Так, компьютерная обработка и хранение непрерывных временных сигналов доступны только после их дискретизации по времени, а уточненные численные решения колебательных и волновых краевых задач стали возможны благодаря использованию методов конечных и граничных элементов, в которых непрерывные среды и конструкции заменяются их дискретными пространственными моделями. Нет сомнений в том, что в ближайшее

время, благодаря широкому применению компьютеров, дискретизация переменных и параметров будет использоваться все шире, а дискретная математика будет все более активно внедряться в теорию и инженерную практику решения акустических задач.

Между тем, существуют области, где исследуемые явления и процессы по своей природе являются дискретными или измеряются только в определенных моменты времени. Многообразие и доступность таких измерений способствовали раннему развитию научных исследований. Наблюдения за температурой воздуха в городах, за морскими приливами, солнечными пятнами и другими дискретными явлениями уже в 18-м веке привели ученых к формулировке математического понятия *временных рядов*, детерминированных и случайных, и к необходимости их анализа с целью извлечения из них информации, необходимой для понимания природы явлений, а также для построения их динамических моделей, прогнозирования и управления. В начале 20-го столетия на основе этих исследований был сформирован самостоятельный научный раздел “Анализ временных рядов” с большим числом важных результатов и приложений в области спектрального оценивания, статистики (см., например, [1–4]).

Настоящий прорыв в развитии дискретных моделей и методов исследования временных процессов начался в середине 20-го века и продолжается сейчас в связи с бурным развитием промышленности, особенно транспорта, и с необходимостью проектирования оптимальных систем автоматического управления производственными процессами и работой транспортных средств. Эта область науки, которую принято называть “теорией управления” (прежнее название “теория автоматического регулирования”), является сегодня одной из самых развитых. Здесь уже написаны десятки монографий как непосредственно по теории управления, например [5–9], так и по примыкающим к ней дисциплинам – по “идентификации систем”, т.е. по построению математических моделей динамических систем на основе экспериментальных данных [10–13], по цифровой обработке временных сигналов [4, 14] и др. По этой тематике также имеются тысячи публикаций в журналах и трудах многочисленных регулярных конференций – см., в частности, [15, 16], где в открытом доступе печатаются доклады конференций, проводимых под эгидой Международной федерации по автоматическому управлению (International Federation on Automatic Control – IFAC) за 1960–2014 гг. [15] и с 2015 г. по настоящее время [16]. Многие теоретические и практические результаты теории управления, в том числе дискретные модели и методы исследования временных процессов, в последние годы были успешно распространены на другие области, включая такие, казалось бы, далекие от техники области как

биология, медицина, языкознание и другие (см., например, [17, 18]).

Однако, акустику эти процессы затронули незначительно, несмотря на наличие целого ряда проверенных на практике достоинств дискретных методов (простота экспериментального построения дискретных моделей, экономичность в вычислениях, робастность, т.е. работоспособность при низких значениях отношения “сигнал/шум”, возможность прогнозирования случайных процессов и др.). В литературе можно найти отдельные статьи, где дискретные модели временных процессов применяются для решения задач модального анализа, акустического мониторинга и диагностики колебательных систем, например, в [19–23]. Но на регулярной основе, если не считать обработку сигналов, дискретные методы исследования временных процессов в акустике пока не применяются, насколько известно авторам данной статьи, которые не смогли найти в известных монографиях и справочниках по акустике даже упоминания о них.

В предлагаемой работе делается попытка частично восполнить этот пробел. Основное внимание в ней уделено построению дискретных по времени моделей по известным непрерывным моделям для простейших акустических структур – колебательных систем с конечным числом степеней свободы. В основу построения положен критерий, согласно которому временные ряды, описывающие свободные и вынужденные колебания дискретных моделей, должны в точности совпадать с соответственными дискретизированными непрерывными решениями. Такое требование продиктовано особенностью акустических задач, которая заключается в высокой чувствительности волновых и колебательных свойств к изменению модельных параметров. В частности, ниже в статье показано, что повсеместно применяемая в литературе процедура построения дискретных моделей путем формальной замены непрерывных производных конечными разностями приводит к физически неприемлемым результатам – см. Приложение А. Для построенных на основе указанного критерия дискретных моделей в статье выведены конечно-разностные уравнения и получены их решения для свободных и вынужденных колебаний под действием как силового, так и кинематического возбуждения. Между параметрами непрерывных и соответственных дискретных моделей установлены аналитические соотношения, позволяющие без труда переходить от непрерывных моделей к дискретным и наоборот. Отмечено одно из примечательных свойств дискретных моделей – это специальная структура их конечно-разностных уравнений. Она делает чрезвычайно простым построение самой модели экспериментально без предварительного знания соответственных непрерывных моделей и с использованием весьма ограниченного объема данных

измерений. В статье приведен пример такого построения.

Отметим особую роль, которую в данной работе играет известная теорема отсчетов Котельникова [24] (в западной литературе она известна под названием теорема Найквиста—Шеннона). Теорема гласит: любая непрерывная функция $x(t)$ с ограниченным спектром ($\omega < \omega_c$) может быть точно представлена своим дискретным временным рядом $x(nT)$ с интервалом дискретизации T , равным $0 < T \leq \frac{\pi}{\omega_c}$, и восстановлена с помощью разложения

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc} \left[\pi \left(\frac{t}{T} - n \right) \right],$$

где $\operatorname{sinc}(z) = \sin(z)/z$, n – целое число. Она, таким образом, означает, что два представления временной зависимости, в виде непрерывной функции времени и в виде временного ряда, являются при выполнении определенных условий эквивалентными. По существу, но в другой форме, теорема была получена математиками ранее в рамках решения задачи интерполяции функций [25]. Однако ее пришлось заново переоткрывать в 1930-х гг. для нужд теории связи, где она, в силу ее фундаментальной важности, получила название, связанное с выдающимися учеными этой области науки и техники. В настоящее время теорема отсчетов лежит в основе современных численных методов обработки сигналов, теории управления и других областях науки. Поскольку данная статья посвящена установлению аналитической связи между эквивалентными непрерывными и дискретными моделями колебательных систем, то теорема отсчетов и здесь предполагается выполненной во всех приводимых соотношениях, и, таким образом, также лежит в основе предложенной в статье теории.

Подчеркнем, что данная статья рассматривает дискретизацию колебательных процессов по времени и совсем не затрагивает дискретизацию по пространственным координатам, хотя она столь же актуальна и важна из-за широкого применения методов конечных и граничных элементов. Эти два научных направления, основанные на временной и на пространственной дискретизации, развивались независимо, решая разные физические задачи и используя разные математические аппараты. Важное отличие между ними заключается, в частности, в том, что все временные зависимости, в отличие от зависимостей от пространственных координат, подчиняются принципу причинности. С некоторыми имеющимися методами и результатами решения современных пространственно-дискретных или, иначе, сетевых и решетчатых задач читатель может ознакомиться, например, в статье [26].

В заключение Введения приведем перечень и краткую характеристику известных [2] временных дискретных моделей, которые используются в данной статье. Это, прежде всего, ARMA-модель или авторегрессионная модель скользящего среднего (AutoRegressive Moving Average model). В литературе используются и другие названия этой модели, например, ARX. Она описывается конечно-разностным уравнением вида

$$x[n] + \sum_{p=1}^P a_p x[n-p] = \sum_{q=0}^{Q-1} b_q w[n-q], \quad (1)$$

где $x[n]$ – подлежащая определению скалярная величина, например, смещение; $w[n]$ – заданное внешнее воздействие, например, сила; квадратные скобки указывают на принадлежность временному ряду, т.е. на значение функций x и w в дискретные моменты времени $t = nT$, где T – интервал дискретизации, например, $x[n] = x(nT)$; n , p , q , P и Q – целые числа. Коэффициенты a_p и b_q являются параметрами модели, а пара чисел (P, Q) называется порядком модели.

Модель (1) является объединением двух моделей – авторегрессионной модели (AR-модели), которая получается из (1) при $P \geq 1$ и $Q = 1$ или 0 , и модели скользящего среднего (MA-модели), которая соответствует уравнению (1) при $P = 0$ и $Q \geq 1$. Эти две модели независимы, но при отдельном использовании требуют большого, часто бесконечного, числа параметров, в то время как порядок ARMA-модели, как правило, невелик. Одна из часто применяемых в литературе разновидностей MA-модели, которая используется и в данной статье, носит название “модели черного ящика” или “фильтра с одним входом и одним выходом” и характеризуется конечно-разностным уравнением типа

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] w[n-k], \quad (2)$$

где временной ряд $h[n]$, называемый импульсной передаточной функцией, представляет собой выходной сигнал фильтра (черного ящика) при действии на его вход дискретной δ -последовательности Кронекера

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases} \quad (3)$$

В разных разделах науки ряд $h[n]$ имеет и другие названия, например, в акустике – это дискретная функция Грина. В соответствии с принципом причинности импульсная передаточная функция тождественно равна нулю при отрицательных n .

Большой класс составляют ARMA-модели с векторными переменными $x[n]$ и $w[n]$, которые описываются конечно-разностными уравнениями (1) с матричными коэффициентами. Ниже в статье будет использоваться одна такая модель –

так называемая SS-модель (State Space model), т.е. модель в пространстве состояний. Ее конечно-разностное уравнение записывается как

$$\mathbf{x}[n] + A\mathbf{x}[n-1] = B\mathbf{w}[n]. \quad (4)$$

Для колебательных систем с N степенями свободы вектор $\mathbf{x}[n]$ имеет размерность $2N$, его компонентами являются комплексные амплитуды N смещений и N скоростей, а A и B — это $2N \times 2N$ -матрицы. SS-модель является наиболее общей моделью для динамических систем. Она широко применяется в общих теоретических исследованиях, а в теории управления считается основной моделью [9].

Что касается непрерывных моделей систем с N степенями свободы, в статье используется хорошо известная M – C – K -модель конечно-элементного типа, состоящая из сосредоточенных масс m , демпферов c и упругостей k , описываемая системой N обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка; непрерывная SS-модель, описываемая системой $2N$ обыкновенных уравнений первого порядка, а также модель черного ящика, которая описывается импульсной передаточной функцией $h(t)$, т.е. откликом на δ -функцию Дирака, и интегральным уравнением

$$x(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)w(t-\tau)d\tau, \quad (5)$$

описывающим вынужденные колебания системы и являющимся непрерывным аналогом уравнения (2).

1. ДИСКРЕТНО-ВРЕМЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С N СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Целью данного раздела является построение дискретно-временных моделей для колебательных систем с конечным числом степеней свободы по их известным непрерывным моделям. В основу построения положено требование полного совпадения колебаний непрерывной и дискретной моделей в дискретные моменты времени. Постановка этой задачи мотивирована потенциальными возможностями дискретного подхода к решению акустических задач и, частично, некорректностью часто используемого в литературе метода построения дискретных моделей на основе формальной замены производных конечными разностями — см. Приложение А. Основным результатом раздела являются аналитические зависимости между соответственными дифференциальными и конечно-разностными уравнениями, их параметрами, решениями и спектрами, которые позволяют строить как дискретные модели по непрерывным моделям, так и непрерывные модели по дискретным моделям. Ряд результатов раздела, относящихся к силовому возбуждению систем, известны в литературе и приводятся без вывода. Результа-

ты, относящиеся к кинематическому возбуждению, насколько известно авторам, являются новыми. Для наглядности изложение начинается с простейшей колебательной системы, имеющей одну степень свободы. Затем полученные результаты распространены на системы с произвольным числом N степеней свободы.

1.1. Механический осциллятор

1.1.1. Непрерывный подход. Классической непрерывно-временной моделью произвольной линейной колебательной системы с одной степенью свободы общепринято считать механический осциллятор (рис. 1), т.е. структуру, состоящую из трех сосредоточенных элементов — массы m , пружины с жесткостью k и вязкого демпфера с коэффициентом демпфирования c , которая описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка,

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = \begin{cases} f(t), & (6a) \\ c\dot{u}_0(t) + ku_0(t). & (6b) \end{cases}$$

Здесь t — время, $u(t)$ — смещение массы, $f(t)$ — внешняя сила, приложенная к массе, $u_0(t)$ — внешнее кинематическое возбуждение (смещение), приложенное к пружине и демпферу со стороны основания, которое имеет место, например, при испытаниях на вибрационных стендах, точка означает производную по времени.

Механические параметры модели M – C – K выбраны произвольно в качестве основных представителей для всего класса колебательных систем с одной степенью свободы. Реальные системы могут иметь физически другие инерционные, упругие и демпфирующие элементы. Однако, результаты, полученные для модели (6), будут верны и для других представителей этого класса после соответственной замены параметров. Для удобства

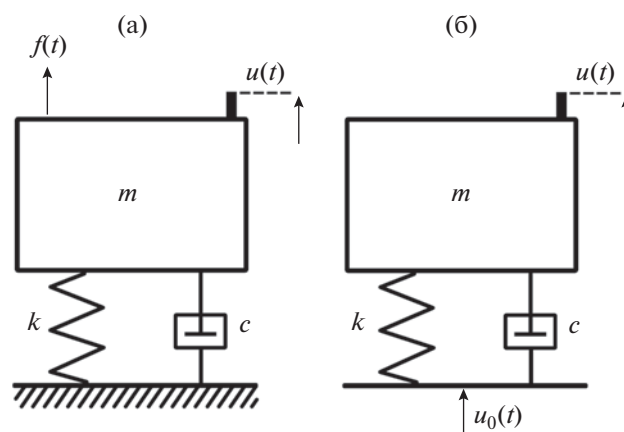


Рис. 1. Общая механическая модель колебательной системы с одной степенью свободы при (а) — силовом и (б) — кинематическом внешнем воздействии.

дальнейшего рассмотрения уравнение (6) поделим на m и представим в виде

$$\ddot{u}(t) + 2\gamma\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \begin{cases} \frac{1}{m} f(t), & (7a) \\ 2\gamma\dot{u}_0(t) + \omega_0^2 u_0(t), & (7b) \end{cases}$$

где введены следующие обозначения: $\gamma = \frac{c}{2m}$ –

коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная частота недемпфированной системы.

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -\gamma \pm i\omega_d, & \text{если } 4km > c^2 \text{ (или } \gamma < \omega_0), & (9a) \\ -\gamma = -\omega_0, & \text{если } 4km = c^2 \text{ } (\gamma = \omega_0), & (9b) \\ -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, & \text{если } 4km < c^2 \text{ } (\gamma > \omega_0), & (9b) \end{cases}$$

где $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ – собственная частота демпфированной системы.

В большинстве практических случаев количество демпфирования в системах невелико, и комплексно-сопряженные корни (9а) встречаются чаще всего, а два независимых собственных колебания являются гармоническими функциями частоты ω_d с экспоненциально затухающими амплитудами

$$u_1(t) = e^{-\gamma t + i\omega_d t}, \quad u_2(t) = e^{-\gamma t - i\omega_d t}. \quad (10a)$$

Существует немало и сильно демпфированных систем с большими значениями параметра c , близкими или превышающими критическое значение $c = 2\sqrt{km}$, при котором имеет место один корень двойной кратности (9б). При большем демпфировании рассматриваемая система перестает быть колебательной и все ее собственные движения становятся экспоненциально затухающими. В случае кратного корня (9б) собственные функции равны

$$u_1(t) = e^{-\omega_0 t}; \quad u_2(t) = te^{-\omega_0 t}, \quad (10b)$$

а в случае (9в) – это две затухающие экспоненты вида

$$u_1(t) = e^{-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}, \quad u_2(t) = e^{-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}. \quad (10b)$$

Произвольные свободные движения системы для всех значений демпфирования являются линейными комбинациями собственных функций (10) с амплитудами, однозначно определяемыми по начальным условиям.

Вынужденные колебания механического осциллятора определяются его *импульсной передаточной функцией* $h(t)$:

Напомним некоторые известные свойства колебаний этой структуры. Прежде всего, рассмотрим собственные или свободные колебания осциллятора, которые соответствуют решениям однородного уравнения (7) без правой части. Разыскивая его решение в стандартном виде $u(t) = e^{\lambda t}$, получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (8)$$

и два его корня

$$u(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau. \quad (11)$$

Функция $h(t)$ является по определению откликом системы на мгновенный единичный импульс, действующий в момент $t = 0$, и удовлетворяет уравнению (7) с правой частью в виде δ -функции Дирака, $f(t) = \delta(t)$ или $u_0(t) = \delta(t)$. В силу принципа причинности, $h(t) = 0$ при $t < 0$. Во всех дальнейших выкладках для краткости мы будем предполагать, что $\gamma < \omega_0$, т.е. что осциллятор имеет докритическое демпфирование и комплексно сопряженные корни (9а). Вычисления для сильно демпфированного осциллятора производятся аналогично и далее будут опущены.

Импульсная передаточная функция для силового возбуждения при $t > 0$ равна:

$$h_f(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\gamma t} \sin(\omega_d t), \quad (12a)$$

а для кинематического возбуждения $u_0(t) = \delta(t)$ имеет вид:

$$h_k(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\omega_d} \left[(\omega_d^2 - \gamma^2) \sin(\omega_d t) + 2\gamma\omega_d \cos(\omega_d t) \right]. \quad (12b)$$

При анализе и проектировании колебательных систем важное значение имеют также их спектральные характеристики. Приведем поэтому классическое преобразование Фурье от импульсных передаточных функций (12):

$$H_f(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi m} \right) \frac{1}{\omega^2 - 2i\omega\gamma - \omega_0^2} = |H_f(\omega)| e^{i\theta_f(\omega)}, \quad (13a)$$

$$H_k(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right) \frac{2i\omega\gamma + \omega_0^2}{\omega^2 - 2i\omega\gamma - \omega_0^2} \quad (13б)$$

Их принято называть *частотными характеристиками* системы (frequency response function или FRF); при этом модуль $|H(\omega)|$ называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), а угол $\theta(\omega)$ – фазово-частотной характеристикой (ФЧХ) системы. Частотная характеристика, как функция частоты, определена на всей комплексной плоскости ω и обладает свойством симметрии: $H(-\omega) = \bar{H}(\omega)$, где черта сверху означает комплексное сопряжение. Другими словами, ее действительная часть $\text{Re}[H(\omega)]$ является четной функцией частоты, а мнимая часть $\text{Im}[H(\omega)]$ – нечетной. При действии на осциллятор произвольного силового $f(t)$ или кинематического $u_0(t)$ возбуждения спектр его смещения равен, согласно (11), произведению частотной характеристики (13) и спектра Фурье воздействия.

1.1.2. Дискретизация и ARMA-модель. Пусть теперь представленные выше непрерывные по t свободные и вынужденные колебания механического осциллятора рассматриваются только в дискретные равноотстоящие моменты времени $t = nT$, где n – целое число, T – интервал дискретизации, равный обратному значению частоты дискретизации. Выясним, как при этом изменяются уравнения движения, импульсные функции и спектры осциллятора.

Рассмотрим сначала свободные колебания. Дискретизация двух независимых собственных колебаний осциллятора (10) превращает их в два независимых бесконечных временных ряда

$$\begin{aligned} u_1[n] &= u_1(nT) = e^{\lambda_1 T n}, \\ u_2[n] &= u_2(nT) = e^{\lambda_2 T n}. \end{aligned} \quad (14)$$

В соответствии с общей теорией [25], они должны удовлетворять однородному конечно-разностному уравнению, имеющему порядок два, равный числу независимых решений. Запишем это уравнение в следующем авторегрессионном виде

$$u[n] + a_1 u[n-1] + a_2 u[n-2] = 0, \quad (15)$$

где a_1 и a_2 – неизвестные пока постоянные коэффициенты. В литературе часто находят эти коэффициенты непосредственно из однородного непрерывного уравнения (7) путем замены в нем производных по времени конечными разностями. Однако, в данном случае этого делать нельзя, т.к. такая замена приводит к физически неоправданным последствиям – см. Приложение А.

Чтобы найти нужные значения коэффициентов a_1 и a_2 , два независимых решения уравнения (15) представим [25] в стандартном виде как $(u_1)^n$ и $(u_2)^n$, где n – целое, а u_1 и u_2 являются корнями характеристического уравнения

$$u^2 + a_1 u + a_2 = 0, \quad (16)$$

и сравним их с рядами (14). Чтобы эти решения совпадали, требуется, очевидно, выполнение следующих равенств

$$u_1 = e^{\lambda_1 T}, \quad u_2 = e^{\lambda_2 T}, \quad (17)$$

где λ_1 и λ_2 – корни “непрерывного” характеристического уравнения (8). Тогда, по известной теореме Виета, искомые коэффициенты уравнения (15) равны

$$a_1 = -(e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}), \quad a_2 = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T}, \quad (18а)$$

или после подстановки значений (9а)

$$a_1 = -2e^{-\gamma T} \cos(\omega_d T), \quad a_2 = e^{-2\gamma T}. \quad (18б)$$

Нетрудно найти и обратные зависимости. Если известны коэффициенты (18) конечно-разностного уравнения (15), то относительные значения двух коэффициентов соответственного непрерывного уравнения (6) выражаются через них как

$$\frac{c}{m} = -\frac{1}{T} \ln(a_2), \quad (19а)$$

$$\frac{k}{m} = \left[\frac{1}{T} \ln(\sqrt{a_2}) \right]^2 + \left[\frac{1}{T} \arccos\left(-\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right) \right]^2,$$

или в более компактной записи

$$\frac{c}{m} = -\frac{1}{T} \ln(u_1 u_2), \quad \frac{k}{m} = \frac{1}{T^2} \ln(u_1) \ln(u_2), \quad (19б)$$

где u_1 и u_2 – корни характеристического уравнения (16). Для нахождения третьего коэффициента уравнения (6), т.е. массы m механического осциллятора, нужно рассмотреть его вынужденные колебания.

В непрерывной постановке вынужденные колебания осциллятора при различных типах возбуждения полностью характеризуются импульсными передаточными функциями (12), которые после дискретизации превращаются во временные ряды:

$$h_f[n] = \frac{e^{-\gamma T n} \sin(\omega_d T n)}{m \omega_d}, \quad (20а)$$

$$h_k[n] = \frac{e^{-\gamma T n}}{\omega_d} \times \quad (20б)$$

$$\times \left[(\omega_d^2 - \gamma^2) \sin(\omega_d T n) + 2\gamma \omega_d \cos(\omega_d T n) \right].$$

Найдем теперь конечно-разностные уравнения, которым удовлетворяют ряды (20) при $t \geq 0$. Эти уравнения должны иметь один и тот же вид ARMA-уравнения (1):

$$\begin{aligned} h[n] + a_1 h[n-1] + a_2 h[n-2] &= \\ &= b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1], \end{aligned} \quad (21)$$

отличаясь только значениями МА-коэффициентов в правой части. Действительно, левая часть (21) должна совпадать с левой АР-частью уравнения (15) с коэффициентами (18), т.к. при $n > 1$ оба ряда (20) по своему определению удовлетворяют (15). Однако, правая часть (21) зависит от типа возбуждения. Для силового возбуждения нужен только один коэффициент, а в случае кинематического возбуждения правая часть (21), имитируя непрерывную дельта-функцию Дирака и ее производную, должна содержать дельта-последовательность Кронекера (3), приложенную в два начальных момента времени $n = 0$ и $n = 1$ с неизвестными пока коэффициентами b_0 и b_1 . Эти коэффициенты мы определим, найдя частное решение уравнения (21) и приравняв его поочередно рядам (20).

Поскольку при $n > 1$ уравнение (21) является однородным, его решение равно комбинации двух решений уравнения (15):

$$h[n] = C_1 (u_1)^n + C_2 (u_2)^n,$$

где u_1 и u_2 – корни характеристического уравнения (16), а C_1 и C_2 – неизвестные константы. Подставив это решение в (21) и положив $n = 0$ и $n = 1$, с учетом $h[n < 0] = 0$ в силу принципа причинности, найдем C_1 и C_2 и частное решение уравнения (21) в виде:

$$h[n] = (b_1 - a_1 b_0) \frac{(u_1)^n - (u_2)^n}{u_1 - u_2} - b_0 \frac{(u_1)^n u_2 - u_1 (u_2)^n}{u_1 - u_2} \quad (22a)$$

или после подстановки в него (13) и (14)

$$h[n] = (b_1 - a_1 b_0) e^{-\gamma T(n-1)} \frac{\sin(\omega_d T n)}{\sin(\omega_d T)} - b_0 e^{-\gamma T n} \frac{\sin[\omega_d T (n-1)]}{\sin(\omega_d T)}, \quad (22b)$$

а также соотношения

$$b_0 = h[0], \quad b_1 = h[1] + a_1 h[0]. \quad (23)$$

Если теперь подставить в (23) значения элементов рядов (20) в начальные моменты времени $n = 0$ и 1 , то найдем искомые коэффициенты b_0 и b_1 уравнения (21). Для силового возбуждения, как и ожидалось, отличен от нуля только один коэффициент

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{T}{m} e^{-\gamma T} \frac{\sin(\omega_d T)}{\omega_d T}, \quad (24a)$$

а для кинематического возбуждения оба коэффициента отличны от нуля

$$b_0 = 2\gamma, \quad b_1 = \frac{e^{-\gamma T}}{\omega_d} \times \left[(\omega_d^2 - \gamma^2) \sin(\omega_d T) - 2\gamma \omega_d \cos(\omega_d T) \right]. \quad (24b)$$

Таким образом, временные ряды (20) удовлетворяют одному и тому же конечно-разностному АРМА-уравнению (21), но с разными коэффициентами правой части. Авторы проверили, что решения (22) уравнения (21) с коэффициентами (24) в точности и для всех n совпадают с рядами (20) дискретизированных непрерывных импульсных функций (12).

Произвольные вынужденные колебания осциллятора в дискретной постановке вычисляются по его импульсным передаточным функциям (20) с помощью дискретной конволюции (2) с функциями возбуждения.

1.1.3. Спектральный анализ. Рассмотрим, как дискретизация изменяет спектр колебаний осциллятора, в частности, как меняются его частотные характеристики (13). Воспользуемся следующей известной теоремой [4], играющей важную роль в теории дискретных систем: дискретизация любой непрерывной функции приводит к периодическому продолжению ее спектра с периодом, равным частоте дискретизации. В нашем случае это означает, что спектр Фурье $H_d(\omega)$ дискретной импульсной функции (20) равен (см. Приложение Б)

$$H_d(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H(\omega - m\Omega), \quad (25)$$

где $H(\omega)$ – спектр непрерывной импульсной функции (13), $\Omega = 2\pi/T$ – круговая частота дискретизации. Из этого результата следует одно практически важное ограничение, накладываемое при дискретном анализе колебательных систем на частоту дискретизации, ширину частотной характеристики исследуемой системы и спектра возбуждения $f[n]$ или $u_0[n]$. Оно называется теоремой отсчета Котельникова и заключается в том, что спектр Фурье исследуемого сигнала в непрерывной постановке не должен выходить за рамки частотного интервала $[-\Omega/2, \Omega/2]$. В противном случае, соседние слагаемые в (25) накладываются друг на друга, делая невозможным точное восстановление спектра $H(\omega)$ непрерывного сигнала по спектру $H_d(\omega)$ дискретного сигнала.

Например, при спектральном анализе смещения механического осциллятора с силовым возбуждением и умеренным демпфированием его частотная характеристика (13) является быстро убывающей функцией частоты (убывает как ω^{-2} при $\omega \rightarrow \infty$), так что в интервале $[-2\omega_0, 2\omega_0]$, где ω_0 – это собственная частота осциллятора, содержится, как нетрудно проверить, более 95% энер-

гии сигнала. Частоту $2\omega_0$ поэтому можно считать верхней граничной частотой спектра непрерывного сигнала. Чтобы теорема Котельникова выполнялась, частота дискретизации Ω должна в этом случае быть выбрана выше так называемой частоты Найквиста $\Omega_N = 4\omega_0$, равной удвоенной частоте граничной частоты спектра.

Однако, если механический осциллятор возбуждается кинематически, как показано на рис. 1б, или в нем измеряется не смещение, а ускорение, ширина его частотной характеристики увеличивается. Одновременно должна увеличиться частота дискретизации и, как следствие, число вычислений. Еще более широкие спектры имеют сложные колебательные системы с большим числом степеней свободы и собственных частот. В таких случаях следует ограничивать спектры внешнего возбуждения. Подробное обсуждение ограничений при дискретном спектральном анализе приведено в книгах по цифровой обработке сигналов, например, в [4, 14].

Формула (25) полезна для теоретического анализа. Для практических вычислений удобнее применять z -преобразование – см. Приложение Б. Например, чтобы вычислить спектры временных рядов (20), воспользуемся непосредственно уравнением (21) и легко проверяемым свойством z -преобразования: сдвиг временного ряда на один шаг назад эквивалентен умножению z -спектра на z^{-1} . Умножив уравнение (21) на z^{-n} и просуммировав результат, получим формулу

$$H_d(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad (26)$$

которая после подстановки $z = e^{i\omega T}$ с точностью до множителя Ω совпадает с (25). Было проверено, что обращение z -спектра (26) с помощью второй формулы (Б13) в Приложении Б после взятия интеграла вычетами дает дискретные импульсные функции (20). Проверено также, что если рассматривать (26) как функцию частоты ω и взять классическое обратное преобразование Фурье в бесконечных пределах, то получим непрерывные импульсные функции (12), умноженные на функцию дискретизации – см. Приложение Б.

Подведем итоги исследования механического осциллятора. Переход от непрерывного подхода к анализу свободных и вынужденных колебаний осциллятора к дискретному подходу требует существенного изменения математических и физических средств анализа: непрерывные функции заменяются временными рядами; вместо обыкновенных дифференциальных уравнений должны решаться уравнения в конечных разностях; спектры дискретных колебаний всегда являются бесконечными и периодическими независимо от того, каков спектр при непрерывном анализе. Устанавливая соответствие между непрерывным

и дискретным подходами, мы исходили из условия, что временные ряды, описывающие колебания осциллятора, должны совпадать со значениями дискретизированных соответственных непрерывных функций времени. При этом между параметрами непрерывных и дискретных моделей были установлены взаимно однозначные аналитические связи, позволяющие переходить от одной модели к другой и обратно. Было в то же время показано, что это можно делать не всегда и корректный переход от непрерывной модели к дискретной модели возможен только для колебательных систем, спектры колебаний которых ограничены сверху по частоте, т.е. когда выполняется теорема отсчетов Котельникова. Эти выводы верны и для более сложных колебательных систем.

1.2. Колебательная система с N степенями свободы

В этом подразделе результаты, полученные при исследовании механического осциллятора, распространены и на случай линейных колебательных систем с N степенями свободы. Для этих систем существует довольно много векторных моделей, как непрерывных, так и дискретных [12, 27], которые отличаются друг от друга числом используемых переменных. Ниже будут рассмотрены две наиболее распространенные модели – SS-модель и модель черного ящика (фильтра с одним входом и одним выходом). SS-модель использует максимально возможное количество переменных $2N$ в пространстве состояний и удобна для теоретических исследований. Модель черного ящика использует одну переменную и удобна в экспериментальных исследованиях. Следуя принятой в статье общей схеме исследования, ниже для обоих случаев сначала формулируется непрерывная модель, а затем по ней строится соответственная дискретная модель. Как и для механического осциллятора, между дифференциальными и конечно-разностными уравнениями, их параметрами и решениями будут установлены аналитические связи.

1.2.1. Общая непрерывная модель. Для описания колебательных и волновых процессов сложных систем в акустике традиционно применяются две основные модели – пространственно непрерывные упругие среды, описываемые уравнениями в частных производных и граничными условиями, а также структуры, состоящие из сосредоточенных элементов и описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Время в обеих моделях считается непрерывным. В последние годы, благодаря повсеместному применению метода конечных элементов, эти модели сближаются, отличаясь количеством степеней свободы. Поэтому в качестве наиболее общей непрерывной акустической модели колебательных систем мы примем здесь вторую модель, т.е. дискретную

структуру, состоящую из N масс, соединенных между собой (и с основанием) сосредоточенными упругостями и вязкими демпферами. Модель хорошо изучена и описывается практически во всех учебниках и справочниках по акустике [28, 29]. Как и в случае механического осциллятора, выбор M – C – K в качестве параметров модели является условным, вместо них могут подразумеваться физически другие сосредоточенные элементы. Модель описывается системой N обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{f}(t), \\ \hat{K}\mathbf{u}_0(t) + \hat{C}\dot{\mathbf{u}}_0(t), \end{cases} \quad (27)$$

где $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_N(t)]^T$, $\mathbf{u}_0(t) = [u_{01}(t), \dots, u_{0N}(t)]^T$ и $\mathbf{f}(t) = [f_1(t), \dots, f_N(t)]^T$ – это N -векторы обобщенных смещений масс, смещений основания и внешних сил, приложенных к массам, инерционная $N \times N$ -матрица M действительна, симметрична и положительно определена, упругая матрица K и матрица C вязких демпферов действительны, симметричны и не-

отрицательны, $\hat{K} = \text{diag}\{K_{11}, K_{22}, \dots, K_{NN}\}$ и $\hat{C} = \text{diag}\{C_{11}, C_{22}, \dots, C_{NN}\}$. Уравнения (27) описывают колебания широкого класса колебательных систем с N степенями свободы, в том числе конечно-элементные модели. Уравнения отличаются от общепринятых добавлением варианта с кинематическим возбуждением $\mathbf{u}_0(t)$. Примерами задач с таким возбуждением могут служить колебания зданий во время землетрясений, а также стендовые испытания конструкций на вибрационных столах.

1.2.2. SS-модели. Для представления модели (27) в виде непрерывной SS-модели в пространстве состояний нужно удвоить количество переменных, например, приняв скорости масс $\dot{\mathbf{u}}(t)$ в качестве дополнительных N переменных. Система (27) N уравнений второго порядка запишется тогда в виде следующей системы $2N$ уравнений первого порядка:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = U\mathbf{y}(t) + V\mathbf{g}(t), \quad (28)$$

где введены обозначения

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_\alpha(t) \\ \mathbf{y}_\beta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_\alpha(t) \\ \mathbf{g}_\beta(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} [0, \mathbf{f}(t)]^T & \text{– для силового возбуждения,} \\ [0, \hat{K}\mathbf{u}_0(t) + \hat{C}\dot{\mathbf{u}}_0(t)]^T & \text{– для кинематического возбуждения,} \end{cases}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{\alpha\alpha} & U_{\alpha\beta} \\ U_{\beta\alpha} & U_{\beta\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix},$$

индексы α и β в блочном представлении векторов и матриц соответствуют значениям $\alpha = \{1, 2, \dots, N\}$ и $\beta = \{N+1, \dots, 2N\}$.

Положим, что при $t < 0$ система уже совершала свободные колебания, так что в момент времени $t = 0$ она приобрела смещение и скорости $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, которые примем за начальные условия задачи. Кроме того, будем считать, при $t < 0$ внешнее возбуждение отсутствует, начинает действовать в момент $t = 0$ и продолжает действовать в последующее время. При таких условиях решение системы (28) записывается в виде суммы двух слагаемых – общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы уравнений

$$\mathbf{y}(t) = e^{Ut}\mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{U(t-\tau)}V\mathbf{g}(\tau)d\tau. \quad (29)$$

Это решение взято из книги Ф.Р. Гантмахера [30], где также подробно разъяснено, как вычислять функции от матриц.

Как и в случае механического осциллятора, вынужденные колебания рассматриваемой системы удобно выразить через импульсную передаточную вектор-функцию $\mathbf{h}(t)$ – см. (11). Она описывается вторым слагаемым в (29), если в него вместо N -вектора $\mathbf{f}(t)$ или $\mathbf{u}_0(t)$ подставлять вектор $\mathbf{e}\delta(t)$, где $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$ – это N -вектор с единичными элементами, $\delta(t)$ – это дельта-функция Дирака. В результате для силового возбуждения получим

$$\mathbf{h}_f(t) = e^{Ut}V \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}. \quad (30a)$$

Для кинематического возбуждения нужно сначала с помощью интегрирования по частям преобразовать слагаемое с производной от дельта-функции и затем произвести интегрирование. В результате имеем:

$$\mathbf{h}_k(t) = e^{Ut} \left(V \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{K}\mathbf{e} \end{bmatrix} + UV \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{C}\mathbf{e} \end{bmatrix} \right), \quad (30b)$$

где $N \times N$ -матрицы \hat{K} и \hat{C} даны в (27). Дискретизация полученных решений (29), (30) сводится к замене $t = nT$, T – интервал дискретизации, превращая эти непрерывные векторные функции во временные векторные ряды.

Рассмотрим теперь дискретный подход к анализу колебательной системы с N степенями свободы и покажем, каким конечно-разностным уравнениям удовлетворяют временные ряды дискретизированных непрерывных решений, а также установим аналитическую связь между параметрами непрерывной и дискретной моделей. Как и при непрерывном подходе, воспользуемся для этого дискретной SS-моделью как наиболее общей среди всех дискретных моделей. В данном случае эта модель описывается следующей системой $2N$ конечно-разностных уравнений первого порядка

$$\mathbf{x}[n] = A\mathbf{x}[n-1] + B\mathbf{w}[n], \quad (31)$$

где $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{w}[n]$ – это $2N$ -векторы состояния и внешних воздействий, A – матрица порядка $2N$ параметров рассматриваемой системы и B – это $2N \times 2N$ -матрица, зависящая от особенностей внешнего воздействия, например, силового или кинематического, и учитывающая формальные особенности модели, такие как умножение возбуждения на обратную инерционную матрицу или V в (28) и другие. Порядок этой модели определен количеством переменных, необходимых для полного описания всех степеней свободы, т.е. равен $2N$. При тех же условиях, что и в непрерывном подходе, т.е. при начальных условиях $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0$ и при отсутствии внешнего возбуждения при отрицательных $n < 0$, решение системы уравнений находится стандартным способом [25] и равно

$$\mathbf{x}[n] = A^n \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^n A^{n-k} B\mathbf{w}[k]. \quad (32)$$

Первое слагаемое описывает свободные колебания, второе – вынужденные.

Найдем связь между параметрами A и B дискретной SS-модели (31) и материальными параметрами U и V непрерывной SS-модели (28), исходя из условия равенства $2N$ -векторов состояния решений (29) и (32) во всех дискретных моментах времени nT при свободных и при вынужденных колебаниях, иначе говоря, из равенства $\mathbf{x}[n] = \mathbf{y}(nT)$.

Приравнивая свободные колебания (первые слагаемые в (29) и (32)), непосредственно получаем соотношение

$$A = e^{UT}, \quad (33)$$

которое позволяет вычислить авторегрессионные параметры дискретной SS-модели рассматриваемой колебательной системы по известным материальным параметрам M , C , K непрерывной мо-

дели, точнее по их отношениям $M^{-1}K$ и $M^{-1}C$. Верно и обратное утверждение: если известна авторегрессионная матрица A колебательной системы, то по ней можно найти отношения матриц материальных параметров:

$$U = \frac{1}{T} \ln(A) \quad \text{или} \quad M^{-1}K = U_{\beta\alpha}, \quad M^{-1}C = U_{\beta\beta}. \quad (34)$$

Чтобы связать с материальными параметрами вторую матрицу дискретной SS-модели (31) – матрицу B , достаточно приравнять соответственные векторы импульсных переходных временных рядов. Для непрерывной модели этот вектор равен (30) для $t = nT$, а для дискретной модели он равен второму слагаемому решения (32), в котором внешнее воздействие отлично от нуля только в момент времени $kT = 0$ и соответствует $2N$ -вектору $\mathbf{w}[0]$, в котором каждый элемент равен единице, точнее:

$$\mathbf{h}[n] = A^n B \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

В результате, приравнивая (35) и $\mathbf{h}_f(nT)$ в (30а), получим, что для силового возбуждения системы искомая матрица равна:

$$B_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}. \quad (36a)$$

А приравнивая (35) и $\mathbf{h}_k(nT)$ в (30б), для кинематического возбуждения получим:

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & U_{\alpha\beta} M^{-1} \hat{C} \\ 0 & M^{-1} \hat{K} + U_{\beta\beta} M^{-1} \hat{C} \end{bmatrix}. \quad (36b)$$

Формулы (36) дают возможность определить матрицу B в дискретной модели (31), если известны все материальные параметры непрерывной модели. В случае силового возбуждения верно и обратное: зная матрицу B_f , можно вычислить инерционную матрицу системы:

$$M = (B_{\beta\beta})^{-1},$$

которая вместе с формулами (34) определяет все материальные параметры колебательной системы M , C , K . Однако, для кинематического возбуждения это не так: по известным матрицам A и B_k можно найти только некоторые отношения материальных матриц. Чтобы определить все материальные матрицы колебательной системы в отдельности, включая матрицы \hat{C} и \hat{K} , которые характеризуют соединение системы с вибрирующим основанием, необходимо знание матрицы A и обеих матриц (36).

Нетрудно проверить, что для случая $N = 1$, т.е. для колебательной системы с одной степенью свободы, полученные в этом подразделе результа-

ты в точности совпадают с результатами, полученными выше для механического осциллятора. В этом случае для непрерывной SS-модели (28) имеем следующие параметры

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\omega_0^2 & -2\gamma \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix},$$

а для дискретной модели (31) они равны

$$A = e^{UT} = e^{-\gamma T} \begin{bmatrix} \cos(\omega_d T) + \frac{\gamma}{\omega_d} \sin(\omega_d T) & \frac{1}{\omega_d} \sin(\omega_d T) \\ -\frac{\omega_0^2}{\omega_d} \sin(\omega_d T) & \cos(\omega_d T) - \frac{\gamma}{\omega_d} \sin(\omega_d T) \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix}, B_k = \begin{bmatrix} 0 & 2\gamma \\ 0 & \omega_0^2 - 4\gamma^2 \end{bmatrix}.$$

Проверено, что, исключив из векторов состояния x и y вторую компоненту (скорость), из этих уравнений можно получить все соотношения, приведенные в п. 1.1.1.

1.2.3. Одномерная модель черного ящика. Векторные SS-модели колебательных систем со многими степенями свободы и соответствующие уравнения и их решения удобны для теоретического анализа свободных и вынужденных колебаний. Однако они содержат много переменных и неудобны для экспериментального анализа сложных систем. Современные эксперименты, как правило, ограничиваются измерениями в небольшом числе точек и для их описания требуются более простые модели. В этом подразделе рассматривается простейший случай, когда колебания системы измеряются только в одной точке и возбуждение производится тоже в одной точке, этой же или другой. Для описания такого эксперимента, очевидно, достаточно модели черного ящика с одной скалярной переменной. Как будет показано далее, в непрерывном варианте модель описывается одним обыкновенным дифференциальным уравнением порядка $2N$ с правой частью, содержащей помимо самого возбуждения также множество его производных. А соответствующая дискретная модель является в общем случае ARMA-моделью (1) порядка $(2N, 2N)$, конечно-элементное уравнение которой содержит $2N$ авторегрессионных коэффициентов и $2N$ коэффициентов скользящего среднего для кинематического возбуждения и $2N-1$ для силового возбуждения. Для этих моделей ниже будут установлены аналитические связи между коэффициентами и решениями их уравнений, которые, как и в случае механического осциллятора и SS-моделей, позволяют строить дискретную модель по известной непрерывной модели и, наоборот, непрерывную модель по известной дискретной модели. Начнем с вывода дифференциального уравнения для непрерывной модели.

Рассмотрим снова систему уравнений (27) с силовым возбуждением и преобразуем ее следующим образом. Введя для краткости обозначение

для производной по времени $\partial = \frac{d}{dt}$, перепишем систему (27) в виде: $D(\partial)\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t)$, где каждый элемент $N \times N$ -матрицы $D(\partial)$ является полиномом второй степени относительно оператора ∂ . Формальным решением системы является $\mathbf{u}(t) = D^{-1}(\partial)\mathbf{f}(t)$, в котором j -ая компонента смещения удовлетворяет соотношению [30]

$$|D(\partial)|u_j(t) = \sum_{k=1}^N A_{jk}(\partial)f_k(t). \quad (37)$$

Здесь $|D(\partial)|$ – определитель матрицы $D(\partial)$, а $A_{jk}(\partial)$ – алгебраическое дополнение ее элемента $D_{kj}(\partial)$. Определитель $|D(\partial)|$ есть полином по ∂ степени $2N$, а определитель $A_{jk}(\partial)$ – полином степени $(2N - 2)$. Поэтому соотношение (37) фактически является обыкновенным дифференциальным уравнением $2N$ -го порядка для смещения $u_j(t)$ с правой частью в виде заданных внешних сил и их производных по времени. Очевидно, что другие компоненты смещения удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению, что и (37), отличаясь друг от друга правыми частями.

Физический смысл уравнения (37) состоит в том, что оно описывает передачу колебаний от N источников (сил) на j -ую массу N различными путями. Если источник только один, например, $f_k(t)$, то уравнение (37) описывает один такой путь передачи колебаний от силы $f_k(t)$, приложенной к массе с номером k , на массу с номером j . Этот путь, очевидно, ветвистый и объединяет множество “дорожек”, проходящих через всю колебательную систему и соединяющих эти две массы. В уравнении (37) этот факт отражается в виде производных различного порядка от $f_k(t)$. Для одного пути передачи колебаний, т.е. для колебаний в одной точке колебательной системы, вызванных возбуждением в другой точке, уравнение (37) записывается после деления на коэффициент при старшей производной как

$$\left(\partial^{2N} + \sum_{l=1}^{2N} \alpha_l \partial^{2N-l} \right) u_j(t) = \sum_{m=0}^{2N-2} \beta_m \partial^m f_k(t).$$

Если к k -ой массе вместо силы $f_k(t)$ приложено кинематическое возбуждение $u_{k0}(t)$ аналогично тому, как показано на рис. 1б для механического осциллятора, число производных в правой части уравнения увеличивается на единицу. Далее в этом подразделе мы не будем указывать, какой именно путь и какое возбуждение имеется в виду, так как они однотипны, и рассмотрим одно общее уравнение, верное для всех этих случаев:

$$u^{(2N)}(t) + \alpha_1 u^{(2N-1)}(t) + \dots + \alpha_{2N-1} u^{(1)}(t) + \alpha_{2N} u(t) = \beta_0 f(t) + \beta_1 f^{(1)}(t) + \dots + \beta_{2N-1} f^{(2N-1)}(t), \quad (38)$$

где $u(t)$ означает смещение какой-либо массы, а $f(t)$ — силу или смещение основания, действующие на эту или другую массу рассматриваемой колебательной системы. Верхние индексы в круглых скобках обозначают производные по времени соответственных порядков.

Отметим основные особенности уравнения (38). Главная из них это то, что для всех путей передачи, т.е. для всех $u_j(t)$, левая часть дифференциального уравнения (38) одна и та же. Это линейный дифференциальный оператор, порядок которого равен удвоенному числу степеней свободы колебательной системы. Физически это вполне объяснимо, т.к. свободные колебания системы, описываемые однородным уравнением (38), определяются только внутренними параметрами системы в целом и не зависят от того, где их наблюдают или как их возбуждают. Эта особенность дает теоретическое обоснование положения о том, что по измерениям колебаний в нескольких или даже в одной точке сложной колебательной системы можно получить полную информацию о собственных частотах, потерях и некоторых других свойствах системы в целом.

Еще одна важная особенность уравнения (38) — это структура его правой части, которая помимо силы $f_k(t)$ или смещения основания $u_{0k}(t)$ содержит множество их производных. Наличие производных связано с тем, что, как отмечалось выше, передача колебаний по системе происходит по многим дорожкам вязко-упруго соединенных масс. Чем больше связей между массами, тем больше дорожек, соединяющих источник с точкой наблюдения и тем больше слагаемых с производными. В общем же случае число коэффициентов $\{\alpha_j\}$ дифференциального уравнения (38) и коэффициентов $\{\beta_j\}$ его правой части одинаково и равно удвоенному числу степеней свободы системы.

Дискретным аналогом дифференциального уравнения (38) является конечно-разностное уравнение типа ARMA-уравнения (1), у которого число авторегрессионных коэффициентов совпа-

дает с числом коэффициентов скользящего среднего и равно удвоенному числу степеней свободы исследуемой системы:

$$\begin{aligned} & x[n] + a_1 x[n-1] + \\ & + a_2 x[n-2] + \dots + a_{2N} x[n-2N] = \\ & = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + \\ & + \dots + b_{2N-1} w[n-2N+1], \end{aligned} \quad (39)$$

где $x[n]$ — скалярный временной ряд (в данном случае смещение какой-либо массы), $w[n]$ — внешнее возбуждение. Число ненулевых коэффициентов скользящего среднего в случае силового возбуждения равно $2N - 1$, т.е. на единицу меньше. Отметим, что результаты (38), (39) для силового возбуждения были получены другим методом в работе [31].

Найдем связь между коэффициентами $\{\alpha_j, \beta_j\}$ дифференциального уравнения (38) и коэффициентами $\{a_k, b_k\}$ ARMA-уравнения (39). Однородное непрерывное уравнение (38) имеет $2N$ независимых решений вида

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \dots, u_{2N}(t) = e^{\lambda_{2N} t}, \quad (40)$$

где λ_k — это корни характеристического уравнения

$$\lambda^{2N} + \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k \lambda^{2N-k} = 0. \quad (41)$$

Так как коэффициенты этого уравнения действительны, то все его мнимые и комплексные корни состоят из сопряженных пар.

Однородное ARMA-уравнение (39) также имеет $2N$ независимых решений вида [25]:

$$x_1[n] = (x_1)^n, \dots, x_{2N}[n] = (x_{2N})^n, \quad (42)$$

где x_k — это корни характеристического уравнения

$$x^{2N} + \sum_{m=1}^{2N} a_m x^{2N-m} = 0. \quad (43)$$

Приравнявая ряды (42) и временные ряды, полученные дискретизацией непрерывных решений (40), $u_k(nT) = x_k[n]$, $k = 1, 2, \dots, 2N$, найдем аналитическую связь между корнями характеристических уравнений (41) и (43)

$$x_k = e^{\lambda_k T}, \quad k = 1, \dots, 2N. \quad (44)$$

А так как коэффициенты характеристических уравнений равны коэффициентам $\{\alpha_k\}$, $\{a_k\}$ уравнений (38) и (39) и, по теореме Виета, аналитически выражаются через корни этих уравнений, то соотношения (44) позволяют установить следующую связь между коэффициентами $\{\alpha_k\}$ и $\{a_k\}$. Если известно уравнение (38) и, следовательно, известны его коэффициенты $\{\alpha_k\}$ и корни $\{\lambda_k\}$, то авторегрессионные коэффициенты $\{a_k\}$ выражаются через них как

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -(x_1 + x_2 + \dots + x_{2N}) = \\
 &= e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T} + \dots + e^{\lambda_{2N} T}, \\
 a_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{2N-1} x_{2N} = \\
 &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2) T} + \dots + e^{(\lambda_{2N-1} + \lambda_{2N}) T}, \\
 &\dots \\
 a_{2N} &= \prod_{k=1}^{2N} x_k = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{2N}) T} = e^{-\alpha_1 T}.
 \end{aligned} \tag{45}$$

Обратно, если известно ARMA-уравнение (39) и, соответственно, известны коэффициенты a_k и корни x_k , то коэффициенты дифференциального уравнения (38) равны

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{2N}) = \\
 &= -\frac{1}{T} \ln(x_1 x_2 \dots x_{2N}) = -\frac{1}{T} \ln(a_{2N}), \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{T^2} [\ln(x_1) \ln(x_2) + \dots + \ln(x_{2N-1}) \ln(x_{2N})], \\
 &\dots \\
 \alpha_{2N} &= \frac{1}{T^{2N}} \prod_{k=1}^{2N} \ln(x_k).
 \end{aligned} \tag{46}$$

Связь коэффициентов (45) и (46), очевидно, неявная и выражена через корни характеристических уравнений $\{\lambda_k\}$ и $\{x_k\}$, которые между собой связаны функционально в (44). Но если удастся корни исключить из уравнений (44), (45) и (46), то связь становится явной как, например, в случае механического осциллятора – см. (18) и (19).

Связь между правыми частями уравнений (38) и (39) получим, как и в случае механического осциллятора, приравняв их импульсные передаточные функции. Импульсную функцию для непрерывного случая получим, применив преобразование Фурье к уравнению (38), положив в нем в качестве внешнего воздействия дельта-функцию Дирака, $f(t) = \delta(t)$. Прямое Фурье-преобразование дает следующую частотную характеристику системы

$$H(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\beta_0 + \beta_1 \lambda + \dots + \beta_{2N-1} \lambda^{2N-1}}{\lambda^{2N} + \alpha_1 \lambda^{2N-1} + \dots + \alpha_{2N}} = \frac{1}{2\pi} \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}, \tag{47}$$

$\lambda = i\omega,$

представленную в виде отношения двух полиномов от частоты. Вычисление вычетов обратного Фурье-преобразования после подстановки $t = nT$ дает искомую импульсную передаточную функцию, дискретизированную по времени

$$h[n] = h(nT) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{B(\lambda_k)}{dA(\lambda_k)/d\lambda} e^{\lambda_k T n}, \tag{48}$$

где λ_k – это корни характеристического уравнения (41).

Импульсную функцию для дискретного случая получим, применив z -преобразование к ARMA-уравнению (39), в котором в качестве внешнего возбуждения использована дельта-последовательность Кронекера (3). Прямое z -преобразование дает частотную характеристику системы

$$H_d(z) = z \frac{b_0 z^{2N-1} + b_1 z^{2N-2} + \dots + b_{2N-1}}{z^{2N} + a_1 z^{2N-1} + \dots + a_{2N}} = z \frac{Q(z)}{P(z)}, \tag{49}$$

$z = e^{i\omega T},$

которая, как и (47), представлена в виде отношения двух полиномов с той лишь разницей, что в (49) переменной полиномов является экспоненциальная функция $\exp(i\omega T)$, периодическая с частотой дискретизации $\Omega = 2\pi/T$. Вычисление вычетов обратного z -преобразования (см. Приложение Б) дает искомую импульсную передаточную функцию в виде временного ряда

$$h_d[n] = \sum_{k=1}^{2N} \frac{Q(z_k)}{P'(z_k)} z_k^n, \tag{50}$$

где z_k – корни характеристического уравнения (43), совпадающие со значениями x_k , штрих означает производную по z .

По принятому условию, временные ряды (48) и (50) должны совпадать, и равенство

$$h(nT) = h_d[n] \tag{51}$$

должно выполняться при любых n . Выше уже была установлена связь (44) между корнями характеристических уравнений (41) и (43), а также связь (46), (47) между коэффициентами дифференциального уравнения (38) и авторегрессионными коэффициентами уравнения (39). Поэтому все эти величины будем считать известными, а равенство (51) используем для установления прямой связи между коэффициентами $\{\beta_k\}$ и $\{b_k\}$ в правых частях уравнений (38) и (39). Поскольку число этих коэффициентов равно $2N$, то, положив число n в (51) равным $2N$ независимым значениям, например, $n = 1, 2, \dots, 2N$, получим систему $2N$ алгебраических линейных уравнений, которая устанавливает требуемую связь между векторами коэффициентов $\mathbf{\beta} = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2N-1}]^T$ и $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_{2N-1}]^T$:

$$R\mathbf{\beta} = S\mathbf{b}, \tag{52}$$

где элементы $2N \times 2N$ -матриц R и S равны

$$\begin{aligned}
 R_{nm} &= \sum_{k=1}^{2N} \frac{\lambda_k^{m-1} e^{\lambda_k T(n-1)}}{A'(\lambda_k)}, \\
 S_{nm} &= \sum_{k=1}^{2N} \frac{z_k^{2N+n-m-1}}{P'(z_k)}, \quad z_k = e^{\lambda_k T}.
 \end{aligned}$$

Если известны коэффициенты β , т.е. известно дифференциальное уравнение (38), то коэффициенты \mathbf{b} скользящего среднего в ARMA-уравнении (39) равны $\mathbf{b} = S^{-1}R\beta$, и наоборот.

В частности, для механического осциллятора $N = 1$ имеем:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T} & \lambda_1 e^{\lambda_1 T} - \lambda_2 e^{\lambda_2 T} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T} & 1 \end{bmatrix},$$

где $\lambda_{1,2}$ даны в (9). Нетрудно проверить, что соотношение (52) с матрицами (53) верно как для силового (вектор $\beta = [0, 1/m]^T$ дан в (7а)); \mathbf{b} дан в (24а)), так и для кинематического возбуждения ($\beta = [\omega_0^2, 2\gamma]^T = [\lambda_1\lambda_2, -(\lambda_1 + \lambda_2)]^T$ дан в (7б)); \mathbf{b} дан в (24б)).

Таким образом, все результаты, полученные для механического осциллятора, распространены на произвольные линейные колебательные системы со многими степенями свободы. Для наиболее известных непрерывных моделей этих систем построены дискретные аналоги и показано, что они одинаково полно описывают свободные и вынужденные колебания систем. Критерием их эквивалентности в статье принято считать равенство их смещений во все дискретные моменты времени. Между параметрами и решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, которыми описываются непрерывные модели, и конечно-разностных уравнений дискретных моделей установлены аналитические связи, позволяющие строить дискретные модели по непрерывным моделям и, наоборот, строить непрерывные модели по дискретным моделям. Однако непрерывные модели и их дискретные аналоги имеют разные структуры, используют разные математические аппараты и физические интерпретации результатов. Поэтому при решении одних и тех же задач они могут сильно отличаться по физическим свойствам результатов, по области применимости и эффективности. В частности, решение некоторых акустических задач оказывается предпочтительнее при использовании именно дискретных моделей. Таковыми являются, например, задачи моделирования сложных колебательных систем по экспериментальным данным, типовые задачи модального анализа и другие.

2. ПОСТРОЕНИЕ ARMA-МОДЕЛИ

Одним из достоинств дискретного подхода к анализу колебательных систем является простота построения их ARMA-моделей по экспериментальным данным. Действительно, как видно из ARMA-уравнений (1) и (39), неизвестные пара-

метры модели – коэффициенты авторегрессии a_p и скользящего среднего b_q входят в эти уравнения линейно и легко находятся с помощью стандартных методов решения систем линейных алгебраических уравнений, если известны (экспериментально измерены) временные ряды $x[n]$ и $w[n]$ – см., например, [12, 23, 31–33]. Единственное затруднение, которое может при этом возникнуть, состоит в том, что порядок модели, т.е. количество неизвестных коэффициентов, необходимо знать заранее.

В общей теории идентификации динамических систем [10–13] определение порядка модели является одной из основных не решенных до конца проблем моделирования и ей уделено в литературе много внимания. Был предложен целый ряд критериев, по которым оценивают адекватность модели и ее порядок. Наиболее часто используются так называемые информационные критерии, основанные на оценке количества информации в модельных сигналах, а также критерии, основанные на оценке способности модели правильно прогнозировать случайные временные ряды [11, 12, 34, 35]. Для вычисления некоторых из этих критериев в МАТЛАБе составлены стандартные программы [36]. Однако, как следует из публикаций, эффективность этих критериев зависит от решаемой задачи, так что универсального критерия, по-видимому, не существует, по крайней мере, для моделирования сложных динамических систем.

Несколько иная ситуация имеет место в акустике при дискретном моделировании колебательных систем с N степенями свободы. Выше в п. 1 статьи приведен теоретический результат, который облегчает определение порядка ARMA-модели таких систем. Результат устанавливает однозначную аналитическую связь между порядком ARMA-модели и числом N степеней свободы системы, найти которое как правило нетрудно, например, по числу резонансных частот в спектре колебаний. Помимо этого, для нахождения наилучшей модели или ее подтверждения мы предлагаем количественный критерий адекватности модели, названный энергетическим критерием ЕС. Он определяется как отношение разности спектральных плотностей мощности (PSD) колебаний системы и модели к PSD системы:

$$EC = \frac{\int |\text{PSD}_{\text{system}} - \text{PSD}_{\text{model}}| d\omega}{\int \text{PSD}_{\text{system}} d\omega}, \quad (54)$$

где интегрирование производится по рабочему диапазону частот. Он количественно характеризует точность модели по мощности сигналов, что выгодно отличает его от других известных критериев при решении акустических задач.

В качестве примера рассмотрим простейшую колебательную систему – механический осциллятор, экспериментально исследованный ранее

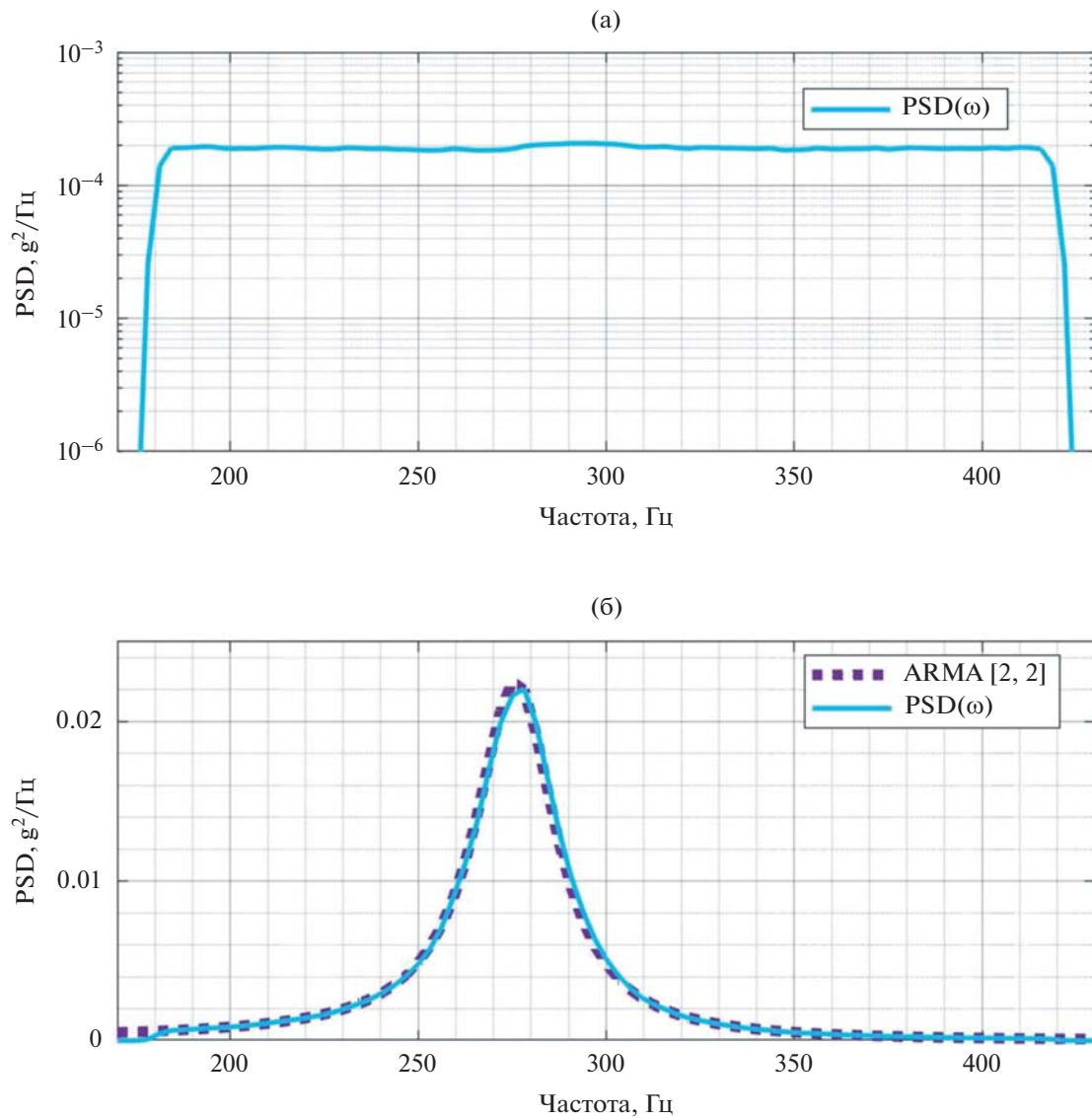


Рис. 2. Спектральная плотность мощности (а) – ускорения входного кинематического воздействия и (б) – ускорения массы осциллятора.

одним из авторов данной статьи с целью определения в ней количества демпфирования [23]. Осциллятор возбуждался кинематически на одном из вибростендов случайным сигналом, имеющим постоянную спектральную плотность мощности в рабочем диапазоне частот – см. рис. 2а. Спектр колебаний массы осциллятора (рис. 2б) содержит один резонанс на частоте $f_0 = 275$ Гц. Следовательно, система имеет одну степень свободы, и порядок ее ARMA-модели был принят равным (2, 2). Все четыре коэффициента ARMA-уравнения были определены в [23], найдены материальные параметры (масса, жесткость, коэффициент демпфирования) и модальные параметры (собственная частота недемпфированной системы и коэффициент потерь). Они совпали с большой точностью со значениями, измеренными другими способами.

На рис. 3а приведен также график критерия ЕС как функции двух переменных – количества авторегрессионных коэффициентов AR и коэффициентов MA скользящего среднего. По графику видно, что порядок (2, 2) соответствует малому значению критерия, $ES(2, 2) = 0.012$. При меньших порядках значение критерия, т.е. ошибка моделирования, сильно возрастает. При больших порядках ошибка моделирования также невелика, поэтому любая модель порядка больше (2, 2) допустима для использования, однако, требует значительно большего объема вычислений по сравнению с моделью (2, 2). Таким образом, как следует из рис. 3а, для рассматриваемой системы существует много приемлемых моделей, однако, наилучшая из них соответствует минимальному значению порядка, который совпадает с найден-

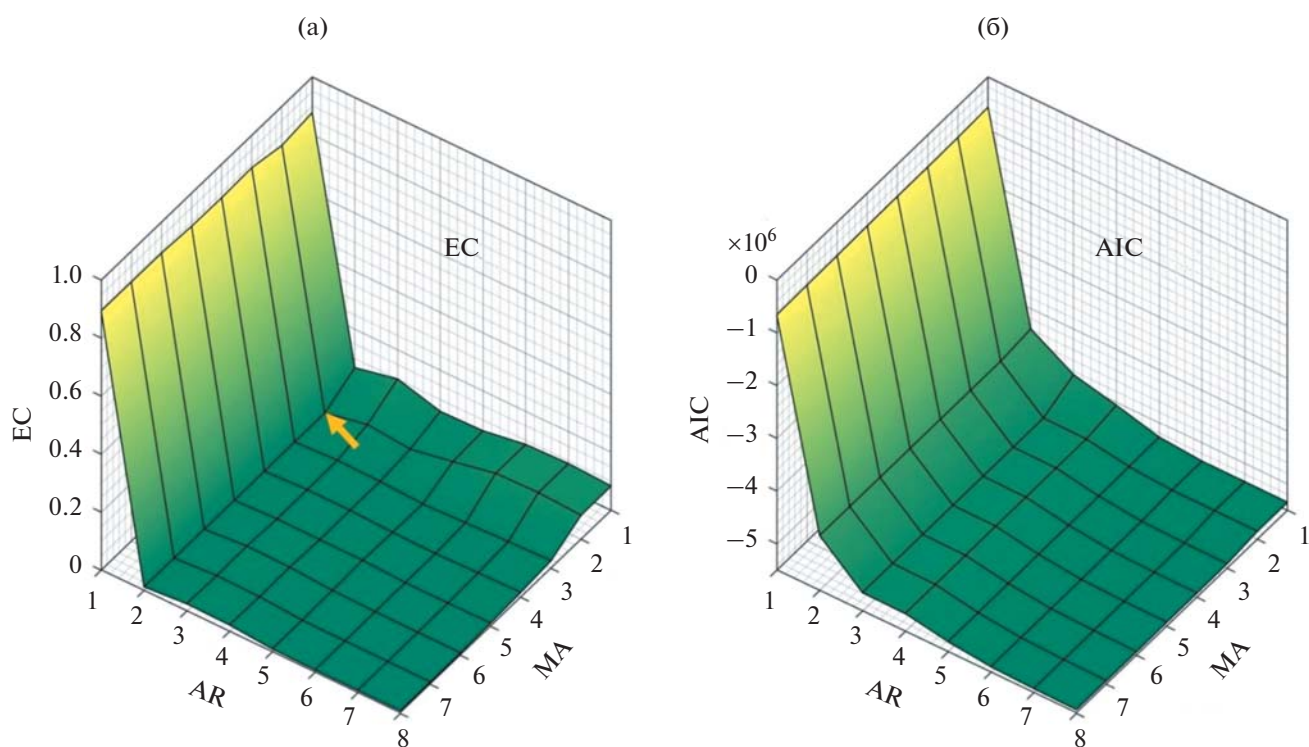


Рис. 3. Графики адекватности ARMA-моделирования осциллятора для различных значений порядка модели (AR, MA) согласно (а) – энергетическому критерию (54) и (б) – информационному критерию Акаике; стрелкой указана модель (2, 2).

ным выше теоретическим значением (2, 2). Для справки на рис. 3б приведен график наиболее популярного в литературе информационного критерия Акаике AIC [34]. Он, как можно видеть, приводит в данном случае к несколько завышенному значению порядка модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одной из наиболее ранних и развитых областей математики является теория временных рядов, т.е. моделирование и анализ временных процессов, детерминированных и случайных, заданных в дискретные моменты времени. Известны ее богатые на результаты приложения в области спектрального анализа, в теории автоматического регулирования (теории управления) и других областях науки, в том числе не связанных с техникой. Однако в акустике методы дискретно-временного анализа пока не нашли должного применения, несмотря на их достоинства и перспективы. Данная статья направлена на то, чтобы частично исправить эту ситуацию. В ней создана теоретическая основа дискретно-временного подхода к решению акустических задач, связанных с линейной системой из сосредоточенных параметров с N степенями свободы. Свободные и вынужденные колебания этой системы под действием внешних сил хорошо изучены в непрерывно-временной постановке. В данной статье, в добавление к из-

вестным в литературе результатам, учтены также вынужденные колебания этой системы под действием кинематического возбуждения, которое имеет место во многих практических задачах. В статье получены следующие основные результаты.

- Сформулирован критерий эквивалентности дискретной и непрерывной моделей колебательной системы: они должны давать одинаковые решения во все дискретные моменты времени.

- На основе критерия эквивалентности для нескольких непрерывных моделей системы с N степенями свободы (модели в пространстве состояний, модели черного ящика) построены соответственные дискретно-временные модели, конечно-разностные уравнения и их решения.

- Получены аналитические соотношения между параметрами дифференциальных уравнений непрерывных моделей и параметрами соответственных конечно-разностных уравнений дискретных моделей; эти соотношения позволяют однозначно строить дискретно-временную модель системы по известной непрерывной модели и, наоборот, непрерывную модель по дискретной.

- Показано, что ARMA-модель системы с N степенями свободы, совершающей вынужденные колебания под действием кинематического возбуждения, имеет порядок $(2N, 2N)$, а под действием силового возбуждения – порядок $(2N, 2N - 1)$.

– Предложен энергетический критерий адекватности ARMA-модели, характеризующий точность моделирования по спектральной плотности мощности колебаний.

Представленная статья посвящена теории. Ее применение к решению практических задач, в частности, актуальной, но еще не решенной до конца, задачи экспериментального определения количества демпфирования в колебательных системах, авторы планируют на ближайшее время.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ЗАМЕНА ПРОИЗВОДНЫХ КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

Одним из часто используемых в литературе методов построения дискретных конечно-разностных уравнений по известному непрерывному дифференциальному уравнению является метод, основанный на простой замене производных соответственными конечными разностями. В этом приложении на примере механического осциллятора показано, что этот метод может приводить к существенному изменению колебательных свойств осциллятора и, следовательно, не может применяться к решению акустических задач.

Пусть имеется механический осциллятор без потерь (рис. 1, $c = 0$), который описывается однородным обыкновенным дифференциальным уравнением (7):

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad (\text{A1})$$

и совершает свободные колебания с заданной частотой ω_0 и начальными условиями:

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du(0)}{dt} = 0. \quad (\text{A2})$$

Нетрудно получить решение задачи (A1)–(A2). Оно равно

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) \quad (\text{A3a})$$

или после дискретизации с частотой $\Omega = 2\pi/T$

$$u[n] = u(nT) = u_0 \cos(\omega_0 nT). \quad (\text{A3б})$$

Решение (A3) описывает незатухающие гармонические колебания с амплитудой u_0 и частотой ω_0 .

Построим теперь для этого осциллятора конечно-разностное уравнение, заменив формально в уравнении (A1) вторую производную известным конечно-разностным выражением, и сравним его решение с решением (A3). Положив в (A1) $u(t) = u[n]$ и заменив вторую производную так называемой нисходящей конечной разностью второго порядка [37]

$$\frac{1}{T^2}(u[n+2] - 2u[n+1] + u[n]), \quad (\text{A4})$$

получим следующее однородное конечно-разностное уравнение для дискретных колебаний механического осциллятора:

$$u[n+2] - 2u[n+1] + [1 + (\omega_0 T)^2]u[n] = 0 \quad (\text{A5})$$

и его общее решение [25], равное

$$u[n] = C_1(1 + i\omega_0 T)^n + C_2(1 - i\omega_0 T)^n,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Наложив на него начальные условия $u[0] = u_0, u[1] - u[0] = 0$, аналогичные условиям (A2), получим $C_1 = C_2 = u_0/2$ и окончательное решение задачи

$$u[n] = u_0 r^n \cos(\omega nT), \quad (\text{A6})$$

где $r = [1 + (\omega_0 T)^2]^{1/2}$ и $\omega = \frac{1}{T} \arctg(\omega_0 T)$, описывающее свободные дискретные колебания рассматриваемого механического осциллятора с начальным смещением u_0 и нулевой начальной скоростью.

Сравнение двух решений (A3) и (A6), полученных для одной и той же структуры, показывает, что они близки по форме и численно только при малых интервалах дискретизации T и небольших значениях количества отсчетов n . Однако с физической (колебательной) точки зрения они различаются принципиально. Во-первых, амплитуда колебаний (A6) не остается постоянной, а растет экспоненциально со временем, т.к. $r > 1$. Физически это означает, что осциллятор обладает отрицательным демпфированием и является, следовательно, неустойчивой колебательной системой, что, очевидно, не соответствует действительности. Во-вторых, согласно (A6), осциллятор колеблется с частотой ω , которая не равна заданной ω_0 .

Для наглядности рассмотрим пример, когда частота дискретизации Ω в 10 раз превышает частоту колебаний осциллятора ω_0 . В этом случае $\omega_0 T = \pi/5 \approx 0.628$ и амплитуда колебаний (A6) возрастает более чем в 5 раз через каждые 10 отсчетов, а частота колебаний уменьшается почти в два раза, $\omega/\omega_0 = 0.56$.

Таким образом, метод получения дискретного AR-уравнения из непрерывного уравнения путем замены производной по времени конечной разностью превратило обычный механический осциллятор без потерь в совершенно другую структуру, обладающую качественно отличными акустическими свойствами.

Отметим, что если вторую производную по времени в уравнении (A1) заменить, вместо (A4), восходящей конечной разностью второго порядка [37],

$$\frac{1}{T^2}(u[n] - 2u[n-1] + u[n-2]),$$

то вместо (A6) получится уравнение

$$\left[1 + (\omega_0 T)^2\right] u[n] - 2u[n-1] + u[n-2] = 0,$$

имеющее решение

$$u[n] = u_0 r^{-n} \cos(\omega T n), \quad (A7)$$

с теми же значениями r и ω , что и в (А6). Но в отличие от (А6), решение (А7) экспоненциально убывает по амплитуде, что физически эквивалентно наличию положительного демпфирования в осцилляторе.

Таким образом, показано, что общепринятый способ перехода от непрерывных уравнений к дискретным конечно-разностным уравнениям с помощью замены производных конечными разностями может приводить к большим отличиям от соответственных непрерывных решений, вплоть до изменения типов колебательного или волнового движения, сопровождаемая изменением собственных частот и появлением ложных потерь. Из проведенного анализа следует, что для решения акустических задач применение рассмотренного метода некорректно и нужно использовать другие методы, которые не изменяют колебательных или волновых свойств исследуемых сред и структур, например, метод данной статьи, основанный на равенстве решений непрерывного и дискретного уравнений в дискретных точках.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ВЫВОД ФОРМУЛЫ (25), ЕЕ СВЯЗЬ С ВРЕМЕННЫМИ РЯДАМИ И z -ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ

Когда говорят о спектре какого-либо непрерывного временного сигнала $x(t)$, то чаще всего подразумевают классическое преобразование Фурье в бесконечных пределах, уточняя при этом величину постоянных множителей перед прямым и обратным преобразованием. Однако, существуют и другие определения спектра, например, спектр временного ряда (т.е. дискретно-временное преобразование Фурье), спектр периодического сигнала (ряд Фурье), конечный ряд Фурье. Наконец, существует z -преобразование и z -спектр дискретных сигналов, тесно связанный с рядом Фурье. Подробный анализ и связь между этими спектральными вариантами можно найти в книге [4]. В данной статье в качестве главного используется определение спектра, основанного на классическом преобразовании Фурье в следующей традиционной форме:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (B1)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Таковыми, например, являются спектры (13) и (25). Доказательство теоремы (25), которое дано в этом Приложении, также производится в рамках преобразования (Б1). Однако, в конце Приложения приведена связь со спектрами временных рядов, а также с z -спектрами, использование которых во многих практических задачах оказывается технически эффективнее.

Пусть в соответствии с (Б1) имеется непрерывный сигнал $x(t)$ и его спектр Фурье $X(\omega)$. Требуется найти спектр Фурье дискретизированной функции $x_d(t)$ и показать, что он равен (25).

Адекватным представлением дискретизированной функции является в этом случае произведение непрерывной функции $x(t)$ и так называемой функции дискретизации (Time Sampling function) или “гребенки Дирака” $TS_T(t)$:

$$x_d(t) = x(t) TS_T(t). \quad (B2)$$

Она определяется через дельта-функции Дирака как

$$TS_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (B3)$$

где T – интервал дискретизации. Функция дискретизации – это периодическая функция времени с периодом T , отличная от нуля в дискретных точках $t = nT$, n – целое. В силу периодичности она может быть представлена также в виде ряда Фурье [37]:

$$TS_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n t/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t}, \quad (B4)$$

где $\Omega = 2\pi/T$ – круговая частота дискретизации.

Для доказательства равенства (25) нам потребуется спектр Фурье $S_{TS}(\omega)$ функции дискретизации, т.е. ее прямое преобразование (Б1). Воспользовавшись ее представлениями (Б3) и (Б4), с помощью первой формулы (Б1) получим для него

$$S_{TS}(\omega) = \frac{1}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n \omega/\Omega} =$$

$$= \frac{1}{\Omega} FS_{\Omega}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega). \quad (B5)$$

Здесь функция $FS_{\Omega}(\omega)$ – это частотная гребенка Дирака (Frequency Sampling function), равная временной гребенке после замены t и T на ω и Ω . Таким образом, спектр временной гребенки Дирака пропорционален гребенке Дирака в частотной области.

Найдем теперь классический спектр Фурье дискретной функции (Б2):

$$X_d(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{TS}_T(t) e^{-i\omega t} dt = \quad (\text{Б6})$$

$$= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-i\omega Tn}.$$

Из теории преобразования Фурье [4] известно, что спектр произведения двух функций времени равен свертке их спектров, т.е.

$$X_d(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \varphi) S_{\text{TS}}(\varphi) d\varphi.$$

Подставляя сюда спектры (Б1) и (Б5), получим

$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega), \quad (\text{Б7})$$

что и доказывает справедливость теоремы (25).

Нетрудно проверить правильность этого результата, взяв от (Б7) обратное преобразование Фурье. Действительно, в результате элементарных преобразований имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega) e^{i\omega t} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega) e^{i(\omega - n\Omega)t} d(\omega - n\Omega) =$$

$$= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} = x_d(t),$$

что и должно быть. Здесь было использовано представление (Б4) для функции дискретизации.

Укажем теперь на связь классического спектра Фурье (Б7) со спектром временного ряда и z -спектром. В теории временных рядов [3, 14] спектр временного ряда $x[n]$ определяется как

$$S_x(e^{i\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i\omega Tn}. \quad (\text{Б8})$$

Сравнение определения (Б8) с соотношением (Б6) приводит к равенству

$$S_x(e^{i\omega T}) = \Omega X_d(\omega), \quad (\text{Б9})$$

которое означает, что спектр $S_x(e^{i\omega T})$ временного ряда как функция частоты ω равен с точностью до множителя Ω классическому спектру $X_d(\omega)$ дискретизированной функции $x(nT)$. Как и спектр $X_d(\omega)$, спектр временного ряда является периодической функцией частоты ω с периодом Ω и потому представим в виде ряда Фурье в частотной области:

$$S_x(e^{i\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\omega Tn}. \quad (\text{Б10})$$

Соотношение (Б8) как раз и является таким представлением, причем коэффициенты ряда

Фурье равны соответственным значениям временного ряда. Покажем это также напрямую, исходя из общей теории рядов Фурье. Действительно, по определению [37] n -ый коэффициент разложения равен:

$$c_n = \frac{1}{\Omega} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} S_x(e^{i\omega T}) e^{i\omega Tn} d\omega =$$

$$= \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} X_d(\omega) e^{i\omega Tn} d\omega = \quad (\text{Б11})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega Tn} d\omega = x(nT),$$

т.е. n -ому значению временного ряда $x[n]$. Таким образом, спектр временного ряда полностью определяется соотношениями (Б8)–(Б11), которые фактически являются обычным рядом Фурье в частотной области.

Важной особенностью спектра временного ряда, как это видно из (Б8) и (Б10), является то, что он представляет собой так называемую сложную функцию частоты, т.е. он является функцией некой промежуточной переменной, которая в свою очередь является функцией частоты. Эта промежуточная переменная в данном случае равна z -переменной:

$$z = e^{i\omega T}. \quad (\text{Б12})$$

Нетрудно видеть, что именно z -переменная обеспечивает периодичность спектра по частоте ω с периодом $\Omega = 2\pi/T$, в то время как сама спектральная функция $S_x(z)$ периодической по z не является. Как показано в тексте статьи (см., например, (26)), для дискретных ARMA-сигналов она представляет собой отношение двух полиномов по z .

В теории временных рядов [3, 14] вместо ряда Фурье (Б10), (Б11) обычно используется т.н. z -преобразование, которое получается из него с помощью замены переменной (Б12). Формально z -преобразование характеризуется соотношениями

$$S_x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}, \quad (\text{Б13})$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint S_x(z) z^{n-1} dz,$$

которые эквивалентны (Б10) и (Б11). Интегрирование в обратном z -преобразовании (Б13) производится в комплексной плоскости z по единичной окружности против часовой стрелки. “Свертывание” периодичности спектров временных рядов с помощью замены (Б12) существенно упрощает спектральный анализ благодаря компактности и простоте, что сделало z -преобразование незаменимым в теории дискретных систем и превратило его в самостоятельный хорошо разви-

тый раздел математической теории цифровой обработки сигналов [4, 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Deistler M.* Identification and time series analysis: past, present and future // Proc. of a workshop "Statistics Theory and Control", Laurence, Kansas, 2002. Berlin: Springer-Verlag, 2002. P. 97–109.
2. *Бокс Дж., Дженкинс Г.Д.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. В 2-х томах. Перевод с англ. под ред. Писаренко В.Ф. М.: Мир, 1974. 604 с.
3. *Бриллинджер Ф.* Временные ряды. Обработка данных и теория. Перевод с англ. под ред. Колмогорова А.Н. М.: Мир, 1980. 536 с.
4. *Марпл мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. Перевод с англ. под ред. Рыжака И.С. М.: Мир, 1990. 584 с.
5. *Jury E.I.* Sampled data control systems. NY: Wiley, 1958. 453 p.
6. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. 510 с.
7. *Åström K.J., Wittenmark B.* Computer controlled systems. Theory and Design. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984. 558 p.
8. Systems and control Encyclopedia / Ed. Singh M.G. Oxford: Pergamon Press, 1987. 464 p.
9. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019. 500 с.
10. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояний. Перевод с англ. под ред. Райбмана Н.С. М.: Мир, 1975. 681 с.
11. *Söderström T., Stoica P.* System identification. NJ: Prentice-Hall, 1989. 620 p.
12. *Льонг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. Перевод с англ. под ред. Цыпкина Я.З. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. 432 с.
13. *Pintelon R., Shoukens J.* System identification. A frequency domain approach. NY: IEEE Press, 2001. 750 p.
14. *Оппенгейм А.В., Шафер Р.В.* Цифровая обработка сигналов. 3-е издание. Перевод с англ. под ред. Боева С.Ф. М.: Техносфера, 2019. 1048 с.
15. IFAC Proceedings Volumes in ScienceDirect.com by Elsevier. <https://sciencedirect.com/journal/ifac-proceedings-volumes>
16. IFAC Papers OnLine in ScienceDirect.com by Elsevier. <https://sciencedirect.com/journal/ifac-papersonline/issues>
17. *Markel J., Gray A.* Linear prediction of speech. NY: Springer, 1976.
18. *Айвазян Г.А., Фантазини Д.* Эконометрика: продвинутый курс с приложениями в финансах. М.: Магистр: Инфра-М, 2014. 944 с.
19. *Hoel S., Omenzetter P.* Optimal selection of autoregressive model coefficients for early damage detectability with an application to wind turbine blades // Mechanical Systems and Signal Processing. 2016. V. 70–71. P. 557–577.
20. *Sakellariou J.S., Fassois S.D., Sakaris C.S.* Vibration-based damage localization and estimation via the stochastic function model-based method: an overview // Structural Health Monitoring. 2018. V. 17. № 6. P. 1335–1438.
21. *Candy J.V., Fisher K.A., Case J.E., Goodrich T.W.* Multichannel spectral estimation in acoustics: a state-space approach // J. Acoust. Soc. Am. 2020. V. 148. № 2. P. 759–779.
22. *Карпов И.А.* Параметрическое моделирование виброакустических дискретно-временных случайных процессов и применение для идентификации колебательных систем // Ученые записки физического факультета Московского университета. 2020. № 1. ID 2011701.
23. *Karpov I.A., Grebennikov A.S., Kim A.A.* Application of autoregressive moving average modelling of random processes to identify the loss factor of linear oscillatory systems // Acoust. Phys. 2021. V. 67. № 6. P. 694–699.
24. *Котельников В.А.* О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи // Успехи физ. наук. 2006. Т. 176. № 7. С. 762–770 (перепечатка статьи 1933 года).
25. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. 2-е изд. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.-ры, 1959. 400 с.
26. *Макаров О.И., Шанин А.В., Корольков А.И.* Интеграл Зоммерфельда в задачах моделирования дифракции акустических волн с помощью треугольной сетки // Акуст. журн. 2023. Т. 69. № 2. С. 129–145.
27. *Reinders E.* System identification methods for (operational) modal analysis: review and comparison // Archives of Computational Methods in Engineering. 2012. V. 19. № 1. P. 51–124.
28. *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Том 1. Пер. с англ. под ред. Рытова С.М. М.: ГИТТЛ, 1955. 509 с.
29. *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы. Пер с англ. под ред. Лямшева Л.М. М.: Мир, 1971. 552 с.
30. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
31. *Lin C.-Sh., Chiang D.-Y., Tseng T.-C.* Extended time series algorithm for model identification from nonstationary ambient response data only // Mathematical Problems in Engineering. 2014. Article ID 391815. 12p.
32. *Pandit S.M., Wu S.M.* Time series and system analysis with application. NY: John Wiley Sons, 1983.
33. *Pi Y.L., Mickleborough N.C.* Modal identification of vibrating structures using ARMA model // J. Eng. Mech. 1989. V. 115. P. 2232–2250.
34. *Akaike H.* A new look at the statistical model identification // IEEE Trans. on Automatic Control. 1974. V. AC-19. № 6. P. 716–723.
35. *Hannan E.J.* Estimation of order of an ARMA process // Annals of Statistics. 1980. V. 8. P. 1071–1081.
36. MATHLAB <https://se.mathworks.com/help/ident/ug/model-quality-metrics.html>
37. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. Перевод с англ. под ред. Арамановича И.Г. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. 720 с.