

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.1

ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

© 2025 г. В. И. Ерофеев^{а,*}, Е. Е. Лисенкова^{а,**}

^аИнститут проблем машиностроения РАН — филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук”, ул. Белинского 85, Нижний Новгород, 603024 Россия

*e-mail: erof.vi@yandex.ru

**e-mail: eelissen@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.02.2024 г.

После доработки 15.03.2025 г.

Принята к публикации 06.05.2025 г.

Рассматривается самосогласованная задача о динамическом поведении деформируемой системы, состоящей из двумерной упругой направляющей (подсистема 1) и безотрывно движущегося по ней одномерного упругого объекта (подсистема 2). Приводятся локальные и глобальные законы изменения энергии и волнового импульса в случае, когда лагранжианы контактирующих подсистем зависят от обобщенных координат и их производных не старше второго порядка по всем пространственно-временным переменным. Обсуждаются условия излучения в рассматриваемом классе систем. Проводится сравнительный анализ как дисперсионных, так и энергетических характеристик изгибных волн, распространяющихся в пластинах, описываемых двумя различными моделями. Найдены критические скорости движения постоянной нагрузки по этим пластинам. Установлена зависимость критических скоростей от коэффициента жесткости упругого основания и физико-механических свойств пластины. Продемонстрирована принципиальная возможность преобразования энергии колебаний двумерной упругой направляющей в энергию поступательного движения одномерного объекта. В качестве посредника такого преобразования выступает сила, обусловленная давлением волн, выражение для которой получено в универсальной форме через лагранжиан двумерной системы. Построена зависимость коэффициента преобразования энергии волн в энергию поступательного движения абсолютно жесткого закрепления от скорости его движения и параметров двумерной системы.

Ключевые слова: двумерная система, движущаяся нагрузка, поток энергии, волновой импульс, пластина, упругое основание, критическая скорость

DOI: 10.31857/S0320791925030011, **EDN:** JTHQLK

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию динамического поведения двумерных систем и движущихся вдоль них механических объектов посвящено большое число публикаций (см., например, литературу в [1–4]), что связано с широким практическим приложением. Однако в них рассматривались лишь частные вопросы, а именно, в основном исследовались вынужденные колебания пластин под действием движущихся нагрузок. В качестве исключения можно назвать работы [5–8], в которых приводятся краевые задачи динамики двумерных систем с движущимися нагрузками и закреплениями, полученные исходя из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Примененный в [5, 6] подход был в [7, 8]

распространен на случай, когда лагранжианы взаимодействующих систем зависят от не учитываемых в [5, 6] смешанных производных обобщенных координат по пространственной и временной переменным. Но если в работах [5–8] акцент делался, прежде всего, на постановках задач контактного взаимодействия, то в публикуемой ныне работе внимание концентрируется не на математическом, а на физическом изложении проблемы. При этом уравнения переноса энергии и волнового импульса в двумерной и контактирующей с ней движущейся одномерной подсистемах получены путем дифференцирования соответствующих лагранжианов по пространственным и временной переменным. Этот прием проще, чем используемый в работах [5–8], а результат при этом не изменился.

Также в настоящей работе приводятся законы изменения энергии и волнового импульса как для всей сложной системы “направляющая + движущийся объект” в целом, так и для составляющих ее частей (подсистем 1 и 2). Использование формализма Лагранжа позволяет получить выражения для потоков энергии, волнового импульса, силы, обусловленной давлением волн, в универсальной форме, и, кроме того, позволяет выявить условия излучения в рассматриваемом классе систем.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерную систему, состоящую из полосы шириной $0 \leq y \leq b_0$ и длиной $x_1 \leq x \leq x_2$, вдоль которой по некоторому закону $x = l(y,t)$, согласованному с ее движением, перемещается одномерный механический объект (рис. 1), например, струна, балка и т.п.

Будем полагать, что плотности функций Лагранжа двумерной системы λ^j ($j = 1, 2$) и одномерного объекта L зависят от вектор-функций обобщенных координат и их производных не выше второго порядка [7, 8]:

$$\lambda^j = \lambda^j(x, y, t, \mathbf{u}^j, \mathbf{u}_x^j, \mathbf{u}_y^j, \mathbf{u}_t^j, \mathbf{u}_{xx}^j, \mathbf{u}_{xt}^j, \mathbf{u}_{xy}^j, \mathbf{u}_{yt}^j, \mathbf{u}_{yy}^j),$$

$$L = L(y, t, l, l_t, l_y, l_{yy}, l_{yt}, \mathbf{u}^0, \mathbf{u}_t^0, \mathbf{u}_y^0, \mathbf{u}_{yy}^0, \mathbf{u}_{yt}^0, \mathbf{w}^0, \mathbf{w}_t^0, \mathbf{w}_y^0, \mathbf{w}_{yy}^0, \mathbf{w}_{yt}^0).$$

Здесь $\mathbf{u}^j(x, y, t)$ — вектор-функции обобщенных координат, описывающие колебания двумерной системы слева $j = 1$ и справа $j = 2$ от объекта, закон движения которого характеризуется обобщенной координатой $l(y, t)$, являющейся скалярной функцией, и набором вектор-функций обобщенных координат $\mathbf{u}^0(y, t)$, $\mathbf{w}^0(y, t)$ размерности n , причем $\mathbf{u}^0(y, t) = \mathbf{u}(l(y, t), y, t) = \mathbf{u}'(l(y, t), y, t)$, $\mathbf{w}^0(y, t) = \mathbf{u}_x(l(y, t), y, t) = \mathbf{u}'_x(l(y, t), y, t)$; $j = 1, 2$.

Нижними индексами обозначено дифференцирование по координатам (x, y) и времени (t) . Отметим, что аналогичный подход, где в качестве обобщенных координат используются две основные переменные, одна из которых векторная, а другая скалярная, все чаще находит свое применение [9].

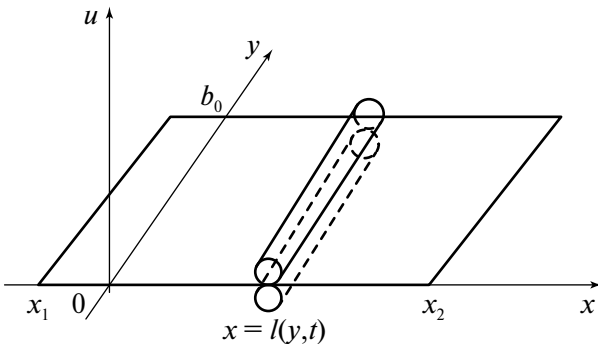


Рис. 1. Двумерная система с движущимся объектом.

Воспользуемся постановкой самосогласованной краевой задачи, полученной в [7, 8], которая имеет более широкий круг применения, чем в [5, 6], поскольку позволяет описывать динамику систем, учитывающих, например, влияние инерции вращения элемента тела [10–13].

Динамическое поведение двумерной системы описывается решениями $\mathbf{u}(x, y, t)$ уравнений

$$\lambda_{\mathbf{u}} - \partial_x \lambda_{\mathbf{u}_x} - \partial_y \lambda_{\mathbf{u}_y} - \partial_t \lambda_{\mathbf{u}_t} + \partial_{xx} \lambda_{\mathbf{u}_{xx}} + \partial_{xy} \lambda_{\mathbf{u}_{xy}} + \partial_{yy} \lambda_{\mathbf{u}_{yy}} + \partial_{xt} \lambda_{\mathbf{u}_{xt}} + \partial_{yt} \lambda_{\mathbf{u}_{yt}} = -\mathbf{q}, \quad (1)$$

$$(x, y, t) \in \text{Int } D_j, \quad j = 1, 2,$$

удовлетворяющими на движущейся границе $x = l(y, t)$ условиям сопряжения:

$$L_{\mathbf{u}^0} - \partial_t L_{\mathbf{u}_t^0} - \partial_y L_{\mathbf{u}_y^0} + \partial_{yy} L_{\mathbf{u}_{yy}^0} + \partial_{yt} L_{\mathbf{u}_{yt}^0} = [\mathbf{N}] - \mathbf{q}_1, \quad (2)$$

$$(y, t) \in D_0,$$

$$L_{\mathbf{w}^0} - \partial_t L_{\mathbf{w}_t^0} - \partial_y L_{\mathbf{w}_y^0} + \partial_{yy} L_{\mathbf{w}_{yy}^0} + \partial_{yt} L_{\mathbf{w}_{yt}^0} = [\mathbf{M}] - \mathbf{q}_2, \quad (3)$$

$$(y, t) \in D_0,$$

$$L_\ell - \partial_t L_{\ell_t} - \partial_y L_{\ell_y} + \partial_{yy} L_{\ell_{yy}} + \partial_{yt} L_{\ell_{yt}} = [F] - q_3, \quad (4)$$

$$(y, t) \in D_0,$$

$$\mathbf{u}(l - 0, y, t) = \mathbf{u}(l + 0, y, t) = \mathbf{u}^0(y, t),$$

$$\mathbf{u}_x(l - 0, y, t) = \mathbf{u}_x(l + 0, y, t) = \mathbf{w}^0(y, t), \quad (5)$$

$$(y, t) \in D_0.$$

Здесь и далее верхний индекс $j = 1, 2$ для краткости опущен,

$$F = \lambda - (\mathbf{u}_x, \mathbf{N}) - (\mathbf{u}_{xx}, \mathbf{M}), \quad (6)$$

$$\mathbf{N} = \lambda_{\mathbf{u}_x} - \partial_x \lambda_{\mathbf{u}_{xx}} - \partial_y \lambda_{\mathbf{u}_{xy}} - \partial_t \lambda_{\mathbf{u}_{xt}} - l_y (\lambda_{\mathbf{u}_y} - 2\partial_y \lambda_{\mathbf{u}_{yy}} - \partial_t \lambda_{\mathbf{u}_{yt}}) + l_{yy} \lambda_{\mathbf{u}_{yy}} + l_y^2 \partial_x \lambda_{\mathbf{u}_{yy}} - l_t (\lambda_{\mathbf{u}_t} - \partial_y \lambda_{\mathbf{u}_{yt}} - l_y \partial_x \lambda_{\mathbf{u}_{yt}}) + l_{yt} \lambda_{\mathbf{u}_{yt}}$$

$$\mathbf{M} = \lambda_{\mathbf{u}_{xx}} - l_y (\lambda_{\mathbf{u}_{xy}} - l_y \lambda_{\mathbf{u}_{yy}}) - l_t (\lambda_{\mathbf{u}_{xt}} - l_y \lambda_{\mathbf{u}_{yt}}),$$

$$[A(x, y, t)] = A(l(y, t) + 0, y, t) - A(l(y, t) - 0, y, t),$$

$$\lambda_{\mathbf{a}} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial \lambda}{\partial a_n} \right), \quad L_{\mathbf{a}} = \left(\frac{\partial L}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial a_n} \right)$$

при $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$,

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$\partial_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad \partial_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \partial_{xt} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}, \quad \partial_{yt} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial t}$$

— дифференциальные операторы, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) — скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , \mathbf{N} и \mathbf{M} — плотности обобщенных сил, действующих со стороны двумерной системы, F — линейная плотность сил

давления волн со стороны двумерной направляющей, $D_1 = \{(x,y,t): x_1 \leq x \leq l(y,t), 0 \leq y \leq b_0, t_1 \leq t \leq t_2\}$, $D_2 = \{(x,y,t): l(y,t) \leq x \leq x_2, 0 \leq y \leq b_0, t_1 \leq t \leq t_2\}$, $D_0 = \{(y,t): 0 \leq y \leq b_0, t_1 \leq t \leq t_2\}$.

Дифференциальные уравнения (2)–(4) описывают динамику одномерного объекта и совместно с (5) являются краевыми условиями согласованного движения. В правые части уравнений (1)–(4) введены плотности внешних обобщенных сил $\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$.

Если через вектор $\mathbf{z}(y,t)$ обозначить обобщенные координаты $z_1(y,t), \dots, z_m(y,t)$, присущие только одномерному объекту (например, когда движущийся объект имеет внутренние степени свободы), то к (1)–(5) следует добавить соответствующее уравнение динамики

$$L_z - \partial_t L_{z_t} - \partial_y L_{z_y} + \partial_{yy} L_{z_{yy}} + \partial_{yt} L_{z_{yt}} + \mathbf{q}_4 = 0,$$

где \mathbf{q}_4 — плотность внешней обобщенной силы.

Для полной постановки начально-краевой задачи к приведенным соотношениям следует добавить условия на краях полосы и начальные условия, удовлетворяющие условиям согласования с граничными [14].

В отсутствие сторонних и диссипативных сил ($q_3 = 0$) движение одномерного объекта вдоль двумерной системы происходит под действием сил, обусловленных волновым давлением (которые еще называют силами радиационного давления [15]), определяемых согласно (4), (6) выражением $[F] = [\lambda - (\mathbf{u}_x, \mathbf{N}) - (\mathbf{u}_{xx}, \mathbf{M})]$, учет которых во многих практических случаях принципиально необходим. В качестве подтверждения этого тезиса приведем несколько оценок из [5]. При движении постоянной нагрузки со скоростью $V = 30$ м/с по стальной пластине шириной 1 м и толщиной 1 мм наблюдается излучение волн с амплитудой порядка 3 мм. Сила, обусловленная давлением волн, в этом случае имеет величину, равную примерно 1 Н (около 3% от поперечной силы), а мощность излучения вибрации $FV = 30$ Вт. Если сравнить, в частности, с мощностью бытового громкоговорителя (около 1 Вт), то увидим превосходство в 30 раз. Было установлено, что при движении железнодорожного транспорта со скоростью 100 км/ч сила сопротивления движению, обусловленная давлением волн, составляет до 20% силы тяги локомотива. Оценка силы, обусловленной давлением волны, при движении автомобиля по ледовому покрову водоема выявила, что на вибрацию льда может расходоваться до 50% мощности двигателя, как и на вибрацию гусениц в гусеничных машинах.

Силы, обусловленные давлением волн, совершают работу [6], т.е. являются “посредником” при обмене энергией между движущимися нагрузками (закреплениями) и распределенной двумерной упругой системой. В связи с этим, представляет интерес изучение законов изменения энергии и

импульса как для всей сложной системы (“двумерная упругая система + движущийся одномерный объект”) в целом, так и для отдельных составляющих ее подсистем.

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

Для получения уравнения изменения энергии малого элемента двумерной упругой системы, вычислим полную частную производную по времени от поверхностной плотности функции Лагранжа двумерной системы λ^j и, используя уравнение (1), будем иметь в каждой из областей $\text{Int } D_j, j = 1, 2$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} = -\lambda_t + (\mathbf{q}, \mathbf{u}_t), \tag{7}$$

где $h = (\mathbf{u}_t, \lambda_{\mathbf{u}_t}) + (\mathbf{u}_{xt}, \lambda_{\mathbf{u}_{xt}}) + (\mathbf{u}_{yt}, \lambda_{\mathbf{u}_{yt}}) - \lambda$ — плотность функции Гамильтона, $\mathbf{S} = \{S_x, S_y\}$ — вектор плотности потока энергии, часто называемый вектором Умова–Пойнтинга [2, 16, 17], с компонентами:

$$S_x = \left(\mathbf{u}_t, \lambda_{\mathbf{u}_x} - \partial_x \lambda_{\mathbf{u}_{xx}} - \frac{1}{2} \partial_y \lambda_{\mathbf{u}_{xy}} - \partial_t \lambda_{\mathbf{u}_{xt}} \right) + \left(\mathbf{u}_{xt}, \lambda_{\mathbf{u}_{xx}} \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_{yt}, \lambda_{\mathbf{u}_{xy}} \right), \tag{8}$$

$(x \leftrightarrow y)$.

Известно [17, 18], что перенос энергии в распределенных системах, связанный с распространением упругих волн, сопровождается переносом волнового импульса.

Для получения уравнения изменения волнового импульса продифференцируем плотность функции Лагранжа двумерной системы по пространственным координатам x, y и воспользуемся уравнением динамики (1). В результате в каждой из областей $\text{Int } D_j, j = 1, 2$ будем иметь

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{T} = \mathbf{F}_0 - (\mathbf{q}, \text{grad } \mathbf{u}), \tag{9}$$

где \mathbf{p} — вектор плотности волнового импульса с координатами $(\mathbf{p} = \{p_x, p_y\})$:

$$p_x = -\left(\mathbf{u}_x, \lambda_{\mathbf{u}_t} \right) - \left(\mathbf{u}_{xx}, \lambda_{\mathbf{u}_{xt}} \right) - \left(\mathbf{u}_{yx}, \lambda_{\mathbf{u}_{yt}} \right), \tag{10}$$

$(x \leftrightarrow y)$,

\mathbf{T} — тензор плотности потока волнового импульса с компонентами

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

$$T_{xx} = \lambda - \left\{ \left(\mathbf{u}_x, \lambda_{\mathbf{u}_x} - \frac{\partial}{\partial x} \lambda_{\mathbf{u}_{xx}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \lambda_{\mathbf{u}_{xy}} - \frac{\partial}{\partial t} \lambda_{\mathbf{u}_{xt}} \right) + \left(\mathbf{u}_{xx}, \lambda_{\mathbf{u}_{xx}} \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_{xy}, \lambda_{\mathbf{u}_{xy}} \right) \right\},$$

$$T_{xy} = - \left\{ \left(\mathbf{u}_y, \lambda_{u_x} - \frac{\partial}{\partial x} \lambda_{u_{xx}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \lambda_{u_{xy}} - \frac{\partial}{\partial t} \lambda_{u_{xt}} \right) + \left(\mathbf{u}_{xy}, \lambda_{u_{xx}} \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_{yy}, \lambda_{u_{xy}} \right) \right\},$$

$$(x \leftrightarrow y).$$

Тензор (11) в [18] именуется тензором напряжений, а матрица $\begin{pmatrix} h & \mathbf{S} \\ \mathbf{p} & \mathbf{T} \end{pmatrix}$ в теории поля [18] получила название канонического тензора энергии-импульса.

Справа в уравнении (9) стоят вектор плотности сил отдачи $\mathbf{F}_0 = \{\lambda_x, \lambda_y\}$, возникающих из-за распределенного отражения волн при их распространении в неоднородной системе, и вектор плотности внешних сил. В отсутствие последних, если параметры двумерной системы явно зависят от пространственных координат (что имеет место, например, в пластине переменной толщины [19, 20]), правая часть (9) будет отлична от нуля. Это указывает на возможность изменения (усиления или ослабления) волнового импульса в неоднородной системе.

С целью получения уравнений переноса энергии и импульса вдоль движущегося одномерного объекта продифференцируем линейную плотность его функции Лагранжа соответственно по времени t и пространственной переменной y . Учитывая уравнения баланса обобщенных сил (2)–(4), находим

$$\partial_t h^0 + \partial_y S^0 = - \left(\mathbf{u}_t^0, [\mathbf{N}] - \mathbf{q}_1 \right) - \left(\mathbf{w}_t^0, [\mathbf{M}] - \mathbf{q}_2 \right) - l_t ([F] - q_3) - L_t, \quad (12)$$

$$\partial_t p^0 + \partial_y T^0 = \left(\mathbf{u}_y^0, [\mathbf{N}] - \mathbf{q}_1 \right) + \left(\mathbf{w}_y^0, [\mathbf{M}] - \mathbf{q}_2 \right) + l_y ([F] - q_3) + L_y, \quad (13)$$

$$h^0 = \left(\mathbf{u}_t^0, L_{u_t^0} \right) + \left(\mathbf{w}_t^0, L_{w_t^0} \right) + l_t L_{l_t} + \left(\mathbf{u}_{yt}^0, L_{u_{yt}^0} \right) + \left(\mathbf{w}_{yt}^0, L_{w_{yt}^0} \right) + l_{yt} L_{l_{yt}} - L,$$

$$S^0 = \left(\mathbf{u}_t^0, L_{u_y^0} - \partial_t L_{u_{yt}^0} - \partial_y L_{u_{yy}^0} \right) + \left(\mathbf{w}_t^0, L_{w_y^0} - \partial_t L_{w_{yt}^0} - \partial_y L_{w_{yy}^0} \right) + l_t \left(L_{l_y} - \partial_t L_{l_{yt}} - \partial_y L_{l_{yy}} \right) + \left(\mathbf{u}_{yt}^0, L_{u_{yy}^0} \right) + \left(\mathbf{w}_{yt}^0, L_{w_{yy}^0} \right) + l_{yt} L_{l_{yy}},$$

$$p^0 = - \left(\mathbf{u}_y^0, L_{u_t^0} \right) - \left(\mathbf{w}_y^0, L_{w_t^0} \right) - l_y L_{l_t} - \left(\mathbf{u}_{yy}^0, L_{u_{yt}^0} \right) - \left(\mathbf{w}_{yy}^0, L_{w_{yt}^0} \right) - l_{yy} L_{l_{yt}},$$

$$T^0 = L - \left(\mathbf{u}_y^0, L_{u_y^0} - \partial_t L_{u_{yt}^0} - \partial_y L_{u_{yy}^0} \right) - \left(\mathbf{w}_y^0, L_{w_y^0} - \partial_t L_{w_{yt}^0} - \partial_y L_{w_{yy}^0} \right) - l_y \left(L_{l_y} - \partial_t L_{l_{yt}} - \partial_y L_{l_{yy}} \right) - \left(\mathbf{u}_{yy}^0, L_{u_{yy}^0} \right) - \left(\mathbf{w}_{yy}^0, L_{w_{yy}^0} \right) - l_{yy} L_{l_{yy}}.$$

Здесь h^0 — плотность функции Гамильтона движущегося объекта, которая учитывает как энергию его колебаний, так и энергию его движения относительно двумерной системы; S^0 — плотность потока энергии, p^0 — плотность волнового импульса, T^0 — плотность потока волнового импульса, L_t , L_y — мощность источника, изменяющего параметры объекта, и плотность сил отдачи соответственно.

Уравнения (7), (9), (12), (13) выражают собой локальные законы изменения энергии и волнового импульса в двумерной упругой системе и движущемся одномерном объекте.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ПЛАСТИНАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДУМЯ РАЗНЫМИ МОДЕЛЯМИ

В качестве примера двумерной упругой системы выберем однородную пластину, лежащую на упругом основании, свойства которого описываются классической моделью Фусса–Винклера [21, 22]. Эта модель базируется на гипотезе российского академика Н.И. Фусса о том, что реакция грунта (основания) в каждой точке подошвы фундамента (пластины) прямо пропорциональна осадке этой точки (1801) [21], примененной немецким ученым-механиком и инженером-строителем Э. Винклером (1867) [22] для расчета шпал на изгиб. Несмотря на то, что модель Фусса–Винклера не лишена недостатков, тем не менее, для достижения практических целей руководствуются чаще всего именно этой моделью.

Для лагранжиана малых колебаний пластины, лежащей на упругом основании Фусса–Винклера, и, принимая во внимание инерцию вращения ее элементов при изгибе, будем иметь выражение [2]

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ \rho h_* u_t^2 + \frac{\rho h_*^3}{12} (u_{xt}^2 + u_{yt}^2) - \frac{h_*^3}{6} \left(\frac{\Lambda + 2\mu}{2} (u_{xx} + u_{yy})^2 + 2\mu (u_{xy}^2 - u_{xx} u_{yy}) \right) - k_1 u^2 \right\}. \quad (14)$$

Здесь ρ — плотность материала, h_* — толщина пластины, Λ , μ — константы Ламе, k_1 — коэффициент

жесткости (коэффициент “постели”) упругого основания, $u(x,y,t)$ — поперечное смещение частиц срединной плоскости пластины.

Динамическое поведение пластины после подстановки (14) в (1) описывается решением уравнения

$$\rho h_* \partial_{tt} u - \frac{\rho h_*^3}{12} \partial_{tt} \Delta u + \frac{(\Lambda + 2\mu) h_*^3}{12} \Delta \Delta u + k_1 u = 0, \quad (15)$$

$$(\partial_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}).$$

Распространяющиеся в пластине изгибные волны согласно (7)–(11) имеют плотность энергии

$$h = \frac{1}{2} \left\{ \rho h_* u_t^2 + \frac{\rho h_*^3}{12} (u_{xt}^2 + u_{yt}^2) + \frac{h_*^3}{6} \left(\frac{\Lambda + 2\mu}{2} (u_{xx} + u_{yy})^2 + 2\mu (u_{xy}^2 - u_{xx} u_{yy}) \right) + k_1 u^2 \right\},$$

векторы плотностей потока энергии \mathbf{S} и волнового импульса \mathbf{p} с координатами

$$S_x = u_t \left(\frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{12} (u_{xxx} + u_{xyy}) - \frac{\rho h_*^3}{12} u_{xtt} \right) - \frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{12} u_{xt} u_{xx} - \frac{h_*^3 \Lambda}{12} u_{xt} u_{yy} - \frac{h_*^3 \mu}{6} u_{yt} u_{xy},$$

$$p_x = -\rho h_* u_t u_x - \frac{\rho h_*^3}{12} u_{xt} u_{xx} - \frac{\rho h_*^3}{12} u_{yt} u_{xy}, \quad (x \leftrightarrow y),$$

и тензор плотности потока волнового импульса \mathbf{T} с компонентами

$$T_{xx} = \left\{ \rho h_* u_t^2 + \frac{\rho h_*^3}{12} (u_{xt}^2 + u_{yt}^2 + 2u_x u_{xtt}) + \frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{12} (u_{xx}^2 - u_{yy}^2 - 2u_x (u_{xxx} + u_{xyy})) - k_1 u^2 \right\} / 2,$$

$$T_{xy} = u_y \left(\frac{\rho h_*^3}{12} u_{xtt} - \frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{12} (u_{xxx} + u_{xyy}) \right) + \frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{12} u_{xy} (u_{xx} + u_{yy}), \quad (x \leftrightarrow y).$$

Представляет интерес сравнить как дисперсионные, так и энергетические характеристики волн, распространяющиеся в данной пластине и пластине, описываемой моделью Кирхгофа [23], которая, как правило, используется в инженерных расчетах.

Если представить, например, решение $u(x,y,t)$ в виде суперпозиции плоских волн вида $A e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$, где A — комплексная амплитуда, ω — круговая частота, $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$ — волновой вектор с компонентами k_x, k_y , $\mathbf{r} = \{x, y\}$ — радиус-вектор, то из уравнения (15) получим дисперсионные соотношения

$$\omega = \pm \left(\frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{12} (k_x^2 + k_y^2)^2 + k_1 \right)^{1/2} \times \left(\rho h_* + \frac{\rho h_*^3}{12} (k_x^2 + k_y^2) \right)^{-1/2}. \quad (16)$$

В случае пластины модели Кирхгофа соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$\rho h_* \omega^2 = D (k_x^2 + k_y^2)^2 + k_1, \quad (17)$$

где D — цилиндрическая жесткость, которая выражается через константы Ламе (Λ ; μ) и коэффициент Пуассона ν следующим образом [24]:

$$D = h_*^3 (\Lambda + 2\mu) (1 - \nu)^{-2} (1 - 2\nu) / 12.$$

Поскольку для большинства сталей коэффициент Пуассона лежит в районе 0.3 [24], то в дальнейшем при расчетах будем использовать $\nu = 0.3$.

Введем безразмерные переменные:

$$\tilde{\omega} = \omega h_* / c_{II}, \quad \tilde{\omega}_* = \omega_* h_* / c_{II}, \quad \tilde{\kappa} = \kappa h_*,$$

где $\omega_* = \sqrt{k_1 / (\rho h_*)}$, $c_{II} = \sqrt{(\Lambda + 2\mu) / \rho}$ — скорость продольной волны в безграничной среде, κ — модуль волнового вектора \mathbf{k} волны.

На рис. 2 представлены в безразмерных переменных дисперсионные кривые (зависимость частоты $\tilde{\omega}$ от $\tilde{\kappa}$), соответствующие двум моделям пластин, лежащих на линейном упругом основании модели Фусса–Винклера.

Значение критической частоты, при которой фазовая скорость волны обращается в бесконечность, для обеих моделей одинаково и равно $\tilde{\omega}_*$. В пластине модели Кирхгофа, лежащей на линейном упругом основании, изгибные волны, частоты которых не достигают значения критической

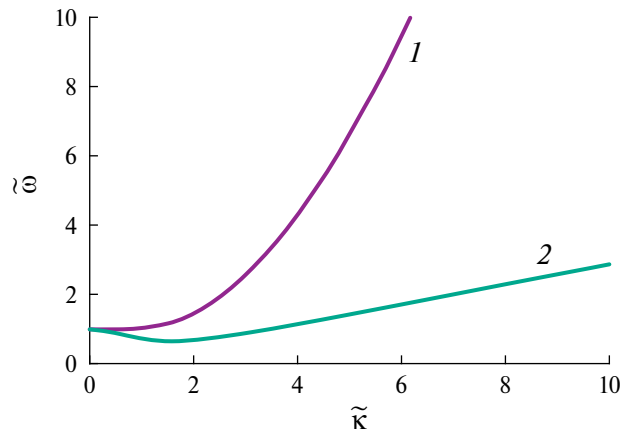


Рис. 2. Дисперсионные кривые пластин: 1 — модели Кирхгофа, 2 — модели (15), лежащих на линейном упругом основании, при $\tilde{\omega}_* = 1$.

частоты $\tilde{\omega}_*$, распространяться не могут. Учет инерции вращения (как показали исследования) приводит к меньшей, чем $\tilde{\omega}_*$, частоте $\tilde{\omega}_{**}$, при переходе через которую возбуждаются бегущие волны. Ее значение в безразмерных переменных $\tilde{\omega}_{**} = \omega_{**}h/c_{II}$ определяется выражением

$$\tilde{\omega}_{**} = \left(24 \left(\sqrt{1 + \tilde{\omega}_*^2/12} - 1 \right) \right)^{1/2}.$$

Дисперсионная кривая, соответствующая модели (16), по мере увеличения волнового числа испытывает спад (рис. 2, кривая 2), соответствующий волнам, которые называют “обратными” [25–28]. Как видно, обратные волны могут существовать в области частот, меньших критической $\tilde{\omega}_*$. Для пластины модели Кирхгофа дисперсионная кривая (рис. 2, кривая 1) непрерывно возрастает, устремляясь к бесконечности при $k \rightarrow \infty$.

Сравнивая фазовую $v_{ph} = \omega k / \kappa^2 = \{v_{px}, v_{py}\}$ и групповую $v_{gr} = d\omega/dk = \text{grad}_k \omega = \{v_{gx}, v_{gy}\}$ скорости (при $k_y = 0$) в безразмерных переменных ($\tilde{v}_{px} = v_{px}/c_{II}$, $\tilde{v}_{gx} = v_{gx}/c_{II}$), можно выделить следующие характерные области частот: $(\tilde{\omega}_{**}; \tilde{\omega}_*)$, $(\tilde{\omega}_*; \tilde{\omega}_* \sqrt{2})$, $(\tilde{\omega}_* \sqrt{2}; +\infty)$ для пластины, модель которой учитывает инерцию вращения (рис. 3а, 3б) и $(\tilde{\omega}_*; \tilde{\omega}_* \sqrt{2})$, $(\tilde{\omega}_* \sqrt{2}; +\infty)$ — для пластины модели Кирхгофа (рис. 3б).

Для пластины модели Кирхгофа на винклеровском основании, как было отмечено ранее, волны возбуждаются при частоте выше критической $\tilde{\omega}_*$ (рис. 3б). В области $(\tilde{\omega}_*; \tilde{\omega}_* \sqrt{2})$ функция \tilde{v}_{px} монотонно возрастает (рис. 3б, кривая 3), а \tilde{v}_{gx} уменьшается (рис. 3б, кривая 4) при приближении к $\tilde{\omega}_*$. В этой области $\tilde{v}_{px} > \tilde{v}_{gx}$. На частоте $\tilde{\omega}_*$ групповая скорость обращается в нуль. В области частот $(\tilde{\omega}_* \sqrt{2}; +\infty)$ функции \tilde{v}_{px} и \tilde{v}_{gx} монотонно возрастают с частотой, причем $\tilde{v}_{gx} > \tilde{v}_{px}$. Во всем диапазоне

возбуждения волн их групповая и фазовая скорости совпадают по направлению между собой, т.е. для этой модели изгибные волны являются прямыми.

Для пластины, описываемой моделью (15), согласно закону дисперсии (16), бегущие волны существуют не только при частоте выше критической $\tilde{\omega} > \tilde{\omega}_*$ (рис. 3б), но и ниже критической $\tilde{\omega} < \tilde{\omega}_*$ (рис. 3а), причем в области $\tilde{\omega}_* < \tilde{\omega} < \tilde{\omega}_* \sqrt{2}$ поведение их \tilde{v}_{px} и \tilde{v}_{gx} (рис. 3б, кривые 1а и 2а) подобно как в случае модели Кирхгофа, и существенно отличается в противном случае. Так, для частот ниже критической $\tilde{\omega}_*$, а именно в области $(\tilde{\omega}_{**}; \tilde{\omega}_*)$, существуют обратные волны, у которых фазовая и групповая скорости имеют противоположные знаки: фазовая скорость (рис. 3а, кривая 1б) принимает положительное значение, а групповая скорость (рис. 3а, кривая 2б) — отрицательное. На частоте $\tilde{\omega}_{**}$, где обратные волны переходят в прямые волны, групповая скорость обращается в нуль, а фазовая скорость принимает конечное значение, равное в безразмерных переменных $\sqrt{2}$. Кроме этого, в области $(\tilde{\omega}_* \sqrt{2}; +\infty)$ групповая скорость ($\tilde{v}_{gx} > \tilde{v}_{px}$) достигает локального максимума (рис. 3б, кривая 2а). Графики функций \tilde{v}_{gx} и \tilde{v}_{px} имеют горизонтальную асимптоту $\tilde{v}_{gx}, \tilde{v}_{px} = 1$ при $\tilde{\omega} \rightarrow \infty$, приближаясь к ней сверху/снизу (рис. 3б, кривые 2а и 1а, соответственно). Другими словами, при высоких частотах групповая и фазовая скорости стремятся к скорости продольной волны в безграничной среде, что противоречит теории упругих волноводов, согласно которой асимптотически скорости антисимметричных (изгибных) мод должны стремиться к скорости поверхностных волн Рэлея или к скорости сдвиговых волн в безграничной среде [16]. Путем введения поправочного коэффициента $\chi = 0.5(1-2\nu)/(1-\nu)$ в модели (15), можно добиться более точного описания дисперсионных свойств

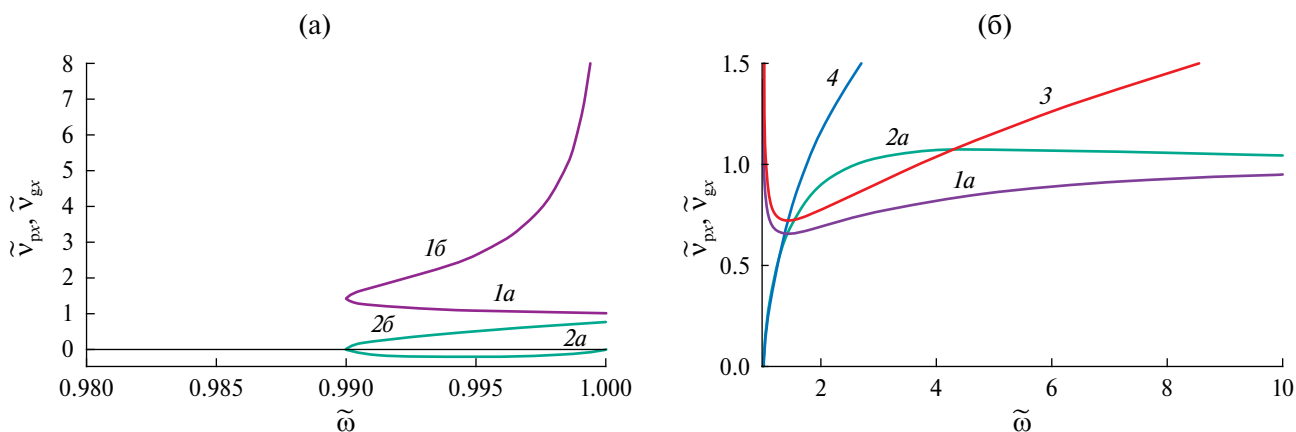


Рис. 3. Дисперсионные зависимости фазовой и групповой скоростей ($\tilde{\omega}_* = 1$): (а) — низкочастотный диапазон; (б) — высокочастотный диапазон.

реальной пластины, в частности, в пределе при $\omega \rightarrow \infty$ фазовая и групповая скорости будут близки к скорости сдвиговой волны в безграничной среде.

Для обеих моделей при $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_* \sqrt{2}$ фазовая скорость имеет локальный минимум (рис. 3б). При этой частоте фазовая и групповая скорости по величине равны между собой. Для пластины модели Кирхгофа, лежащей на линейном упругом основании, минимальная фазовая скорость определяется выражением

$$\tilde{v}_{ph1}^{\min} = \sqrt[4]{(1-2\nu)(1-\nu)^{-2} \tilde{\omega}_*^2 / 3},$$

а в случае пластины с учетом инерции вращения

$$\tilde{v}_{ph2}^{\min} = \tilde{\omega}_* \left(\left(\sqrt{1 + 12/\tilde{\omega}_*^2} - 1 \right) / 6 \right)^{1/2}. \quad (18)$$

Если $\tilde{\omega}_* \geq \nu^2 (1-\nu)^{-1} \sqrt{3(1-2\nu)^{-1}}$, то $\tilde{v}_{ph1}^{\min} \geq \tilde{v}_{ph2}^{\min}$, в противном случае $\tilde{v}_{ph1}^{\min} \leq \tilde{v}_{ph2}^{\min}$.

Минимальная фазовая скорость определяет пороговое значение, при превышении которого движущимся постоянным источником в упругой системе начинается излучение Вавилова–Черенкова [29, 30]. Эта скорость является одной из критических скоростей, которые рассчитывают в процессе проектирования скоростных наземных магистралей [31].

Вычисляя средние значения энергетических характеристик волн за время $T = 2\pi\omega^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} \langle h \rangle &= \frac{1}{2} \rho h_* \left(1 + \frac{h_*^2}{12} (k_x^2 + k_y^2) \right) \omega^2 A A^*, \\ \langle S_x \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{6} (k_x^2 + k_y^2) - \frac{\rho h_*^3}{12} \omega^2 \right) \omega k_x A A^*, \\ \langle p_x \rangle &= \frac{1}{2} \rho h_* \left(1 + \frac{h_*^2}{12} (k_x^2 + k_y^2) \right) \omega k_x A A^*, \quad (19) \\ \langle T_{xx} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{6} (k_x^2 + k_y^2) - \frac{\rho h_*^3}{12} \omega^2 \right) k_x^2 A A^*, \\ \langle T_{xy} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{6} (k_x^2 + k_y^2) - \frac{\rho h_*^3}{12} \omega^2 \right) k_x k_y A A^*, \\ &\quad (x \leftrightarrow y), \end{aligned}$$

где верхняя * означает комплексное сопряжение.

Естественно, что для средних значений энергетических характеристик волн будут справедливы равенства, приведенные в работе [13], которые в координатной форме записи имеют вид:

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= v_{gx} \langle h \rangle, \\ \langle S_x \rangle &= v_{px} \langle T_{xx} \rangle + v_{py} \langle T_{yx} \rangle, \quad \langle h \rangle = v_{px} \langle p_x \rangle + v_{py} \langle p_y \rangle, \\ \langle T_{xx} \rangle &= v_{gx} \langle p_x \rangle, \quad \langle T_{xy} \rangle = v_{gx} \langle p_y \rangle, \quad (x \leftrightarrow y). \end{aligned}$$

Можно также убедиться, что для компонент средних значений энергетических характеристик волн из (19) с учетом (16) выполняются соотношения, не учтенные ранее в [13]:

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle - v_{px} \langle h \rangle &= v_{px} (\langle T_{xx} \rangle - v_{px} \langle p_x \rangle) + \\ &+ v_{py} (\langle T_{yx} \rangle - v_{py} \langle p_x \rangle) = (0.5 \rho h_* \omega^2 - k_1) A A^* v_{px}, \\ &\quad (x \leftrightarrow y). \end{aligned}$$

Оценим локальный поток энергии $\tilde{S} = \langle S_x \rangle h_* (c_{II}^3 \rho A A^*)^{-1}$ (при $k_y = 0$), переносимый волнами, согласно каждой из двух рассматриваемых моделей пластин (рис. 4).

В пластине, изгибные колебания которой описываются уравнением (15), поведение плотности потока энергии носит знакопеременный характер (рис. 4, кривые 2а и 2б). Увеличение коэффициента жесткости упругого основания приводит к увеличению частотной области существования обратных волн. На частоте образования обратных волн $\tilde{\omega}_{**}$, как и на частоте отсечки $\tilde{\omega}_*$, плотность потока энергии равна нулю, т.е. энергия волнами в пластине не переносится. В случае пластины Кирхгофа, дисперсионная кривая которой не имеет участка, соответствующего обратной волне (рис. 2, кривая 1), плотность потока энергии остается знакопостоянной (рис. 4, кривые 1а и 1б). Такое же значение плотности потока энергии достигается здесь на большей частоте.

Следует отметить, что модель упругого основания Фусса–Винклера является однопараметрической. К одному из ее недостатков, о которых упоминалось выше, относят невозможность учета распределяющей способности основания. Этого недостатка лишена модель упругого основания, характеризующаяся двумя коэффициентами постели на “сжатие” и “сдвиг” (часто называемой моделью Пастернака). С оценкой влияния коэффициента

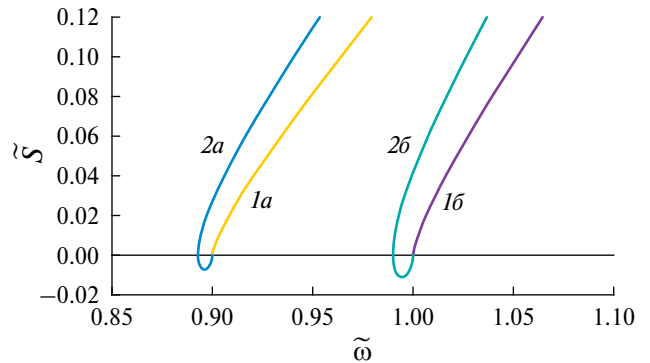


Рис. 4. Частотная зависимость плотности потока волновой энергии для пластин: 1 – Кирхгофа, 2 – с учетом инерции вращения, при различных значениях приведенного коэффициента жесткости упругого основания: а – $\tilde{\omega}_* = 0.9$, б – $\tilde{\omega}_* = 1$.

сдвига постели на дисперсионные и энергетические характеристики волн, распространяющихся в пластине, лежащей на двухпараметрическом упругом основании, можно ознакомиться в работе [13].

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ВОЛНОВОГО ИМПУЛЬСА

В отличие от уравнений переноса, описывающих изменения энергии и импульса по мере распространения волн, интегральные законы позволяют судить об изменениях энергии и импульса всей системы в целом с учетом взаимодействия волн с движущимися объектами.

Интегрируя уравнения (7), (9) по области $\sigma = \{(x, y): x_1 \leq x \leq x_2, 0 \leq y \leq b_0\}$, которая разделена движущимся объектом на две, а уравнения (12), (13) вдоль $y \in [0, b_0]$, получим глобальные законы изменения энергии и импульса упругой полосы и движущегося одномерного объекта. Так, для упругой полосы имеем

$$\frac{d}{dt} \iint_{\sigma} h dx dy = - \oint_{\Gamma} S_n d\tau + \int_0^{b_0} [\mathbf{n}_1 \mathbf{S} - l_t h] dy + \iint_{\sigma} \{-\lambda_t + (\mathbf{q}, \mathbf{u}_t)\} dx dy, \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \iint_{\sigma} \mathbf{p} dx dy = - \oint_{\Gamma} T_n d\tau + \int_0^{b_0} [\mathbf{n}_1 \mathbf{T} - l_t \mathbf{p}] dy + \iint_{\sigma} \{\mathbf{F}_0 - (\mathbf{q}, \text{grad } \mathbf{u})\} dx dy, \quad (21)$$

а для движущегося одномерного объекта:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{b_0} h^0 dy = - [S^0]_0^{b_0} - \int_0^{b_0} \{(\mathbf{u}_t^0, [\mathbf{N}] - \mathbf{q}_1) + (\mathbf{w}_t^0, [\mathbf{M}] - \mathbf{q}_2) + l_t ([F] - q_3) + L_t\} dy, \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^{b_0} p^0 dy = - [T^0]_0^{b_0} + \int_0^{b_0} \{(\mathbf{u}_y^0, [\mathbf{N}] - \mathbf{q}_1) + (\mathbf{w}_y^0, [\mathbf{M}] - \mathbf{q}_2) + l_y ([F] - q_3) + L_y\} dy. \quad (23)$$

Здесь Γ — граница области σ , $\mathbf{n}_1 = (1, -l_y)$, нормальные составляющие отмечены индексом n .

Изменение волнового импульса двумерной системы (21) определяется силами давления волн на границу с учетом ее движения, силами отдачи, возникающими из-за распределенного отражения волн, и внешними силами.

Согласно (22) скорость изменения энергии объекта определяется потоком энергии S^0 через

границы $y = 0$, $y = b_0$ и обусловлена работой, совершаемой в единицу времени обобщенными силами и силами давления волн со стороны двумерной системы, внешними силами, а также мощностью источника, изменяющего во времени параметры объекта. В правой части уравнения скорости изменения волнового импульса (23), переносимого вдоль движущегося одномерного объекта, стоят силы давления волн на границы $y = 0$, $y = b_0$, силы давления волн со стороны двумерной системы, сила отдачи и внешние силы.

Изменение энергии всей сложной системы в целом “направляющая + движущийся объект”, согласно формулам (20), (22), будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \left(\iint_{\sigma} h dx dy + \int_0^{b_0} h^0 dy \right) = - [S^0]_0^{b_0} + \int_0^{b_0} \{(\mathbf{u}_t^0, \mathbf{q}_1) + (\mathbf{w}_t^0, \mathbf{q}_2) + l_t q_3 - L_t\} dy - \oint_{\Gamma} S_n d\tau + \iint_{\sigma} \{-\lambda_t + (\mathbf{q}, \mathbf{u}_t)\} dx dy. \quad (24)$$

Изменение полной энергии происходит за счет потока энергии через границы, работы как внешних сил, так и сил, изменяющих параметры системы. В частности, в случае неподвижных границ и отсутствия внешних источников увеличение энергии возможно лишь при условии положительной работы сил, изменяющих параметры системы, т.е., если

$$- \left(\int_0^{b_0} L_t dy + \iint_{\sigma} \lambda_t dx dy \right) > 0.$$

Для исследования условий излучения можно воспользоваться уравнением (22). Входящее сюда выражение $(\mathbf{u}_t^0, [\mathbf{N}]) + (\mathbf{w}_t^0, [\mathbf{M}]) + l_t [F]$ на основе соотношений (5), (6) и (8), можно записать в виде

$$(\mathbf{u}_t^0, [\mathbf{N}]) + (\mathbf{w}_t^0, [\mathbf{M}]) + l_t [F] = [(\mathbf{n}_1, \mathbf{S}) - l_t h] + \left[\left(\nabla \left(\mathbf{u}_t, l_t \lambda_{\mathbf{u}_{yt}} + l_y \lambda_{\mathbf{u}_{yy}} - \frac{1}{2} \lambda_{\mathbf{u}_{xy}} \right), \mathbf{n}_2 \right) \right],$$

$\mathbf{n}_2 = (l_y, 1)^T$, верхний индекс T обозначает транспонирование вектора.

Выражения $(\mathbf{n}_1, \mathbf{S}) - l_t h \Big|_{x=l(y,t) \pm 0}$ определяют плотности потоков волновой энергии на каждой из сторон $x = l(y, t)$. Следовательно, критерий излучения в двумерную упругую систему движущимся вдоль нее распределенным одномерным объектом можно записать в форме

$$\left| \int_0^{b_0} [(\mathbf{n}_1, \mathbf{S}) - l_t h] dy \right| > 0.$$

Отсюда следует, что одна из критических скоростей пластины (15) (соответствующих границам области излучения) будет равна $l_t = \pm \sqrt{(\Lambda + 2\mu)/\rho}$. Если дополнительно предположить, что объект представляет собой постоянную нагрузку, движущуюся равномерно ($l_t = \text{const}$), и решения слева и справа от нее гармонические, то определяется еще одна скорость

$$l_t = \pm 2(12 + h_*^2 k_y^2)^{-1} \rho^{-1/2} \left\{ \left\{ 3(12(\Lambda + 2\mu) + k_1 h_*) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (h_*^4 k_y^4 (\Lambda + 2\mu) + 12k_1 h_*) \right\}^{1/2} + 6(h_*^2 k_y^2 (\Lambda + 2\mu) - k_1 h_*) \right\}^{1/2},$$

которая при $k_y = 0$ в безразмерных переменных совпадает с (18). Значение критической скорости движения нагрузки зависит от коэффициента жесткости упругого основания и физико-механических свойств пластины.

Для того чтобы выяснить влияние движения закрепления на энергию колебаний двумерной системы, закрепленную абсолютно жестко ($u = 0, \partial u / \partial \mathbf{n} = 0$) по ограниченному контуру ($x = x_{1,2}, x = l(y, t), y = 0, y = b_0$), будем полагать, что ее параметры постоянны ($\lambda_t = 0$), а внешние силы отсутствуют ($\mathbf{q} = 0$). Из (20) с учетом (6) следует уравнение

$$\frac{dH}{dt} = - \int_0^{b_0} l_t F dy, \quad H = \iint_{\sigma} h dx dy. \quad (25)$$

Известно [2, 5], что при движении границы со скоростью, меньшей скорости распространения волн, падающая волна всегда отталкивает границу. Следовательно, согласно (25), при уменьшении размеров двумерной системы ($l_t < 0$) энергия ее колебаний непрерывно возрастает ($dH/dt > 0$), а при увеличении ($l_t > 0$) — энергия колебаний уменьшается ($dH/dt < 0$). В первом случае внешние силы совершают работу против сил давления волн и увеличивают энергию системы. Во втором — работа совершается силами давления волн, и энергия отбирается у двумерной системы.

О том, что в различных условиях сила, обусловленная радиационным давлением, ведет себя по-разному, установлено в работе [15], где на простом примере кольца на струне была показана важность фазовых соотношений между падающим и рассеянным полями на формировании постоянных составляющих (средних значений) сил.

Законы изменения энергии и импульса позволяют находить некоторые важные физические характеристики, не прибегая непосредственно к решению краевых задач. Одной из таких

характеристик является коэффициент полезного действия (КПД).

Ограничимся рассмотрением нормального падения волны на абсолютно жесткое закрепление, когда порождается только одна отраженная бегущая волна. Как и в случае одномерной системы с движущимся сосредоточенным закреплением [32], коэффициент преобразования энергии волн в энергию поступательного движения закрепления (КПД) можно определить формулой

$$\eta = \frac{W_0 - W_r}{W_0}. \quad (26)$$

Здесь W_0, W_r — энергии падающей и отраженной волн, соответственно. Воспользовавшись приведенным в [2] частотно-энергетическим инвариантом: $W_0/\omega_0 = W_r/\omega_r$ (где ω_0, ω_r — частоты падающей и отраженной волн), характеризующим процесс взаимодействия волн в двумерных системах с движущимся с постоянной скоростью $l_t = V = \text{const}$ абсолютно жестким закреплением, из (26) будем иметь

$$\eta = 1 - \frac{\omega_r}{\omega_0}. \quad (27)$$

Связь между кинематическими характеристиками падающей и вторичных (отраженных) волн определяется из дисперсионного уравнения (16) или (17) в зависимости от рассматриваемой модели пластины и соотношений [2, 33]: $\omega_0 - k_{0x}V = \omega_m - k_{mx}V, k_{0y} = k_{my}$ ($m = 1, 2, \dots$). Приведенные соотношения, именуемые кинематическими инвариантами [2, 33], выражают равенство фаз падающей и вторичных волн на движущейся границе $x = Vt$ в любой момент времени t независимо от координаты y . При нормальном падении ($k_{0y} = 0$) эти формулы упрощаются. Чтобы отбросить лишние решения, обычно [2, 14, 33] из физических соображений, накладываются дополнительные ограничения, а именно, условие ограниченности прогибов пластины на бесконечности и условие излучения, согласно которому вторичные волны должны отводить энергию от движущегося закрепления. В зависимости от скорости движения закрепления возможны качественно различные случаи образования вторичных волн. Скорости, разделяющие такие случаи, называют критическими [2, 14]. Они определяются из условия вырождения корней системы, состоящей из дисперсионного уравнения и кинематического инварианта. На рис. 5 изображена зависимость КПД согласно формуле (27) от безразмерной скорости ($\tilde{V} = V/c_{II}$) движения закрепления. Коэффициент полезного действия определяется частотой падающей волны, скоростью движения закрепления, свойствами пластины и упругого основания. Графики, соответствующие двум различным моделям пластин, построены при частоте падающей волны, превышающей критическую частоту $\tilde{\omega}_*$ ($\tilde{\omega}_0 > \tilde{\omega}_*$), и в докритическом

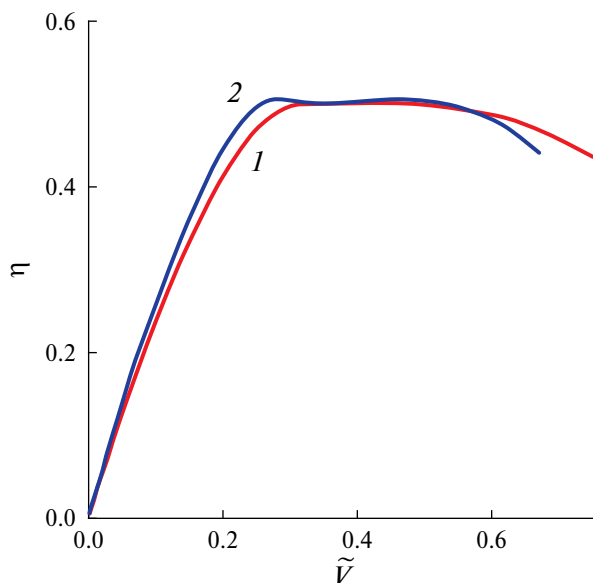


Рис. 5. КПД в зависимости от скорости движения закрепления вдоль пластины модели: 1 — Кирхгофа, 2 — с учетом инерции вращения.

диапазоне скоростей движения закрепления, когда имеет место нормальный эффект Доплера, и, как в случае неподвижного закрепления, падающая волна порождает одну отраженную бегущую волну и “приграничную” волну, экспоненциально спадающую от закрепления. Последняя не оказывает давление на движущуюся границу [14] (постоянная составляющая равна нулю).

Из рис. 5 видно, что существует скорость движений закрепления, при которой КПД достигает максимального значения, причем для модели пластины с учетом инерции вращения эта скорость ниже, чем для пластины модели Кирхгофа. При закритических скоростях движения закрепления, когда эффект Доплера проявляется аномальным образом, формула (27) для КПД не справедлива, поскольку возбуждаются не одна, а две отраженные волны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применительно к двумерным системам с движущимися одномерными объектами приведены универсальные формулы через лагранжианы для тензоров волнового импульса и потока энергии, сил отдачи, возникающих из-за распределенного отражения волн в неоднородных системах, и работы сил, изменяющих параметры системы.

Сравнение двух различных моделей пластин показало, что для каждой из них имеет место не только нормальный закон дисперсии (фазовая скорость больше групповой скорости), но и аномальный

закон (фазовая скорость меньше групповой скорости). Для пластины с учетом инерции вращения ее элементов при изгибе, лежащей на упругом основании, и фазовая и групповая скорости обладают экстремумом: минимумом — фазовая скорость, максимумом — групповая. На больших частотах групповая скорость превышает фазовую и обе стремятся к скорости продольной волны в безграничной среде. С уменьшением частоты эти скорости уменьшаются и при значении $\omega_* = \omega_* \sqrt{2}$ сравниваются — скорость переноса фазы волны совпадает со скоростью переноса энергии группой волн. Для частот выше критической ($\omega > \omega_*$) и с приближением к ней ($\omega \rightarrow \omega_*$) перенос энергии уменьшается: групповая скорость изгибных волн стремится к нулю, а фазовая — к бесконечности. Дальнейшее уменьшение частоты ($\omega < \omega_*$) приводит к еще одному примечательному значению — частоте, при которой фазовая скорость принимает конечное значение, а групповая скорость обращается в нуль и происходит принципиальная перестройка [13, 28] поля вектора плотности потока энергии. Наличие частотной области существования обратных волн, т.е. волн, у которых фазовая и групповая скорости противоположно направлены, связано с выбором модели изгибных колебаний пластины и коэффициента жесткости (коэффициента постели) упругого основания. При нулевой жесткости упругого основания, либо при пренебрежении кинетической энергией, обусловленной инерцией вращения элементов пластины при изгибе, направления фазовой и групповой скоростей изгибных волн совпадают.

Следует отметить, что вопросам, связанным с волнами, у которых групповая скорость равна нулю, все больше уделяется внимание в литературе [34–38], в частности, с целью создания электроакустических резонаторов [39, 40].

Приведены соотношения, связывающие средние значения локальных энергетических и кинематических характеристик линейных волн, которые не принимались во внимание ранее.

В работе продемонстрирована принципиальная возможность преобразования энергии колебаний двумерной упругой системы в энергию поступательного движения одномерного объекта. В качестве посредника такого преобразования выступает сила, обусловленная давлением волн. При нормальном падении волны на движущееся с докритическими скоростями абсолютно жесткое закрепление коэффициент преобразования энергии волн в энергию поступательного движения достигает максимального значения в случае пластины модели Кирхгофа на больших скоростях, чем в случае модели пластины с учетом инерции вращения.

Полученные результаты могут быть использованы для анализа фундаментальных задач волновой

динамики упругих систем, в том числе, связанных с излучением волн движущимися источниками и взаимодействием волн с движущимися объектами.

Работа выполнена в рамках государственного задания на проведение фундаментальных научных исследований на 2024–2026 гг. (FFUF-2024-0031, № НИОКТР 1023032800130-3-2.3.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fryba L.* Vibration of solids and structures under moving loads. 3rd ed. London: Thomas Telford, 1999. 494 p.
2. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
3. *Козин В.М., Жесткая В.Д., Погорелова А.В., Чижумов С.Д., Джабраилов М.Р., Морозов В.С., Курстов А.Н.* Прикладные задачи динамики ледяного покрова. М.: Изд. Академия Естественных наук, 2008. URL: <https://www.monographies.ru/ru/book/view?id=14>
4. *Law Siu-Seong, Zhu Xin-Qun.* Moving Loads Dynamic Analysis and Identification Techniques. London: CRC Press, 2011. V. 8. 332 p. <https://doi.org/10.1201/b10561>
5. *Болдин В.П., Весницкий А.И.* Краевые задачи динамики двумерных упругих систем с движущимися нагрузками и закреплениями // *Машиноведение*. 1989. № 1. С. 70–75.
6. *Болдин В.П., Маланов С.Б., Уткин Г.А.* Постановка краевых задач динамики двумерных систем с движущимися нагрузками и закреплениями // *Прикладная математика и механика*. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 34–39.
7. *Лисенкова Е.Е.* Постановка самосогласованных задач динамики двумерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // *Вестник научно-технического развития*. 2014. № 6 (82). С. 23–30.
8. *Лисенкова Е.Е.* Краевые задачи динамического поведения двумерных упругих систем с движущимися объектами // *Прикладная математика и механика*. 2019. Т. 83. № 1. С. 63–71.
9. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Об использовании методов лагранжевой механики для анализа баланса энергии в вихревых течениях сжимаемого газа // *Акуст. журн.* 2021. Т. 67. № 1. С. 98–106.
10. *Григорянц Н.М.* Свободные колебания тонких плит с учетом инерции вращения // *Строит. механ. и расчет соорж.* 1961. № 3. С. 36–37.
11. *Морозов Н.Ф.* О нелинейных колебаниях тонких пластин с учетом инерции вращения // *Докл. АН СССР*. 1967. Т. 176. № 3. С. 522–525.
12. *Ерофеев В., Потапов А., Солдатов И.* Нелинейные волны в упругих системах. Saarbrücken: LAP LAMBERT Acad. Publish., 2015. 236 с.
13. *Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е.* Дисперсионные и энергетические характеристики изгибных волн в пластине, лежащей на двухпараметрическом упругом основании // *Акуст. журн.* 2023. Т. 69. № 3. С. 277–283. <https://doi.org/10.31857/S0320791922600342>
14. *Весницкий А.И.* Избранные труды по механике. Н.Новгород: Наш дом, 2010. 248 с.
15. *Данилов С.Д., Миронов М.А.* Одномерное моделирование средних сил в акустике // *Акуст. журн.* 1984. Т. 30. № 3. С. 306–309.
16. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
17. *Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е.* Общие соотношения для волн в одномерных упругих системах // *Прикладная математика и механика*. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 315–321.
18. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
19. *Миронов М.А.* Распространение изгибной волны в пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале // *Акуст. журн.* 1988. Т. 34. № 3. С. 546–547.
20. *Krylov V.V.* Overview of localised flexural waves in wedges of power law profile and comments on their relationship with the acoustic black hole effect // *J. Sound Vibr.* 2020. V. 468. 115100. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.115100>
21. *Фусс Н.И.* Опыт теории о сопротивлении, причиняемом дорогами всякого рода четырехколесным и двухколесным повозкам с определением обстоятельств, при которых одни из них повозок полезнее других // *Академические сочинения, выбранные из первого тома “Деяний Императорской академии наук”*. Санкт-Петербург, 1801. Ч. 1. С. 373–422.
22. *Winkler E.* Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prague: Dominicius, 1867. 388 p.
23. *Вибрации в технике*. Т. 1. Колебания линейных систем / Под. ред. Болотина В.В. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
24. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
25. *Meitzler A.H.* Backward-wave transmission of stress pulses in elastic cylinders and plates // *J. Acoust. Soc. Am.* 1965. V. 38. № 5. P. 835–842.
26. *Бурлий П.В., Ильин П.П., Кучеров И.Я.* Обратные поперечные акустические волны в пластинах кубических кристаллов // *Акуст. журн.* 1997. Т. 43. № 3. С. 310–314.
27. *Шевченко В.В.* Прямые и обратные волны // *Успехи физ. наук*. 2007. Т. 177. № 3. С. 301–306.
28. *Коузов Д.П., Миролюбова Н.А.* Локальные потоки энергии вынужденных колебаний тонкой упругой полосы // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2012. Т. 5. № 4. С. 397–404. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.4.47>
29. *Гинзбург В.Л.* Излучение равномерно движущихся источников (эффект Вавилова–Черенкова, переносное излучение и некоторые другие явления) // *Акуст. журн.* 2005. Т. 51. № 1. С. 24–36.

30. Руденко О.В., Гусев В.А. Движущийся объект: спектры сигналов пассивной, активной локации и переходное излучение // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 6. С. 599–609.
<https://doi.org/10.31857/S032079192006009X>
31. Метрикин А.В., Веричев С.Н., Вострухов А.В. Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2015. 200 с.
32. Весницкий А.И., Лисенкова Е.Е. Частотно-энергетические соотношения для упругих волн в одномерных системах с движущимися объектами // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 2. С. 209–215.
33. Болотовский Б.М., Столяров С.Н. Отражение света от движущегося зеркала и родственные задачи // Успехи физ. наук. 1989. Т. 159. № 1. С. 155–180.
<https://doi.org/10.3367/UFN.0159.198909f.0155>
34. Prada C., Clorennec D., Royer D. Local vibration of an elastic plate and zero-group velocity Lamb modes // J. Acoust. Soc. Am. 2008. V.124. P. 203–212.
35. Tofeldt O., Ryden N. Zero-group velocity modes in plates with continuous material variation through the thickness // J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 141. P. 3302–3311.
<https://doi.org/10.1121/1.4983296>
36. Laurent J., Royer D., Prada C. In-plane backward and zero group velocity guided modes in rigid and soft strips // J. Acoust. Soc. Am. 2020. V. 147. № 2. 1302.
<https://doi.org/10.1121/10.0000760>
37. Glushkov E.V., Glushkova N.V. Multiple zero-group velocity resonances in elastic layered structures // J. Sound Vibr. 2021. V. 500. 116023.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116023>
38. Kiefer D.A., Plestenjak B., Gravenkamp H., Prada C. Computing zero-group-velocity points in anisotropic elastic waveguides: Globally and locally convergent methods // J. Acoust. Soc. Am. 2023. V. 153. N 2. P. 1386–1398.
<https://doi.org/10.1121/10.0017252>
39. Yantchev V., Arapan L., Katardjiev I., Plessky V. Thin-film zero-group velocity Lamb wave resonator // Appl. Phys. Lett. 2011. V. 99. 033505.
40. Caliendo C., Hamidullah M. Zero-group-velocity acoustic waveguides for high-frequency resonators // J. Phys. D: Appl. Phys. 2017. V. 50. 474002.

The laws of variation of energy and momentum for two-dimensional elastic systems with moving objects

V. I. Erofeev^{a,*}, E. E. Lisenkova^{a,**}

^a*Mechanical Engineering Research Institute of the RAS – Branch of Federal Research Center
 “A.V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences”*

*e-mail: erof.vi@yandex.ru

**e-mail: eelissen@yandex.ru

The self-consistent problem of dynamic behavior of a deformable system consisting of a two-dimensional elastic guide (subsystem 1) and a one-dimensional elastic object (subsystem 2) continuously moving along it is considered. Local and global laws of change in energy and wave momentum are presented in the case when the Lagrangians of the contacting subsystems depend on generalized coordinates and their derivatives of no more than the second order with respect to all space-time variables. Radiation conditions in the considered class of systems are discussed. A comparative analysis of both dispersion and energy characteristics of flexural waves propagating in plates described by two different models is carried out. Critical velocities of motion of a constant load along these plates are found. The dependence of critical velocities on the rigidity coefficient of the elastic foundation and the physical and mechanical properties of the plate is established. The fundamental possibility of converting the energy of oscillations of a two-dimensional elastic guide into the energy of translational motion of a one-dimensional object is demonstrated. The force caused by the wave pressure acts as a mediator of such transformation, the expression for which is obtained in a universal form through the Lagrangian of a two-dimensional system. The dependence of the coefficient of transformation of wave energy into the energy of translational motion of an absolutely rigid fastening on the speed of its motion and the parameters of a two-dimensional system is constructed.

Keywords: two-dimensional system, moving load, energy flow, wave pulse, plate, elastic foundation, critical velocity