

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ  
И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.2

ОСОБЕННОСТИ РЭЛЕЕВСКОГО РАССЕЯНИЯ НА ЧАСТИЦЕ,  
РАСПОЛОЖЕННОЙ ВБЛИЗИ МЕЖФАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2024 г. А. О. Максимов\*

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН,  
ул. Балтийская 43, Владивосток, 690041 Россия

\*e-mail: maksimov@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 14.04.2023 г.

После доработки 05.07.2023 г.

Принята к публикации 19.09.2023 г.

Выявлены особенности рэлеевского рассеяния на твердой частице, расположенной на малом по сравнению с длиной волны расстоянии от непроницаемой плоской границы. Выбор функции Грина в интегральном представлении уравнения Гельмгольца позволяет свести задачу к интегрированию только по поверхности частицы и исключить вклад межфазной поверхности. При разложении по малому волновому параметру используется известный подход, позволяющий представить решение данного порядка в виде суммы потенциальной функции и компоненты, выраженной через приближения низших порядков. Найдена потенциальная составляющая, которая выражается через пространственные иррегулярные гармоники, центрированные на частице и ее зеркальном изображении. Определена колебательная скорость центра частицы и амплитуда рассеяния. В низшем порядке по волновому числу амплитуда рассеяния выражается через монопольную и дипольную составляющие.

*Ключевые слова:* рэлеевское рассеяние, жесткая сфера, плоская граница, колебательная скорость, амплитуда рассеяния

DOI: 10.31857/S0320791924010015 EDN: ZPRNHL

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее исследование является продолжением работ [1, 2], в которых получено аналитическое описание динамики газового включения, расположенного на малом расстоянии от межфазной границы между двумя контактирующими средами. В отличие от пузырька, инерционными свойствами материала частицы пренебрегать нельзя, и подход, использовавшийся в работах [1, 2], требует модификации. Рассеяние звука на объекте, расположенном на малом расстоянии от границы, является предметом исследований на протяжении нескольких десятилетий. Интерес к этой задаче, обусловленный проблемами гидроакустики, предполагает рассеяние высокочастотных сигналов [3–6]. В то же время при развитии акустических методов манипулирования объектами в задачах биофабрикации, акустофлюидики и ультразвуковой очистки [7–10], как правило, размеры объектов малы по сравнению с длиной волны.

Именно на развитие акустических методов манипулирования малыми объектами при наличии ограничивающих поверхностей, в частности, на нахождение силы радиационного давления в этих условиях направлено данное исследование.

Результаты, полученные в последнее время [11–14], являются основой для этой работы. Необходимый первый шаг состоит в нахождении первого приближения, т.е. решении линейной задачи рассеяния на частице, расположенной на малом расстоянии от межфазной поверхности. Упор сделан на получение приближенного аналитического описания, позволяющего дать наглядную интерпретацию полученным результатам и использовать аналитические выражения при анализе нелинейных эффектов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Падающая волна  $\varphi_{in}$  рассеивается на мишени, состоящей из жесткой частицы с поверхностью  $S_p$ , расположенной над нижним полупространством с непроницаемой границей  $S_g$  ( $z = 0$ ). Радиус частицы  $R_p$  и расстояние от центра частицы до границы  $h$  много меньше длины волны. Геометрия задачи иллюстрируется на рис. 1.

Введем обозначения для точки  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  и ее зеркального изображения  $\mathbf{r}_i = (x, y, -z)$ . Рассмотрим функцию  $\varphi_0$ , которая описывает решение задачи рассеяния на границе в отсутствие частицы  $\varphi_0(\mathbf{r}) = \varphi_{in}(\mathbf{r}) + \varphi_{in}(\mathbf{r}_i)$ .

Рассеянное поле  $\varphi^s$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца и следующим граничным условиям:

$$\nabla^2 \varphi^s(\mathbf{r}) + k^2 \varphi^s(\mathbf{r}) = 0, \quad (\mathbf{n}\nabla)\varphi^s + (\mathbf{n}\nabla)\varphi_0 = (\mathbf{nu}), \quad (1)$$

$$\mathbf{r} \in S_p, \quad (\mathbf{n}\nabla)\varphi^s = 0, \quad \mathbf{r} \in S_g,$$

здесь  $\mathbf{u}$  – скорость центра масс частицы, а  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль как по отношению к частице, так и нижней среде.

Уравнение Гельмгольца может быть записано в интегральном виде

$$\varphi^s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p+S_g} \left\{ \varphi^s(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi^s(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right\} dS', \quad (2)$$

где  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – функция Грина. Выбор функции Грина, удовлетворяющей граничному условию на  $S_g$  ( $z = 0$ ),

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR_i}}{R_i},$$

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

$$R_i = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}$$

приводит к тому, что интегрирование в формуле (2) осуществляется только по поверхности частицы.

Поскольку  $\varphi_0(\mathbf{r})$  также удовлетворяет этому интегральному уравнению, то для полного поля  $\varphi^T(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \varphi^s(\mathbf{r})$  имеем:

$$\varphi^T(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \varphi^T(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left[ \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR_i}}{R_i} \right] - \left[ \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR_i}}{R_i} \right] \frac{\partial \varphi^T(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right\} dS'. \quad (3)$$

При нахождении решения в длинноволновом приближении мы будем использовать методику, предложенную в работе [15]. Представим низкочастотное разложение входящих в формулу (3) величин в виде:

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikR_p)^n}{n!} \varphi_{0n}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

$$\varphi^T(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikR_p)^n}{n!} \varphi_n^T(\mathbf{r}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikR_p)^n}{n!} \mathbf{u}_n(\mathbf{r}).$$

Если  $\varphi_{in}(\mathbf{r})$  – плоская волна  $\varphi_{in}(\mathbf{r}) = \varphi_m \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r}) - i\omega t]$ , распространяющаяся в направлении  $\mathbf{e}_k = \mathbf{k}/k$ ,

то  $\varphi_{0n}(\mathbf{r})/\varphi_m = [(\mathbf{e}_k \mathbf{r}) R_p^{-1}]^n + [(\mathbf{e}_k \mathbf{r}) R_p^{-1}]^n$ . В сферической системе координат, связанной с центром частицы,  $\mathbf{e}_k = (\sin \theta_{in} \cos \alpha_{in}, \sin \theta_{in} \sin \alpha_{in}, \cos \theta_{in})$ .

Подставляя разложение функции Грина, получаем уравнения для искомого величин

$$\varphi_n^T(\mathbf{r}) = \varphi_{0n}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{1}{R_p^l} \times$$

$$\times \int_{S_p} \left\{ \varphi_{n-l}^T(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} [R^{l-1} + R_i^{l-1}] - [R^{l-1} + R_i^{l-1}] (\mathbf{u}_{n-l} \mathbf{n}') \right\} dS'. \quad (5)$$

Это уравнение выражает  $n$ -й член разложения в терминах всех предыдущих, включая  $n$ -й. Однако преимущество данной записи состоит в том, что член в правой части, содержащий  $\varphi_n^T$ , является потенциальной функцией – решением уравнения Лапласа [15]. Следовательно, искомое решение может быть представлено в виде

$$\varphi_n^T(\mathbf{r}) = F_n(\mathbf{r}) + \phi_n(\mathbf{r}),$$

$$F_n(\mathbf{r}) = \varphi_{0n}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \frac{1}{R_p^l} \times$$

$$\times \int_{S_p} \left\{ \varphi_{n-l}^T(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} [R^{l-1} + R_i^{l-1}] - [R^{l-1} + R_i^{l-1}] (\mathbf{u}_{n-l} \mathbf{n}') \right\} dS', \quad (6)$$

$$\phi_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \varphi_n^T(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{R_i} \right] dS',$$

$$\binom{n}{l} = \frac{n!}{l!(n-l)!}.$$

Таким образом, если известны  $\varphi_m^T(\mathbf{r})$  для  $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ , то нахождение  $\varphi_n^T(\mathbf{r})$  сводится к решению следующей граничной задачи для  $\phi_n$ :

$$\nabla^2 \phi_n(\mathbf{r}) = 0, \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial n'} + \frac{\partial F_n}{\partial n'} = (\mathbf{u}_n \mathbf{n}), \quad (7)$$

$$\mathbf{r} \in S_p, \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial n'} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_g.$$

Первые члены разложения имеют следующий вид:

$$F_0 = \varphi_{00} = 2\varphi_m, \quad \phi_0(\mathbf{r}) = 0,$$

$$\mathbf{u}_0 = 0, \quad \varphi_0^T = F_0 + \phi_0 = 2\varphi_m, \quad (8)$$

$$F_1 = \varphi_{01} = 2\varphi_m [\sin \theta_{in} \sin \theta_{in} \cos(\alpha - \alpha_{in}) \times$$

$$\times (r/R_p) + \cos \theta_{in} \cos \theta_{in} (h/R_p)].$$

Описание рэлеевского рассеяния на твердой частице, расположенной вблизи межфазной границы, сводится, таким образом, к решению следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1(\mathbf{r}) = 0, \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_p} &= -2 \left( \frac{\Phi_m}{R_p} \right) \sin \theta \times \\ &\times \sin \theta_{\text{in}} \cos(\alpha - \alpha_{\text{in}}) + (\mathbf{u}_1 \mathbf{n}), \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Направление оси  $x$  можно выбрать вдоль проекции волнового вектора, так что  $\alpha_{\text{in}} = 0$ .

### ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Следуя [16], мы ищем решение в виде суммы потенциалов, центрированных на частице и ее зеркальном изображении

$$\phi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (a_{lm} R_p^{l+1} I_{lm}(\mathbf{r}_1) + b_{lm} R_p^{l+1} I_{lm}(\mathbf{r}_2)), \quad (10)$$

$$I_{lm}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Y_{lm}(\theta, \alpha)}{r^{l+1}}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + 2h\mathbf{e}_z,$$

здесь  $Y_{lm}$  – сферические функции,  $I_{lm}$  – иррегулярные пространственные гармоники. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям при  $z = 0$ , необходимо выполнение условий  $b_{lm} = (-1)^{l+m} a_{lm}$ .

Для выполнения граничных условий на поверхности частицы, необходимо преобразовать пространственные гармоники, центрированные на зеркальном изображении, к координатам, центрированным на частице. Теорема сложения [17] обеспечивает эту связь

$$\begin{aligned} I_{lm}(\mathbf{r}_1 + 2h\mathbf{e}_z) &= \sum_{\lambda=|m|}^{\infty} (-1)^{\lambda+m} \sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda+1}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(l+\lambda)!(l+\lambda)!}{(l+m)!(l-m)!(\lambda-m)!(\lambda+m)!}} \times \\ &\times \frac{r_1^\lambda}{(2h)^{l+\lambda+1}} Y_{\lambda m}(\theta, \alpha). \end{aligned} \quad (11)$$

Потенциал первого приближения принимает при этом вид

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \theta, \alpha) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} \left[ \left( \frac{R_p}{r_1} \right)^{l+1} Y_{lm}(\theta, \alpha) + \right. \\ &\left. + \sum_{\lambda=|m|}^{\infty} (-1)^{\lambda+l} \sqrt{\frac{2l+1}{2\lambda+1}} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \sqrt{\frac{(l+\lambda)!(l+\lambda)!}{(l+m)!(l-m)!(\lambda-m)!(\lambda+m)!}} \times \\ &\left. \times \frac{r_1^\lambda R_p^{l+1}}{(2h)^{l+\lambda+1}} Y_{\lambda m}(\theta, \alpha) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где мы сохранили обозначение  $a_{lm}$  для перенормированных коэффициентов разложения  $a_{lm} \sqrt{4\pi / (2l+1)} \rightarrow a_{lm}$ . Подстановка (12) в кинематическое граничное условие (9) и проектирование на  $Y_{LM}^*$  дают

$$\begin{aligned} a_{LM} - \frac{L}{L+1} \sum_{l=|M|}^{\infty} a_{lM} (-1)^{l+L} \sqrt{\frac{2l+1}{2L+1}} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^{l+L+1} \times \\ \times \sqrt{\frac{(l+L)!(l+L)!}{(l+M)!(l-M)!(L-M)!(L+M)!}} = \\ = -\frac{1}{L+1} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [\Phi_0 \sin \theta_{\text{in}} - u_{1x} R_p] \times \\ \times \delta_{L1} (\delta_{M1} - \delta_{M-1}). \end{aligned} \quad (13)$$

Вид правой части определяет наличие только  $M = \pm 1$ .

Степенная зависимость коэффициентов от параметра  $\epsilon = (R_p / 2h)$  позволяет, следуя [16], искать решение в виде

$$\begin{aligned} a_{L1} &= \frac{1}{L+1} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [\sin \theta_{\text{in}} \Phi_0 - u_{1x} R_p] \times \\ &\times \left( \frac{R_p}{2h} \right)^{L-1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{Lk} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^k, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{Lk} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^k - L \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+L} \frac{1}{l+1} \times \\ &\times \sqrt{\frac{2l+1}{2L+1}} \sqrt{\frac{(l+L)!(l+L)!}{(l+1)!(l-1)!(L-1)!(L+1)!}} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{lm} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^{2l+1+m} = -\delta_{L1}. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ , получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_{Lk} - L \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+L} \frac{1}{(l+1)} \sqrt{\frac{2l+1}{2L+1}} \times \\ \times \sqrt{\frac{(l+L)!(l+L)!}{(l+1)!(l-1)!(L-1)!(L+1)!}} \times \\ \times \alpha_{l(k-2l-1)} = -\delta_{L1} \delta_{k0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Как отмечено в [16], получаемые соотношения представляет собой, по существу, рекуррентные формулы, позволяющие найти решение в явном виде:

$$\alpha_{10} = -1, \alpha_{L0} = 0 \quad (L = 2, 3, \dots), \alpha_{L1} = 0, \alpha_{L2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \alpha_{L3} &= L \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+L} \frac{1}{(l+1)} \sqrt{\frac{2l+1}{2L+1}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(l+L)!(l+L)!}{(l+1)!(l-1)!(L-1)!(L+1)!}} \alpha_{l(3-2l-1)} = \\ &= L(-1)^{1+L} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2L+1}} \sqrt{\frac{(1+L)!}{2(L-1)!}} \alpha_{10} = \\ &= L(-1)^L \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2L+1}} \sqrt{\frac{(1+L)!}{2(L-1)!}}, \end{aligned}$$

$$\alpha_{13} = -(1/2), \alpha_{23} = \frac{3}{\sqrt{5}}, \alpha_{L4} = 0, \alpha_{L5} = 0,$$

$$\begin{aligned} \alpha_{L6} &= L \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+L} \frac{1}{(l+1)} \sqrt{\frac{2l+1}{2L+1}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(l+L)!(l+L)!}{(l+1)!(l-1)!(L-1)!(L+1)!}} \alpha_{l(6-2l-1)} = \\ &= L(-1)^{1+L} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2L+1}} \sqrt{\frac{(1+L)!}{2(L-1)!}} \alpha_{13} = \\ &= -\alpha_{L3} \alpha_{13} = \alpha_{L3} / 2, \alpha_{L7} = 0, \end{aligned}$$

(16)

$$\begin{aligned} \alpha_{L8} &= L \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+L} \frac{1}{(l+1)} \sqrt{\frac{2l+1}{2L+1}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(l+L)!(l+L)!}{(l+1)!(l-1)!(L-1)!(L+1)!}} \alpha_{l(8-2l-1)} = \\ &= (-1)^L \frac{L(2+L)}{3} \sqrt{\frac{5}{2L+1}} \sqrt{\frac{(1+L)!}{3!(L-1)!}} \alpha_{23} = \\ &= (-1)^L L(2+L) \sqrt{\frac{(1+L)!}{3!(2L+1)(L-1)!}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{L9} &= L \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+L} \frac{1}{(l+1)} \sqrt{\frac{2l+1}{2L+1}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(l+L)!(l+L)!}{(l+1)!(l-1)!(L-1)!(L+1)!}} \alpha_{l(9-2l-1)} = \\ &= L(-1)^{1+L} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2L+1}} \sqrt{\frac{(1+L)!}{2(L-1)!}} \alpha_{16} = \\ &= -\alpha_{L3} \alpha_{16} = \alpha_{L3} / 4. \end{aligned}$$

Точность представления решения определяется степенью параметра  $\varepsilon = (R_p / 2h) > (1/2)$ . Так, точность в два порядка обеспечивается учетом членов до  $\varepsilon^7 \approx 0.01$ . С этой точностью решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \theta, \alpha) &= \sum_{l=1}^5 a_{l1} \left[ \left( \frac{R_p}{r_1} \right)^{l+1} (Y_{l1}(\theta_1, \alpha) + Y_{l1}^*(\theta_1, \alpha)) + \right. \\ &\left. + (-1)^{l+1} \left( \frac{R_p}{r_2} \right)^{l+1} (Y_{l1}(\theta_2, \alpha) + Y_{l1}^*(\theta_2, \alpha)) \right], \\ a_{11} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [-2 \sin \theta_{in} \Phi_m + u_{1x} R_p] \times \\ &\times \left( \alpha_{10} + \alpha_{13} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^3 + \alpha_{16} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^6 \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \times \\ &\times [2 \sin \theta_{in} \Phi_m - u_{1x} R_p] \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^3 + \frac{1}{4} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^6 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [-2 \sin \theta_{in} \Phi_m + u_{1x} R_p] \times \\ &\times \left( \alpha_{23} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^4 + \alpha_{26} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^7 \right) = \sqrt{\frac{2\pi}{3 \cdot 5}} \times \\ &\times [2 \sin \theta_{in} \Phi_m - u_{1x} R_p] \left( \left( \frac{R_p}{2h} \right)^4 + \frac{1}{2} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^7 \right), \end{aligned}$$

(17)

$$\begin{aligned} a_{31} &= -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [-2 \sin \theta_{in} \Phi_m + u_{1x} R_p] \times \\ &\times \left( \alpha_{33} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^5 + \alpha_{36} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^8 \right) = \frac{9}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \times \\ &\times [2 \sin \theta_{in} \Phi_m - u_{1x} R_p] \left( -\sqrt{\frac{2}{7}} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^5 - \sqrt{\frac{7}{13}} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^8 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{41} &= -\frac{1}{5} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [-2 \sin \theta_{in} \Phi_m + u_{1x} R_p] \alpha_{43} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^6 = \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} [2 \sin \theta_{in} \Phi_m - u_{1x} R_p] \left( \frac{R_p}{2h} \right)^6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{51} &= -\frac{1}{6} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [-2 \sin \theta_{in} \Phi_m + u_{1x} R_p] \alpha_{53} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^7 = \\ &= -\frac{5}{4} \sqrt{\frac{2\pi \cdot 5}{3 \cdot 11}} [2 \sin \theta_{in} \Phi_m - u_{1x} R_p] \left( \frac{R_p}{2h} \right)^7. \end{aligned}$$

Следующим шагом является нахождение скорости колебательного движения центра частицы.

### КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СКОРОСТЬ ЧАСТИЦЫ

Скорость центра частицы определяется из условия баланса инерционных сил и давления, действующего на поверхность частицы, которое в линейном по волновому числу приближении сводится к

$$\begin{aligned} \rho_p \frac{4\pi R_p^3}{3} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= - \int_{S_p} p \mathbf{n}' dS', \\ \rho_p \frac{4\pi R_p^3}{3} \mathbf{u}_1 &= \rho_w \int_{S_p} (F_1(\mathbf{r}') + \phi_1(\mathbf{r}')) \mathbf{n}' dS', \end{aligned} \quad (18)$$

здесь  $\rho_p$  – плотность частицы, а  $\rho_w$  – плотность жидкости. В линейном приближении частица может совершать колебания только параллельно поверхности границы, вдоль направления падающей волны. Условие непроницаемости границы приводит к обращению в нуль линейной (по параметру  $kR_p \ll 1$ ) нормальной компоненты скорости. Нормальная компонента появляется при учете следующего порядка теории возмущений по параметру ( $kR_p \ll 1$ ). Вычисление поверхностного интеграла приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \rho_p \frac{4\pi R_p^3}{3} u_{1x} &= \rho_w R_p^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta' d\theta' d\alpha' \times \\ &\times (F_1(\theta', \alpha') + \phi_1(\theta', \alpha')) \sin \theta' \cos \alpha', \\ \rho_w R_p^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta' d\theta' d\alpha' F_1(\theta', \alpha') \sin \theta' \times \\ &\times \cos \alpha' = \rho_w \frac{4\pi}{3} R_p^2 \phi_m 2 \sin \theta_{in}, \\ \rho_w R_p^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta' d\theta' d\alpha' \phi_1(\theta', \alpha') \sin \theta' \cos \alpha' &= \\ = \rho_w R_p^2 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left\{ a_{11} \left( 1 + \left( \frac{R_p}{2h} \right)^3 \right) + \sum_{l=2}^{\infty} a_{1l} (-1)^{l+1} \times \right. \\ &\times \left. \sqrt{\frac{2l+1}{3}} \sqrt{\frac{(l+1)!}{2(l-1)!}} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^{l+2} \right\}, \\ \rho_p u_{1x} &= \rho_w \left\{ \phi_m R_p^{-1} 2 \sin \theta_{in} - \right. \\ &\left. - [\phi_m R_p^{-1} 2 \sin \theta_{in} - u_{1x}] \left( -\frac{1}{2} + M \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{R_p}{2h} \right)^3 \right] \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^k + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l+1} \times \\ &\times \sqrt{\frac{2l+1}{3}} \sqrt{\frac{(l+1)!}{2(l-1)!}} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^{2l+1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{lk} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^k \approx \\ &\approx -\frac{3}{4} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^3 - \frac{3}{8} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^6, \end{aligned}$$

$$u_{1x} = \phi_m R_p^{-1} 2 \sin \theta_{in} \frac{\rho_w (3 - 2M)}{2\rho_p + \rho_w (1 - 2M)},$$

$$u_x = v_x^{(0)} \frac{\rho_w (3 - 2M)}{2\rho_p + \rho_w (1 - 2M)}, \quad (19)$$

здесь  $v_x^{(0)} = 2ik_x \phi_m$  – скорость, наведенная падающей и отраженной от границы раздела волнами в точке, совпадающей с центром частицы, но в отсутствие самой частицы. При увеличении расстояния до границы  $M \rightarrow 0$  выражение для скорости переходит в известную формулу для свободной частицы.

### ПОЛЕ В ДАЛЬНЕЙ ЗОНЕ – АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ

Поведение рассеянного поля в дальней зоне  $kr \gg 1$  удобно описывать в терминах амплитуды рассеяния:  $\phi^s/\phi_0 \approx f(\theta, \alpha)(e^{ikr}/r)$ . Используя представление для рассеянного поля (2) и асимптотику для функции Грина ( $e^{ikR}/R + (e^{ikR_i}/R_i) \approx (e^{ikR}/r)[e^{-ik(\mathbf{e}, \mathbf{r}') + e^{-ik(\mathbf{e}, \mathbf{r}'_i)}]$ ), получаем

$$\begin{aligned} f(\theta, \alpha) &= \frac{1}{4\pi\phi_0} \int_{S_p} \left\{ \phi^T(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} [e^{-ik(\mathbf{e}, \mathbf{r}') +} \right. \\ &\left. + e^{-ik(\mathbf{e}, \mathbf{r}'_i)} \right] - [e^{-ik(\mathbf{e}, \mathbf{r}') + e^{-ik(\mathbf{e}, \mathbf{r}'_i)}] (\mathbf{u}\mathbf{n}') \right\} dS'. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя в это выражение низкочастотное разложение для потенциала (4) и компонент функции Грина, получаем

$$\begin{aligned} f(\theta, \alpha) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(ikR_p)^l}{l!} \sum_{m=1}^l (-1)^m \frac{l!}{(l-m)! m!} \frac{1}{4\pi\phi_0} \times \\ &\times \int_{S_p} \left\{ -[(\mathbf{e}, \mathbf{r}'/R_p)^m + (\mathbf{e}, \mathbf{r}'_i/R_p)^m] (\mathbf{u}_{l-m} \mathbf{n}') + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial n'} [(\mathbf{e}, \mathbf{r}'/R_p)^m + (\mathbf{e}, \mathbf{r}'_i/R_p)^m] \times \right. \\ &\left. \times [F_{l-m}(\mathbf{r}') + \phi_{l-m}(\mathbf{r}')] \right\} dS'. \end{aligned} \quad (21)$$

Первый член разложения  $l = 1, m = 1$  не дает вклада. Для членов второго порядка ( $l = 2$ ) имеем:

$$f_2(\theta, \alpha) = -\frac{(kR_p)^2}{4\pi\varphi_0} \int_{S_p} \{[(\mathbf{e}_r \mathbf{r}' / R_p) + (\mathbf{e}_r \mathbf{r}'_i / R_p)] \times$$

$$\times (\mathbf{u}_1 \mathbf{n}') - \frac{\partial}{\partial n'} [(\mathbf{e}_r \mathbf{r}' / R_p) + (\mathbf{e}_r \mathbf{r}'_i / R_p)] \times$$

$$\times [F_1(\mathbf{r}') + \phi_1(\mathbf{r}')] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n'} [(\mathbf{e}_r \mathbf{r}' / R_p)^2 +$$

$$+ (\mathbf{e}_r \mathbf{r}'_i / R_p)^2] F_0(\mathbf{r}') \} dS'. \quad (22)$$

Вычисление отдельных членов, входящих в это выражение, приводит к следующим результатам:

$$f_2^{(1)}(\theta, \alpha) = -\frac{(kR_p)^2}{4\pi\varphi_0} \int_{S_p} dS' \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n'} \times$$

$$\times [(\mathbf{e}_r \mathbf{r}' / R_p)^2 + (\mathbf{e}_r \mathbf{r}'_i / R_p)^2] F_0(\mathbf{r}') =$$

$$= -\frac{k^2 R_p^3 \pi}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\alpha' 2(\mathbf{e}_r \mathbf{n}')^2 = -k^2 R_p^3 \frac{2}{3}. \quad (23)$$

Данное слагаемое связано с монопольным источником в центре частицы, который учитывает сжимаемость окружающей частицу среды (во втором порядке по волновому числу), вызванной падающим полем. При описании этого вклада можно учесть сжимаемости материала частицы, что приведет к появлению множителя  $(1 - c_w^2 \rho_w / c_p^2 \rho_p)$ .

Вычисление вклада слагаемого, связанного с колебательной скоростью частицы, дает:

$$f_2^{(2)}(\theta, \alpha) = -\frac{(kR_p)^2}{4\pi\varphi_0} \int_{S_p} [(\mathbf{e}_r \mathbf{r}' / R_p) + (\mathbf{e}_r \mathbf{r}'_i / R_p)] \times$$

$$\times (\mathbf{u}_1 \mathbf{n}') dS' = -\frac{k^2 R_p^4 \pi}{4\pi\varphi_0} \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\alpha' 2(\mathbf{e}_r \mathbf{n}') \times$$

$$\times (\mathbf{u}_1 \mathbf{n}') = -k^2 R_p^3 \frac{2R_p}{3\varphi_0} (\mathbf{e}_r \mathbf{u}_1). \quad (24)$$

Этот вклад обусловлен дипольным источником в центре частицы, который учитывает колебательные смещения центра. Однако поскольку для излучения важна относительная скорость (по отношению к среде), то физический смысл имеет сумма с приведенным ниже слагаемым:

$$f_2^{(3a)}(\theta, \alpha) = \frac{(kR_p)^2}{4\pi\varphi_0} \int_{S_p} \frac{\partial}{\partial n'} [(\mathbf{e}_r \mathbf{r}' / R_p) +$$

$$+ (\mathbf{e}_r \mathbf{r}'_i / R_p)] F_1(\mathbf{r}') dS' = \frac{k^2 R_p^3 \pi}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\alpha' \sin \theta' \sin \theta_{in} \cos(\alpha') 2(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_{k_\perp}) = k^2 R_p^3 \frac{2(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_{k_\perp})}{3}, \quad (25)$$

здесь  $\mathbf{e}_{k_\perp} = \mathbf{k}_\perp / k = (\sin \theta_{in}, 0, 0)$ . Это слагаемое связано с дипольным источником в центре частицы, который учитывает колебательные смещения среды, вызванные падающей волной.

Вычисление вклада, связанного с рассеянным полем, наиболее громоздко:

$$f_2^{(3b)}(\theta, \alpha) = \frac{(kR_p)^2}{4\pi\varphi_0} \int_{S_p} \frac{\partial}{\partial n'} [(\mathbf{e}_r \mathbf{r}' / R_p) +$$

$$+ (\mathbf{e}_r \mathbf{r}'_i / R_p)] \phi_1(\mathbf{r}') dS' = \frac{k^2 R_p^3}{4\pi\varphi_0} \times$$

$$\times \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\alpha' 2[\sin \theta \sin \theta' \cos(\alpha - \alpha') +$$

$$+ \cos \theta \cos \theta' + (h / R_p) \cos \theta'] \times$$

$$\times \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} a_{l1} \left[ Y_{l1}(\theta', \alpha') + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+l} \sqrt{\frac{2l+1}{2\lambda+1}} \times \right. \right.$$

$$\times \sqrt{\frac{(l+\lambda)!(l+\lambda)!}{(l+1)!(l-1)!(\lambda-1)!(\lambda+1)!}} \times$$

$$\times \left. \frac{R_p^{l+\lambda+1}}{(2h)^{l+\lambda+1}} Y_{\lambda l}(\theta', \alpha') \right] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} a_{l-1} \left[ Y_{l-1}(\theta', \alpha') + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+l} \sqrt{\frac{2l+1}{2\lambda+1}} \times \right. \right.$$

$$\times \sqrt{\frac{(l+\lambda)!(l+\lambda)!}{(l+1)!(l-1)!(\lambda-1)!(\lambda+1)!}} \times$$

$$\times \left. \left. \frac{R_p^{l+\lambda+1}}{(2h)^{l+\lambda+1}} Y_{\lambda-1}(\theta', \alpha') \right] \right\} =$$

$$= -k^2 R_p^3 \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{2}{3}} 2 \sin \theta \cos \alpha \frac{1}{\varphi_0} \times$$

$$\times \left\{ a_{11} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} a_{l1} \sqrt{\frac{2l+1}{3}} \sqrt{\frac{(l+1)!}{(l-1)!2}} \frac{R_p^{l+2}}{(2h)^{l+2}} \right\} =$$

$$= -k^2 R_p^3 \frac{2}{3} \sin \theta \cos \alpha [\sin \theta_{in} - u_{1x} R_p / \varphi_0] \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^k + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{1}{(l+1)} \sqrt{\frac{2l+1}{3}} \times \right.$$

$$\times \left. \sqrt{\frac{(l+1)!}{(l-1)!2}} \frac{R_p^{2l+1}}{(2h)^{2l+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{lk} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^k \right\} =$$

$$= \frac{2}{3} \left[ (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_{k_\perp}) - \frac{R_p}{\varphi_0} (\mathbf{e}_r \mathbf{u}_1) \right] \left( \frac{1}{2} - M \right). \quad (26)$$

При вычислении вклада  $\phi_1(\mathbf{r}')$  мы воспользуемся тем, что

$$a_{l1} = -a_{l-1},$$

$$\begin{aligned} \sin \theta' \cos \alpha' &= \sqrt{2\pi/3} [Y_{1-1}^*(\theta', \alpha') - Y_{11}^*(\theta', \alpha')], \\ \sin \theta' \sin \alpha' &= i\sqrt{2\pi/3} [-Y_{1-1}^*(\theta', \alpha') - Y_{11}^*(\theta', \alpha')]. \end{aligned}$$

Суммируя вклады отдельных слагаемых, получаем

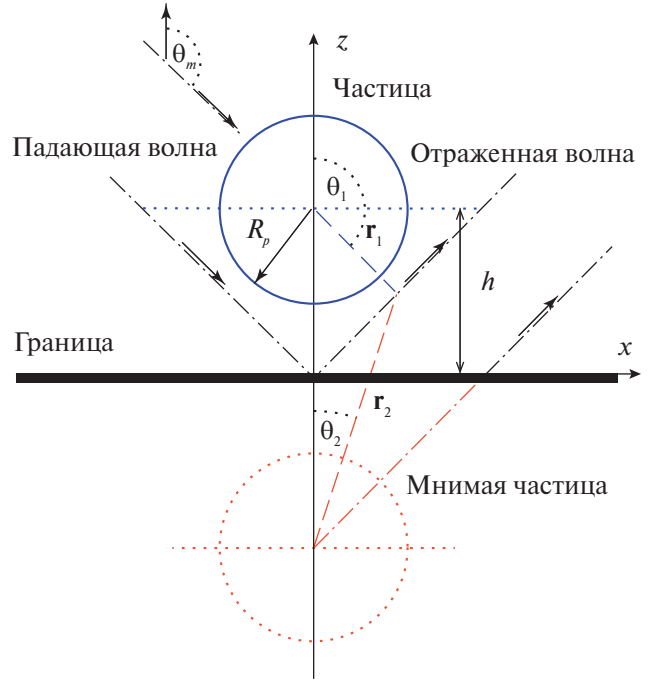
$$\begin{aligned} f_2(\theta, \alpha) &= -k^2 R_p^3 \frac{2}{3} - k^2 R_p^3 \frac{2R_p}{3\varphi_0} (\mathbf{e}_r \mathbf{u}_1) + \\ &+ k^2 R_p^3 \frac{2(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_{k_\perp})}{3} + k^2 R_p^3 \frac{2}{3} \times \\ &\times \left[ (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_{k_\perp}) - \frac{R_p}{\varphi_0} (\mathbf{e}_r \mathbf{u}_1) \right] \left( \frac{1}{2} - M \right) = \quad (27) \\ &= 2k^2 R_p^3 \left[ -\frac{1}{3} + (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_{k_\perp}) \frac{(\rho_p - \rho_w)[1 - (2/3)M]}{2\rho_p + \rho_w(1 - 2M)} \right], \\ M &\approx -\frac{3}{4} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^3 - \frac{3}{8} \left( \frac{R_p}{2h} \right)^6. \end{aligned}$$

Амплитуда рассеяния определяется вкладом монополюсного и дипольных источников. При удалении частицы от поверхности ( $M \rightarrow 0$ ), это выражение совпадает с удвоенной амплитудой рассеяния на свободной частице – наличие жесткой границы приводит к наличию рассеянного поля только в верхнем полупространстве. Интенсивность монополюсного источника не зависит от расстояния до границы только в рассмотренном низшем порядке по параметру  $k(R_p, h) \ll 1$ .

## ОБСУЖДЕНИЕ

Представленные выше результаты относятся к простейшему случаю твердой частицы, расположенной вблизи непроницаемой границы. Необходимые предпосылки для обобщения на общий случай упругой частицы, расположенной вблизи границы двух упругих сред, имеются. Найдена низкочастотная асимптотика функции Грина для двух упругих полупространств [18]. Развитые в данном исследовании приближенные методы пригодны для описания общей задачи, но требуют гораздо более громоздких вычислений.

Важным обобщением является анализ рэлеевского рассеяния на частицах со смещенным центром масс, в частности, на “Янус” частицах [19–21]. Новым физическим эффектом при этом является возбуждение вращательных степеней свободы. При описании рассеяния на несферических частицах актуальным становится применение численных методов решения. Наряду с использованием



**Рис. 1.** Иллюстрация геометрии задачи: падающая волна распространяется в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}/k = (\sin \theta_{in}, 0, \cos \theta_{in})$  и рассеивается на частице радиуса  $R_p$ , расположенной на расстоянии  $h$  от границы непроницаемой среды. Мнимая частица используется для описания взаимодействия с границей. Сферические системы координат, центрированные на частице и ее зеркальном изображении  $\mathbf{r}_1 = (r_1, \theta_1, \alpha)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (r_2, \theta_2, \alpha)$ ,  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + 2h\mathbf{e}_z$ , используются при построении потенциального решения краевой задачи.

традиционного метода  $T$ -матриц [22] возможно применение альтернативных подходов: метода диаграммных уравнений [23] или метода дискретных источников [24].

В условиях, когда диссипативные процессы несут существенны, решение линейной задачи позволяет описать ряд нелинейных (квадратичных) эффектов, в частности, силу радиационного давления на частицу. Нахождение этой силы сводится к вычислению интеграла по поверхности частицы от билинейной комбинации решений линейной задачи.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для жесткой частицы, расположенной вблизи непроницаемой границы, дано аналитическое описание рэлеевского рассеяния. Потенциал вблизи частицы описывается суммой мультиполей, центрированных на частице и ее зеркальном изображении. Интенсивность мультиполей определяется отношением радиуса частицы к расстоянию до межфазной поверхности. Амплитуда рассеяния,

характеризующая поле в дальней зоне, имеет такую же зависимость от волнового числа, как и при рассеянии на свободной частице, и состоит из вкладов монопольной и дипольной составляющих. От расположения частицы зависит только дипольная компонента. Колебательная скорость центра частицы зависит от расстояния до границы посредством эффективной инерционной массы жидкости.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максимов А.О., Половинка Ю.А. Пульсации газового включения вблизи межфазной поверхности // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 1. С. 30–37. <https://doi.org/10.7868/S0320791916060095>
2. Максимов А.О., Половинка Ю.А. Акустические проявления газового включения, расположенного вблизи межфазной поверхности // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 1. С. 22–32. <https://doi.org/10.7868/S0320791918010136>
3. Gaunaurd G.C., Huang H. Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary // J. Acoust. Soc. Am. 1994. V. 96. № 4. P. 2526–2536. <https://doi.org/10.1121/1.410126>
4. Gaunaurd G.C., Huang H. Sound scattering by a spherical object near a hard flat bottom // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 1996. V. 43. № 4. P. 690–700. <https://doi.org/10.1109/58.503731>
5. Шендеров Е.Л. Дифракция звука на упругой импедансной сфере, расположенной вблизи импедансной или упругой границы полупространства // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 5. С. 684–694. <https://doi.org/10.1134/1.1507206>
6. Григорьева Н.С., Куприянов М.С., Михайлова Д.А., Островский Д.Б. Рассеяние звуковых волн на сферическом рассеивателе, находящемся вблизи ледовой поверхности // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 1. С. 10–23. <https://doi.org/10.7868/S0320791916010044>
7. Zhang P., Bachman H., Ozcelik A., Huang T.G. Acoustic microfluidics // Annual Review of Analytical Chemistry. 2020. V. 13. P. 17–43. <https://doi.org/10.1146/annurev-anchem-090919-102205>
8. Friend J., Yeo L.Y. Microscale acoustofluidics: Microfluidics driven via acoustics and ultrasonics // Rev. Modern Phys. 2011. V. 83. No 2. P. 647–687. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.83.647>
9. Birkin P.R., Offin D.G., Leighton T.G. An activated fluid stream – New techniques for cold water cleaning // Ultrason. Sonochem. 2016. V. 29. P. 612–618. <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2015.10.001>
10. Godin O.A. Rayleigh scattering of spherical sound wave // J. Acoust. Soc. Am. 2012. V. 133. № 2. P. 709–720. <https://doi.org/10.1121/1.4774277>
11. Гусев В.А., Руденко О.В. Поля радиационных сил и акустические течения в жидком слое на твердом полупространстве // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 2. С. 166–181.
12. Maksimov A. Radiation force on a bubble located near an interface // J. Acoust. Soc. Am. 2022. V. 151. № 3. P. 1464–1475. <https://doi.org/10.1121/10.0009673>
13. Викулова Т.С., Диденкулов И.Н., Кулинич В.В., Прончатов-Рубцов Н.В., Сахаров Д.В. Пузырьки в проточном акустическом резонаторе // Акуст. журн. 2023. Т. 69. № 1. С. 7–12. <https://doi.org/10.31857/S032079192270006X>
14. Simon B.E., Hamilton M.F. Analytical solution for acoustic radiation force on a sphere near a planar boundary // J. Acoust. Soc. Am. 2023. V. 153. № 1. P. 627–642. <https://doi.org/10.1121/10.0016885>
15. Dassios G., Kleinman R. Half space scattering problems at low frequencies // J. Appl. Math. 1999. V. 62. № 1. P. 61–79. <https://doi.org/10.1093/imamat/62.1.61>
16. Doinikov A.A., Bouakaz A. Interaction of an ultrasound-activated contrast microbubble with a wall at arbitrary separation distances // Phys. Med. Biol. 2015. V. 60. № 20. P. 7909–7925. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/60/20/7909>
17. Gruzan O.R. Translation addition theorems for spherical vector wave functions // Quart. Appl. Math. 1962. V. 20. № 1. P. 33–40. <https://doi.org/10.1090/qam/132851>
18. Maksimov A. Near field of the half-space Green's function // J. Theoretical and Computational Acoustics. 2022. V. 30. № 4. Article Number 2150019. <https://doi.org/10.1142/S2591728521500195>
19. Диденкулов И.Н., Сагачева А.А. Распространение звука в суспензии частиц с вращательной степенью свободы // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 1. С. 16–19. <https://doi.org/10.31857/S0320791919060029>
20. Крысанов Д.В., Кюркчан А.Г., Маненков С.А. Два подхода к решению задачи дифракции на сфере Януса // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 2. С. 126–137. <https://doi.org/10.31857/S0320791921020027>
21. Hawkins S.C., Rother T., Wauer J. A numerical study of acoustic scattering by Janus spheres // J. Acoust. Soc. Am. 2020. V. 147. № 6. P. 4097–4105. <https://doi.org/10.1121/10.0001472>
22. Majić M. Relationships between spherical and bi-spherical harmonics, and an electrostatic T-matrix for dimers // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2021. V. 276. Article Number 107945. <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2021.107945>
23. Кюркчан А.Г., Маненков С.А. Рассеяние волн телом, расположенном в однородном полупространстве // Докл. Акад. наук. 1997. Т. 357. № 1. С. 40–43.
24. Кюркчан А.Г., Маненков С.А. Дифракция поля точечного источника на компактном препятствии в непрерывно-слоистом волноводе // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 526–533.