

О СКОРОСТИ ЗВУКА В МНОГОФАЗНЫХ СИСТЕМАХ

© 2024 г. С. О. Гладков*

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ),
Волоколамское ш. 4, Москва, 125993 Россия***e-mail: sglad51@mail.ru*

Поступила в редакцию 19.02.2023 г.

После доработки 06.05.2023 г.

Принята к публикации 22.06.2023 г.

Вычислена общая зависимость скорости звука c_s в двухфазной системе типа: “жидкость + газ” и “газ + жидкость” в виде функции от концентрации x добавочной фазы и термодинамических параметров смеси. Показано, что в предельных случаях, когда концентрация стремится к нулю или к единице, получаются формулы, численные значения которых хорошо согласуются с известными значениями для скорости звука в воде и воздухе. Дано обобщение этой формулы на многокомпонентные системы. Графически проиллюстрирована найденная функциональная зависимость $c_s(x)$ для случая двухфазной среды и показано ее качественное и количественное соответствие с результатами других авторов.

Ключевые слова: двухфазная система, коэффициент температурного расширения, коэффициент сжатия

DOI: 10.31857/S0320791924010047 **EDN:** ZPJKRR

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем сообщении мы подробно остановимся на важном в практическом отношении вопросе о вычислении функциональной зависимости скорости звука в многофазных структурах. Вначале будет рассмотрен случай двухфазной среды с целью наметить алгоритм вычисления, а затем полученные формулы будут обобщены на произвольный случай многофазных сред, которые в настоящее время весьма интенсивно изучаются (см. [1–17]).

Первые теоретические результаты в этом направлении были изложены, видимо, в [18], где на стр. 355 приводится решение задачи о вычислении скорости звука в системе “жидкость + газ” и “газ + жидкость” в зависимости от ряда термодинамических параметров таких двухфазных структур. Здесь следует отметить, что авторы монографии [18] вычислили предельные выражения для скорости звука в обоих рассмотренных случаях (“жидкость + газ” и “газ + жидкость”), и при этом привели обстоятельные аргументы, касающиеся того факта, почему приведенная ими формула “не работает” при переходе к двум предельным случаям, когда $x = 0$ и $x = 1$.

Заметим, что в работе [16], в которой, если говорить формальным языком, изучалась трехфазная система, где роль третьей фазы была отведена металлическим примесным частицам, авторами приведена формула, описывающая зависимость скорости звука как функции от концентрации. Она

имеет вид $\frac{c_s}{1-x}$. Однако, как видно, подобное поведение скорости звука характеризуется сингулярностью в точке $x = 1$.

Ниже мы приведем подробное решение этой задачи, лишенное отмеченных недостатков, когда полученное общее выражение позволяет непрерывным образом описывать переход к обоим предельным случаям $x = 0$ и $x = 1$ без каких-либо ограничений. При этом считается, что размер неоднородностей r добавляемой фазы должен удовлетворять условию $\lambda \gg r$, где λ – длина волны звука. Подобное приближение означает, что мы имеем право ввести в рассмотрение концентрацию примесной фазы.

ОБЩИЙ ПОДХОД И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ

Введем относительную концентрацию добавочной фазы с помощью формулы $x = \frac{n_1 \bar{v}}{V}$, где n_1 – число “капелек” добавочной фазы, \bar{v} – их средний размер (см. монографию [19]), $V = V_0 + V_1$ – полный объем, V_0 – объем, занимаемый основным веществом. Заметим здесь, что мы придерживаемся тех же обозначений, что и в монографии [20], т.е. индекс “0” относится к основной фазе, а индекс “1” – к добавочной.

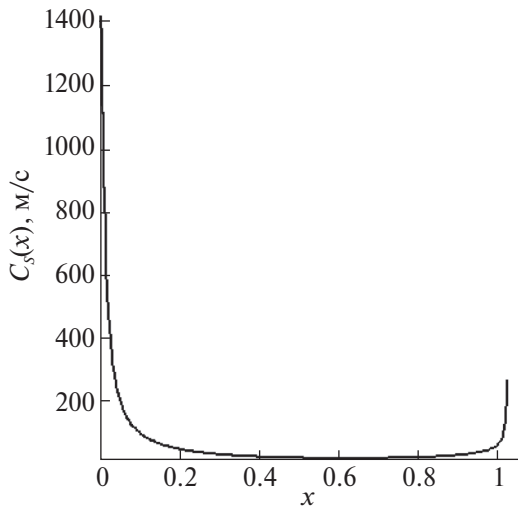


Рис. 1. Иллюстрация аналитической зависимости (16) скорости звука от концентрации x .

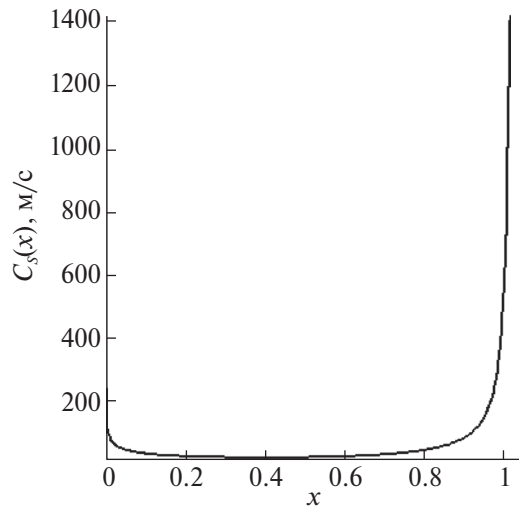


Рис. 2. Графическое изображение зависимости скорости звука от концентрации второй фазы в системе “газ + жидкость”.

Благодаря аддитивным свойствам энтропии S и объема V мы имеем право записать:

$$S = (1 - x)S_0 + xS_1, \tag{1}$$

$$V = (1 - x)V_0 + xV_1. \tag{2}$$

Исходя из классического определения скорости звука [18], согласно которому $c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S$, добавим в него еще одну независимую переменную,

в качестве которой выберем полное количество молекул $N = N_0 + N_1$. Тогда квадрат обратной скорости звука можно представить как

$$\frac{1}{c_s^2} = -\frac{\rho}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S,N}. \tag{3}$$

Преобразуем теперь формулу (3), перейдя в ней к новым независимым переменным (P, x, T) . В результате у нас получается следующая цепочка преобразований

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_s^2} &= -\frac{\rho}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S,N} = \frac{\partial(V,S,N)}{\partial(P,x,T)} \frac{\partial(P,x,T)}{\partial(P,S,N)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,x} & \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{P,T} & \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,x} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,x} & \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{P,T} & \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,x} \\ \left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)_{T,x} & \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_{P,x} & \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{P,x} \end{vmatrix} \frac{1}{\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{P,T} & \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,x} \\ \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_{P,T} & \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{P,x} \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{1}{(S_1 - S_0) \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{P,x}} \begin{vmatrix} (1-x) \left(\frac{\partial V_0}{\partial P}\right)_{T,x} & x \left(\frac{\partial V_1}{\partial P}\right)_{T,x} & V_1 - V_0 & (1-x) \left(\frac{\partial V_0}{\partial T}\right)_{P,x} & x \left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_{P,x} \\ (1-x) \left(\frac{\partial S_0}{\partial P}\right)_{T,x} & x \left(\frac{\partial S_1}{\partial P}\right)_{T,x} & S_1 - S_0 & (1-x) \left(\frac{\partial S_0}{\partial T}\right)_{P,x} & x \left(\frac{\partial S_1}{\partial T}\right)_{P,x} \\ \left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)_{T,x} & & 0 & \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{P,x} & \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Раскрывая определитель, находим

$$\frac{1}{c_s^2} = -\frac{\rho}{V} \left\{ \left(\frac{V_1 - V_0}{S_1 - S_0} + G \right) \times \right. \\ \left. \times [(1-x)V_0\alpha_{0P} + xV_1\alpha_{1P}] - (1-x)\frac{V_0}{K_{0T}} - \right. \\ \left. - x\frac{V_1}{K_{1T}} - \frac{V_1 - V_0}{S_1 - S_0} \frac{G}{T} [(1-x)c_{0P} + xc_{1P}] \right\}, \quad (4)$$

где введены следующее сокращенное обозначение

$$G = \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial P} \right)_{T,x}}{\left(\frac{\partial N}{\partial T} \right)_{P,x}}, \quad (5)$$

а также изобарические коэффициенты объемного расширения

$$\alpha_{0P} = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V_0}{\partial T} \right)_P, \quad \alpha_{1P} = \frac{1}{V_1} \left(\frac{\partial V_1}{\partial T} \right)_P \quad (6)$$

и изотермические коэффициенты сжатия

$$K_{0T} = -V_0 \left(\frac{\partial P}{\partial V_0} \right)_T, \quad K_{1T} = -V_1 \left(\frac{\partial P}{\partial V_1} \right)_T. \quad (7)$$

Прежде чем проводить дальнейшие вычисления, вначале необходимо преобразовать формулу (5). С учетом (6) имеем для нее

$$G = \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial P} \right)_{T,x}}{\left(\frac{\partial N}{\partial T} \right)_{P,x}} = - \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_{P,x} = -(1-x) \times \\ \times \left(\frac{\partial V_0}{\partial S} \right)_{P,x} - x \left(\frac{\partial V_1}{\partial S} \right)_{P,x} = -(1-x) \times \\ \times \left(\frac{\partial V_0}{\partial T} \right)_{P,x} \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P,x}} - x \left(\frac{\partial V_1}{\partial T} \right)_{P,x} \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P,x}} = \\ = -\frac{T}{C_P} [(1-x)V_{0P} + xV_{1P}], \quad (8)$$

где изобарическая теплоемкость

$$C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P,x} = (1-x)C_{0P} + xC_{1P}. \quad (9)$$

Подставляя теперь явное выражение (8) в общую формулу (4), после ряда сокращений, в результате

которых автоматически исчезают слагаемые, содержащие дробь $\frac{V_1 - V_0}{S_1 - S_0}$, получаем для квадрата обратной скорости звука следующее довольно компактное выражение

$$\frac{1}{c_s^2} = \frac{\rho}{V} \left\{ (1-x)\frac{V_0}{K_{0T}} + x\frac{V_1}{K_{1T}} + \frac{T}{C_P} \times \right. \\ \left. \times [(1-x)V_0\alpha_{0P} + xV_1\alpha_{1P}]^2 \right\}, \quad (10)$$

где изобарическая теплоемкость смеси определяется формулой (9).

Если теперь ввести изобарические теплоемкости, отнесенные к единице объема соответствующего вещества,

$$c_{0P} = \frac{C_{0P}}{V_0}, \quad c_{1P} = \frac{C_{1P}}{V_1}, \quad (11)$$

формула (10) принимает вид

$$\frac{1}{c_s^2} = \left\{ \rho \frac{(1-x)^2}{K_{0T}} + \frac{x^2}{K_{1T}} + \right. \\ \left. + \frac{T[(1-x)^2\alpha_{0P} + x^2\alpha_{1P}]^2}{(1-x)^2c_{0P} + x^2c_{1P}} \right\}. \quad (12)$$

Чтобы выразить плотность смеси ρ через концентрацию x , удобно представить ее в виде обратного выражения

$$\frac{1}{\rho} = \frac{V}{M} = \frac{(1-x)V_0 + xV_1}{V_0 \left(\rho_0 + \rho_1 \frac{V_1}{V_0} \right)}.$$

Отсюда получаем

$$\rho = \frac{(1-x)\rho_0 + x\rho_1}{(1-x)^2 + x^2}. \quad (13)$$

Подставляя, наконец, (13) в общее выражение (12), приходим к искомой формуле для обратной скорости звука в бинарной смеси

$$\frac{1}{c_s^2} = \frac{(1-x)\rho_0 + x\rho_1}{1-2x+2x^2} \times \\ \times \left\{ \frac{(1-x)^2}{K_{0T}} + \frac{x^2}{K_{1T}} + \right. \\ \left. + T \frac{[(1-x)^2\alpha_{0P} + x^2\alpha_{1P}]^2}{(1-x)^2c_{0P} + x^2c_{1P}} \right\}. \quad (14)$$

Из формулы (14) сразу же видно, что, если $x \ll 1$ или $1-x \ll 1$, мы приходим к выражениям для

скорости звука либо в почти однородной фазе “0”, либо в почти однородной фазе “1”. В том случае, если значения концентрации x произвольные, из формулы (14) будут следовать два качественно разных соотношения. Действительно, выбирая в качестве основной фазы воду с плотностью $\rho_0 = 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, а в качестве примесной фазы пузырьки воздуха с плотностью $\rho_1 = 1.20 \times 10^{-3} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ и используя известные справочные данные для коэффициентов изотермического сжатия и изобарического

объемного расширения в нормальных условиях при $T = 300 \text{ К} = 4.14 \times 10^{-14} \text{ эрг}$, а именно

$$\begin{aligned} K_{0T} &\approx 2 \times 10^{10} \text{ СГС}, K_{1T} = P \approx 10^6 \text{ СГС}, \\ c_{0P} &\approx 3 \times 10^{23} \text{ см}^{-3}, c_{1P} \approx 1.63 \times 10^{20} \text{ см}^{-3}, \\ \alpha_{0P} &\approx 5.3 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{К}^0} = 3.84 \times 10^{11} \text{ эрг}^{-1}, \\ \alpha_{1P} &\approx 3.6 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{К}^0} = 2.6 \times 10^{13} \text{ эрг}^{-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

из (14) получаем следующее функциональное соотношение

$$c_s(x) = 10^3 \sqrt{\frac{2(1-2x+2x^2)}{\left(1-x+1.20 \times 10^{-3}x\right) \left\{ (1-x)^2 + 2 \times 10^4 x^2 + \frac{1.8 \left[x^2 + 1.48 \times 10^{-2} (1-x)^2 \right]^2}{(1-x)^2 + 0.54 \times 10^{-3} x^2} \right\}}}, \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (16)$$

Зависимость (16) проиллюстрирована на рис. 1.

Отметим, что при $x \rightarrow 0$ скорость звука в воде, согласно формуле (16), будет иметь значение

$$c_s = 1430 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad (17)$$

а при $x \rightarrow 1$ скорость звука в воздухе будет составлять примерно

$$c_s = 267 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (18)$$

В другом предельном случае, когда основная фаза представляет собой воздух, а примесная – капельки воды, вместо (16), но с учетом численных значений (15), получаем из (14)

$$c_s(x) = 10^3 \sqrt{\frac{2(1-2x+2x^2)}{\left[1.20 \times 10^{-3}(1-x)+x\right] \left\{ 2 \times 10^4(1-x)^2 + x^2 + \frac{1.8 \left[(1-x)^2 + 1.48 \times 10^{-2} x^2 \right]^2}{0.54 \times 10^{-3}(1-x)^2 + x^2} \right\}}}, \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (19)$$

Зависимость (19) иллюстрирует рис. 2.

Приведенные оценки вполне удовлетворительно коррелируют со всеми известными нам экспериментальными результатами. Как показало сравнение полученной выше теоретической зависимости (19) с результатами работы [13], они вполне неплохо накладываются друг на друга при аккуратном построении. Сказанное отчетливо прослеживается на рис. 3.

Если теперь сравнить зависимость (19) с результатами работы [12], то, согласно приведенному в этой работе рис. 3, мы видим еще одно вполне удовлетворительное доказательство корректности упомянутой выше зависимости (19) для случая двухфазной среды “газ + жидкость”. Это сравнение иллюстрирует рис. 4.

Из обоих рисунков видно, что в области малой концентрации примесной мелкодисперсной фазы скорость звука начинает резко спадать, как это отмечено в [17], а с ростом концентрации – скорость звука будет возрастать, что было подтверждено экспериментально [6]. Заметим также, что рис. 1, 2 как качественно, так и количественно, совпадают с рис. 1 из работы [14], полученным численным путем.

В однородном газе скорость звука можно оценить, воспользовавшись уравнением состояния идеального газа [20] $PV = NT$ (здесь считаем, что постоянная Больцмана $k_B = 1$). Для однородной среды получаем

$$c_s = \sqrt{\frac{P C_P}{\rho C_V}} \approx \sqrt{\frac{10^6}{1.2 \times 10^{-3}}} \approx 289 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (20)$$

Приведенная численная оценка (20) вполне неплохо коррелирует с результатом (18), найденным из соотношения (16).

МНОГОФАЗНАЯ СРЕДА

Формула (14) легко обобщается и на общий случай (см. также [18]), когда речь идет о произвольном количестве добавляемых фаз с разными физическими свойствами, количество которых обозначим буквой k . Действительно, имеем в результате

$$\frac{1}{c_s^2} = \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (1-x_i) \rho_0 + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \rho_i}{\left(\sum_{i=1}^k (1-x_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^k x_i \right)^2} \times \left\{ \frac{\left(\sum_{i=1}^k (1-x_i) \right)^2}{K_{0T}} + \sum_{i=1}^k x_i \sum_{i=1}^k \frac{x_i}{K_i T} - \frac{\left(\sum_{i=1}^k (1-x_i) \right)^2 \alpha_{0P} + \sum_{i=1}^k x_i \sum_{i=1}^k x_i \alpha_{iP}}{\left(\sum_{i=1}^k (1-x_i) \right)^2 c_{0P} + \sum_{i=1}^k x_i \sum_{i=1}^k x_i c_{iP}} \right\}. \quad (21)$$

Общее выражение (21) позволяет нам без труда вычислять скорость звука в любых многофазных структурах и с произвольным количеством разнообразных по физическим свойствам добавок.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение этого короткого сообщения отметим следующее.

Полученное с помощью чисто теоретического подхода общее выражение для скорости звука в двухфазных структурах (14), анализ которого проиллюстрирован на двух качественно разных примерах: “вода + воздух” и “воздух + вода”, продемонстрировал вполне удовлетворительную возможность приложения формулы (14) для любых подобных двухфазных соединений.

Графически проиллюстрирована зависимость скорости звука $c_s(x)$ в обоих рассмотренных случаях.

Дано обобщение модели двухфазной системы для случая многофазной системы и приведена общая формула (21), описывающая этот нетривиальный случай.

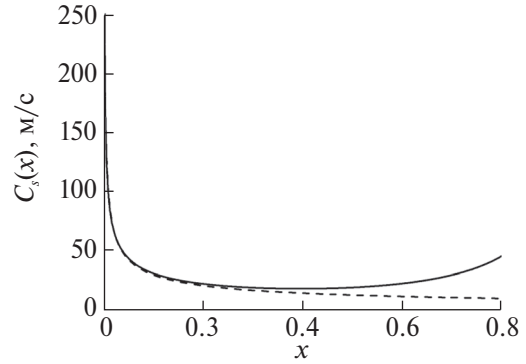


Рис. 3. Сплошная линия – результаты расчета по общей формуле (19), пунктирная линия – результаты работы [13].

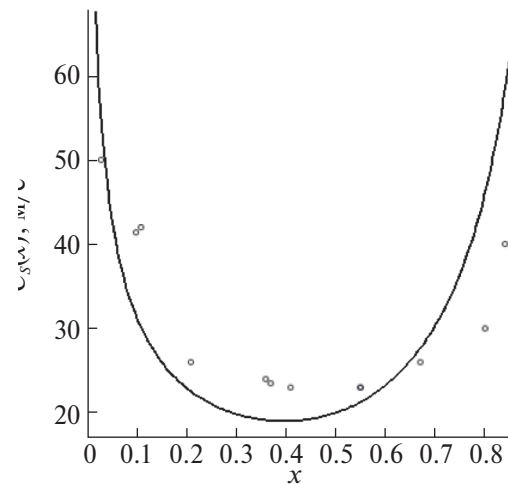


Рис. 4. Зависимость (19) (сплошная линия) и экспериментальные точки, взятые из работы [12] (кружочки). По оси ординат отложена скорость звука c_s , а по оси абсцисс – концентрация.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Campbell I.J., Pitcher A.S.* Shock Waves in a Liquid Containing Gas Bubbles // Proc. the Royal Soc. London. 1958. V. 243. № 1235. P. 14–26.
2. *Hsieh D., Plesset M.S.* On the Propagation of Sound in a Liquid Containing Gas Bubbles // The Physics of Fluids. 1961. V. 4. № 10. P. 94–102.
3. *Вайсман М.Д.* Термодинамика парожидкостных потоков. Л.: Энергия, 1967. 273 с.
4. *Crespo A.* Sound and Shock Waves in Liquids Containing Bubbles // The Physics of Fluids. 1969. V. 12. № 11. P. 223–246.
5. *Radovskii I.S.* Speed of sound in two-phase vapor-liquid systems // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1970. V. 11. P. 778–784. <https://doi.org/10.1007/BF00851905>

6. Радовский И.С., Добриков В.В., Дробан Н.В., Чебесков А.Н. Экспериментальное исследование скорости звука во влажных парах углекислоты // ТВТ. 1974. Т. 12. № 2. С. 293–297.
7. Gregor W., Rumpf H. Velocity of sound in two-phase media // Int. J. Multiphase Flow. 1975. V. 1. № 6. P. 753–769.
8. Богуславский Ю.Я. О поглощении и дисперсии звуковых волн в двухфазной среде // Акуст. журн. 1978. Т. 24. № 1. С. 46–52.
9. Picard D.J., Bishnoi P.R. Calculation of the thermodynamic sound velocity in two-phase multicomponent fluids // Int. J. Multiphase Flow. 1987. V. 13. № 3. P. 295–308.
10. Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 2. 359 с.
11. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
12. Покусаев Б.Г., Таиров Э.А., Васильев С.А. Скорость низкочастотных волн давления в парожидкостной среде с неподвижным слоем парожидкостных частиц // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 3. С. 341–347.
13. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Особенности отражения акустических волн от границы или слоя двухфазной среды // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 162–173.
14. Lagumbay R.S., Vasilyev O.V., Haselbacher A., Wang J. Numerical simulation of a supersonic three – phase cavitating jet flow through a gaseous medium in injection nozzle // Proc. IMECLE'05. 2005 ASME Int. Mechanical Engineering Congress Expo Orlando, Florida, USA. November 5–11. 2005. P. 1–13.
<https://doi.org/10.1115/IMECE2005-82948>
15. Майер А.Е., Погорелко В.В., Яловец А.П. Упругие волны в суспензиях // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 2. С. 153–160.
16. Вилка Чаича М.Б., Юнусова С., Шикин Г.Н. О скорости звука в двухфазной и двухкомпонентной среде // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2011. № 2. С. 161–164.
17. Черных А.А., Губарев В.Я. Распространение звуковых волн в двухфазных средах // Материалы V международной научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов. г. Тамбов. 04–06 июня 2018. С. 272–273.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука, 1988. 733 с.
19. Френкель Я.И. Теория жидкостей и газов. Сборник трудов в 2-х томах. М.: Издательство АН СССР, 1959. 592 с.
20. Гладков С.О. Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука, 1999. 330 с.
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Т. 5. М.: Наука, 1982. 583 с.