
АКУСТИКА СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ
ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 550.344.56

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ АМПЛИТУДЫ ВОЛНЫ РЭЛЕЕВСКОГО ТИПА НА ПОВЕРХНОСТИ К ИЗМЕНЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

© 2025 г. Р. А. Жостков^{а,*}, Д. А. Жарков^{а,**}

^аИнститут физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, ул. Большая Грузинская 10, стр. 1, Москва, 123995 Россия

*e-mail: shageraxcom@yandex.ru

**e-mail: denis.Zharkov2014@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.01.2025 г.

После доработки 06.03.2025 г.

Принята к публикации 06.05.2025 г.

Рассмотрена чувствительность амплитуды вертикальной компоненты смещений поверхностной акустической волны (ПАВ) на поверхности среды к изменению упругих параметров слоистого полупространства с плавным изменением его упругих параметров по горизонтали. Проанализированы случаи перехода волны из однослойной системы в однослойную и из многослойной в многослойную на примере пятислойной системы при независимом изменении скоростей продольных и поперечных волн в слоях. Показано, что свойства опорной среды влияют на результирующие зависимости относительной амплитуды от частоты. Чувствительность амплитуды волны к локальному изменению параметров в многослойной системе существенно изменяется в зависимости от частоты. В случае постоянного коэффициента Пуассона продемонстрирован механизм изменения амплитуды на поверхности на основе анализа профиля поверхностной волны.

Ключевые слова: поверхностная акустическая волна, волна Рэлея, слоистая среда, математическое моделирование, ММЗ, доминантная длина волны

DOI: 10.31857/S0320791925030112, EDN: JUKIUJ

ВВЕДЕНИЕ

Поверхностные акустические волны (ПАВ) являются важной частью сейсморазведочной практики [1–7]. В качестве исходной информации используются скоростные [1, 2] или амплитудные [3, 4] характеристики, также существуют подходы с комбинированным анализом [7]. Методы, основанные на анализе скорости (дисперсионные методы) активно и успешно используются, в частности, из-за хорошо разработанной теоретической основы [8–10], которая позволяет реализовать инверсию данных и получать количественную информацию о структуре недр. Амплитудные методы в настоящее время не имеют подобной процедуры и дают лишь качественную информацию [11]. Однако существуют работы, посвященные моделированию амплитудных характеристик поверхностных волн [12, 13], в которых, в частности, исследуется интерпретация H/V метода на основе анализа эллиптичности поверхностных волн.

Одним из активно используемых методов поверхностно-волнового изучения геофизических

сред является метод микросейсмического зондирования (ММЗ) [3, 14], который пока не имеет достаточного теоретического обоснования, и, как следствие, неясным остается вопрос о физической величине, к которой чувствителен этот метод, хотя эта задача является очень важной, поскольку напрямую влияет на интерпретацию результатов, полученных этим методом. Считается, что роль такой величины играет скорость распространения поперечных волн, однако, как показано в настоящей статье, в общем случае это не так.

Существует качественное описание метода микросейсмического зондирования [15], а также результаты численного моделирования частных случаев [14], однако аналитического описания пока нет. Основа ММЗ заключается в изменении амплитуды поверхностной волны на поверхности над аномальными включениями. Физика такого процесса сложна и включает в себя не только перераспределение энергии, но и обменные процессы [16–18], поэтому построить полное аналитическое описание такой системы не представляется

возможным. Однако, если предположить, что основной вклад в изменение амплитуды вносит эффект перераспределения энергии [15], т.е. рассматривать случай малого рассеяния волны и плавного изменения амплитуды, то для такой системы можно построить математическую модель и получить аналитическое решение.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Геометрия задачи та же, что и в работе [19]. Рассматривается двумерный случай (рис. 1), свободная граница расположена при $z = 0$, ось z направлена вниз. Слоистое упругое полупространство занимает область $z \geq 0$. Сверху при $-\infty < z < 0$ находится вакуум. Вдоль свободной границы в положительном направлении оси x распространяется плоская поверхностная волна. Рассматриваемую геометрию разделим на три области: R — опорная среда, I — исследуемая среда, T — область перехода. Волна из области R переходит в область I посредством области T, в которой происходит плавное изменение параметров среды. Плавность здесь определяется малостью градиента упругих параметров по горизонтали в каждом слое: $\frac{\partial c_l}{\partial x} = \frac{\partial c_l}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \rightarrow 0$. В представленном аналитическом подходе эти градиенты стремятся к 0, поскольку считается, что области перехода T имеют бесконечную ширину. Определение количественной оценки градиентов, при которых допустимо использовать представленный подход, представляет собой отдельную задачу и будет выполнено в будущих работах. Волновое поле в областях R и I рассчитывалось независимо друг от друга. Связь между рассчитанными полями устанавливалась, исходя из предположения, что поток энергии через полубесконечное сечение сохраняется. В данной работе рассматривается пятислойная среда ($N = 5$) с нормальной дисперсией. Выбор системы из пяти слоев обусловлен следующим соображением: в слоистой среде есть три типа слоев: верхний, нижний и промежуточные. Если влияние верхнего и нижнего слоя на поверхностные волны очевидным образом отличаются, то отличие влияния различных промежуточных слоев уже не столь

явно. Для того чтобы продемонстрировать общий характер влияния промежуточных слоев, была выбрана система, в которую добавлялся один слой между верхним и “промежуточным” и еще один слой между нижним и “промежуточным”.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Используемая математическая модель подробно описана в работе [19], однако кратко напомним ее основные моменты. Как и прежде, вначале необходимо рассмотреть распространение ПАВ в плоско-слоистой системе.

Поле в каждом из однородных слоев описывается уравнением Ламэ, записанным для смещений в отсутствие источника [20, 21]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div} \mathbf{u}. \tag{1}$$

Смещение \mathbf{u} элемента упругой среды выражается через скалярный ϕ и векторный Ψ потенциалы. При этом для двумерной задачи $\Psi = (0, \psi, 0)$, а смещения по осям x и z имеют вид:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \text{rot} \Psi, \quad u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2}$$

Подставляя выражения (2) в (1) и применяя поочередно операции дивергенции и ротора, получим волновые уравнения для потенциалов:

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \Delta \phi = 0, \quad \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu \Delta \psi = 0.$$

Учитывая то, что рассматриваются плоские волны с гармонической зависимостью от времени, можно получить решения для потенциалов.

Для слоев решения представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \phi_j &= A_j^{(-)} e^{-q_j z} e^{-i(\omega t - kx)} + A_j^{(+)} e^{q_j z} e^{-i(\omega t - kx)}, \\ \psi_j &= B_j^{(-)} e^{-s_j z} e^{-i(\omega t - kx)} + B_j^{(+)} e^{s_j z} e^{-i(\omega t - kx)}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $q_j = \sqrt{k^2 - k_{jy}^2}$, $s_j = \sqrt{k^2 - k_{jz}^2}$, j — номер слоя; $k = \omega/c$, c — фазовая скорость ПАВ. Верхний индекс у амплитудных множителей соответствует амплитудам волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлении вдоль вертикальной оси.

В полупространстве (при $z > z_N$) решения имеют следующий вид:

$$\phi = A_N e^{-q_N z} e^{-i(\omega t - kx)}, \quad \psi = B_N e^{-s_N z} e^{-i(\omega t - kx)}. \tag{4}$$

Здесь $q_N = \sqrt{k^2 - k_{Ny}^2}$, $s_N = \sqrt{k^2 - k_{Nz}^2}$.

Далее, используя граничные условия, определяется скорость ПАВ и связь между амплитудами

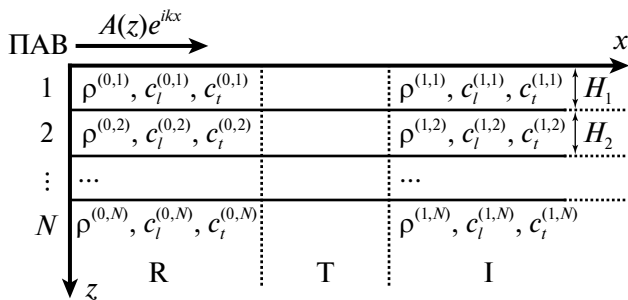


Рис. 1. Геометрия задачи.

потенциалов. На свободной границе должно выполняться условие равенства нулю нормальных и касательных напряжений:

$$T_{zz}|_{z=0} = 0, \quad T_{xz}|_{z=0} = 0.$$

На границе j -го и $(j+1)$ -го слоя должно выполняться условие равенства нормальных и касательных смещений и напряжений:

$$u_z^{(j)}|_{z=z_j} = u_z^{(j+1)}|_{z=z_j}, \quad u_x^{(j)}|_{z=z_j} = u_x^{(j+1)}|_{z=z_j},$$

$$T_{zz}^{(j)}|_{z=z_j} = T_{zz}^{(j+1)}|_{z=z_j}, \quad T_{xz}^{(j)}|_{z=z_j} = T_{xz}^{(j+1)}|_{z=z_j},$$

где

$$T_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right),$$

$$T_{xz} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right).$$

При рассмотрении перехода ПАВ из одной вертикально слоистой среды в другую в качестве инварианта использовалась величина потока энергии через вертикальное сечение [9], который выражается следующими образом:

$$P = \omega^2 c_g(\omega) \int_0^\infty \rho(z) [U_x^2 + U_z^2] dz =$$

$$= \omega^2 c_g(\omega) \sum_{i=1}^N \int_0^{h_i} \rho_j [U_{xj}^2 + U_{zj}^2] dz = \text{const}, \tag{5}$$

где c_g — групповая скорость ПАВ, U_x, U_z — амплитуды горизонтальной и вертикальной компоненты смещений. Подробный вывод этого выражения представлен в [9] и [19].

Если теперь рассмотреть две слоистые среды, то при подстановке выражений для компонент смещений как для первой, так и для второй среды поток энергии будет пропорционален квадрату некоторой нормировочной амплитуды, т.е.

$$P_1(\omega, c_l, c_t, \rho) = C_1(\omega, c_l, c_t, \rho) F_1^2,$$

$$P_2(\omega, c_l, c_t, \rho) = C_2(\omega, c_l, c_t, \rho) F_2^2,$$

$F_{1,2}$ — нормировочные амплитуды. Приравняв поток энергии для обеих сред $P_1(\omega, c_l, c_t, \rho) = P_2(\omega, c_l, c_t, \rho)$, получаем выражение для относительного изменения нормировочной амплитуды:

$$\frac{F_2}{F_1} = \sqrt{\frac{C_1(\omega, c_l, c_t, \rho)}{C_2(\omega, c_l, c_t, \rho)}}.$$

При подстановке получившегося отношения в выражения для компонент смещений (2) и полагая $z=0$, можно получить значения искомого изменения амплитуд компонент смещений на

поверхности. В данной работе рассматривается изменение вертикальной компоненты $W = U_z / U_{z_0}$. Нижний индекс 0 обозначает амплитуду ПАВ в опорной среде, без индекса — в исследуемой.

ОДНОСЛОЙНАЯ МОДЕЛЬ (ДЕМОНСТРАЦИЯ АНАЛИЗА)

Для демонстрации последующих рассуждений начнем с наиболее простой модели — переход из однослойной системы в однослойную, т.е. трансформации волны Рэлея. Параметры рассматриваемых сред для однослойной системы представлены в табл. 1. Выбранные упругие параметры соответствуют характерным для земной коры значениям, согласно модели PREM [22].

На рис. 2 представлена рассчитанная зависимость W_c относительной амплитуды вертикальной компоненты смещений на поверхности от коэффициента изменения скоростей продольных и поперечных волн (при этом коэффициент Пуассона изменялся в пределах от 0.15 до 0.35 [23], который характерен для геологических сред). Данную поверхность можно аппроксимировать плоскостью W_a , уравнение которой имеет вид: $W_a = 2.08 - 0.8K_{c_l} - 0.25K_{c_t}$ (рис. 2). Здесь K_{c_l}, K_{c_t} —

Таблица 1. Параметры опорной и исследуемой среды.

Модель	Скорость продольных волн, c_l , м/с	Скорость поперечных волн, c_t , м/с	Плотность, ρ , кг/м ³
Опорная	6181	3467	2714
Исследуемая	$6181 K_{c_l}$	$3467 K_{c_t}$	2714

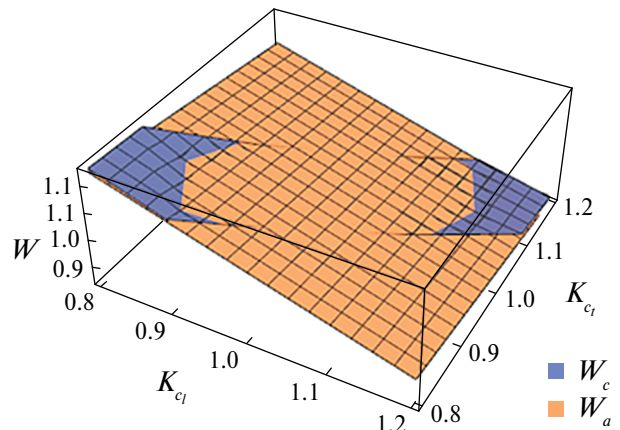


Рис. 2. Зависимость относительной амплитуды вертикальной компоненты смещений $W = U_z / U_{z_0}$ от коэффициентов изменения скорости продольных и поперечных волн; W_c — рассчитанная функция, W_a — функция плоскости, аппроксимирующей W_c .

коэффициенты изменения скорости продольных и поперечных волн соответственно, т.е. величины, отражающие отношение параметров в исследуемой и опорной среде. Выполним замену переменных $\xi = -0.8K_{c_1} - 0.25K_{c_1}$, ортогональная ξ функция имеет вид $\eta = 0.25K_{c_1} - 0.8K_{c_1}$. Переменные ξ, η образуют новую систему координат, в которой исходная функция W_a изменяется только вдоль оси ξ :

$$W_a = 2.08 + \xi. \tag{6}$$

Теперь введем интегральную невязку, т.е. величину, характеризующую относительную ошибку при аппроксимации исходной функции, следующим образом:

$$\delta = \int_{K_{c_1}}^{K_{c_2}} \int_{K_{c_1}}^{K_{c_2}} \left(\frac{W_c - W_a}{W_c} \right) dK_{c_1} dK_{c_2},$$

где $K_{c_1}, K_{c_2}, K_{c_1}, K_{c_2}$ — пределы изменения скорости поперечных и продольных волн, соответственно.

Далее усложним аппроксимирующую функцию (6), путем добавления членов более высокого порядка, т.е.

$$W_a = 2.08 + \xi + a\xi^2 + b\xi^3 + d\xi^4.$$

Это позволяет, во-первых, оставить зависимость от одной переменной и, во-вторых, улучшить точность аппроксимации. Перебирая значения коэффициентов a, b и d , можно добиться уменьшения невязки и получения лучшего соответствия аппроксимации и исходной функции (табл. 2):

Из табл. 2 можно сделать вывод о том, что более высокие порядки аппроксимации незначительно влияют на интегральную невязку. Поэтому в дальнейшем остановимся на линейной аппроксимации.

Поскольку в выражении W_a перед K_{c_1} стоит больший коэффициент, то наибольший вклад в изменение амплитуды на поверхности для однослойной системы вносит изменение скорости продольных волн, хотя известно, что скорость волны Рэлея преимущественно определяется скоростью поперечных волн [9]. Из этого следует, что поведение амплитуды при изменении упругих параметров среды носит принципиально иной характер,

Таблица 2. Зависимость интегральной ошибки от вида аппроксимирующей функции.

Аппроксимирующая функция	$\delta, \%$
$W_a = 2.08 + \xi$	0.176
$W_a = 2.08 + \xi - 0.003\xi^2$	0.174
$W_a = 2.08 + \xi - 0.09\xi^2 + 0.08\xi^3$	0.147
$W_a = 2.08 + \xi + 0.02\xi^2 - 0.11\xi^3 + 0.08\xi^4$	0.136

поэтому связать изменение амплитуды ПАВ с изменением лишь скорости поперечных волн нельзя. Для однослойной системы свойства волны не зависят от частоты. В случае же многослойной среды возникает дисперсия, поэтому необходимо рассмотреть вопрос о чувствительности волн разных частот к локальному изменению упругих параметров системы.

ДОМИНАНТНАЯ ДЛИНА ВОЛНЫ

Глубина локализации поверхностной волны определяется волновыми числами, зависящими от свойств среды. Благодаря этому можно осуществлять зондирование различных горизонтов, используя разные длины волн. При переходе из одной слоистой системы в другую волны разных длин будут по-разному реагировать на изменение упругих свойств среды. В частности, зависимость относительной амплитуды вертикальной компоненты смещений ПАВ на поверхности от частоты будет иметь экстремум (рис. 4), указывающий на волну с наибольшей чувствительностью, которая на практике представляет наибольший интерес. В ММЗ эту длину волны называют “эффективной” [14] или доминантной [13] и связывают с коэффициентом глубинной привязки, важным для построения профиля исследуемой среды. Значения этого коэффициента эмпирически [3], а впоследствии и численно [14], было оценены как 0.4–0.5. Однако в силу ресурсоемкости численного моделирования, не представлялось возможным рассмотреть большое количество моделей и влияния их параметров на значение этого коэффициента. Рассматриваемая модель плавного перехода [19] хотя и не учитывает возникающие обменные процессы, характерные для реальных ситуаций (поскольку подразумевает настолько медленно изменяющиеся по горизонтали параметры среды, что подобных эффектов не возникает), позволяет, во-первых, описать основной эффект, а именно, изменение амплитуды на поверхности над аномалиями скорости и, во-вторых, делать это аналитически, что позволяет рассматривать широкий круг различных моделей.

Поэтому для расширения представлений о зависимости коэффициента глубинной привязки или доминантной длины волны от параметров модели рассмотрим многослойную систему на примере перехода из пятислойной системы в пятислойную (табл. 3) при изменении параметров в каждом из слоев. Отметим, что диапазоны изменения выбраны так, чтобы система оставалась в рамках нормальной дисперсии, поскольку в настоящее время аналитический расчет амплитуды ПАВ при использовании упомянутого подхода возможен только для сред с нормальной дисперсией, что согласуется с большинством реальных в геофизической практике случаев.

Таблица 3. Параметры опорной ($i = 0$) и исследуемой ($i = 1$) среды; i — номер среды, j — номер слоя.

Скорость продольных волн, c_p , м/с	Скорость поперечных волн, c_t , м/с	Плотность, ρ , кг/м ³	Мощность слоя, H , км
6181 $K_{c_t}^{(i,j)}$	3467 $K_{c_t}^{(i,j)}$	2714 $K_{\rho}^{(i,j)}$	$H^{(i,j)}$

Поскольку разрешающая способность поверхностных волн напрямую связана с длиной волны, в выбранной модели мощности слоев увеличиваются с глубиной, причем обратно пропорционально частоте в соответствии с законом $H = c_R / f$, c_R — скорость волны Рэлея для материала верхнего слоя. Будет рассмотрено две системы: со слабым контрастом между слоями (со следующими значениями коэффициентов опорной среды: $K_{c_t}^{(0,1)} = K_{c_t}^{(0,1)} = 1$, $K_{c_t}^{(0,2)} = K_{c_t}^{(0,2)} = 1.02$, $K_{c_t}^{(0,3)} = K_{c_t}^{(0,3)} = 1.04$, $K_{c_t}^{(0,4)} = K_{c_t}^{(0,4)} = 1.06$, $K_{c_t}^{(0,5)} = K_{c_t}^{(0,5)} = 1.08$) и сильным (для которого $K_{c_t}^{(0,1)} = K_{c_t}^{(0,1)} = 1$, $K_{c_t}^{(0,2)} = K_{c_t}^{(0,2)} = 1.1$, $K_{c_t}^{(0,3)} = K_{c_t}^{(0,3)} = 1.2$, $K_{c_t}^{(0,4)} = K_{c_t}^{(0,4)} = 1.3$, $K_{c_t}^{(0,5)} = K_{c_t}^{(0,5)} = 1.4$).

На данном этапе будем изменять параметры исследуемой среды совместно, т.е. $K_{c_t}^{(1,j)} = K_{c_t}^{(1,j)} = K_c^{(1,j)}$; $K_{\rho}^{(i,j)} = 1$, $H^{(i,1)} = 6.4$, $H^{(i,2)} = 8$, $H^{(i,3)} = 10.5$, $H^{(i,4)} = 16$, $H^{(i,5)} = \infty$; $j = 1-5$. Далее для краткости индекс i , отвечающий за номер зоны, опущен.

Наибольший интерес представляет не абсолютное значение доминантной длины волны, а ее связь с геометрическими параметрами модели. Эту

связь выразим как $h = K_d \lambda_0$, где λ_0 — значение доминантной длины волны, h — координата середины зондируемого слоя, K_d — коэффициент глубинной привязки.

Отметим, что выколотые точки на рис. 3 соответствуют случаям, когда базовая и исследуемая среда тождественны друг другу и изменения амплитуды не происходит. В целом, рис. 3 и табл. 4 демонстрирует, что длина доминантной волны связана с глубиной залегания первых четырех слоев (случай пятого слоя будет рассмотрен далее), как для сильно-, так и слабоконтрастной модели посредством коэффициента, значение которого лежит в пределах от 0.23 до 0.3, при этом он увеличивается с увеличением контраста, что в целом согласуется с ММЗ, хотя и значение коэффициента глубинной привязки меньше, чем эмпирически оцененное ранее, что связано с особенностями геометрии модели, поскольку, как было показано [19], для других постановок он может достигать значения 0.4. Отметим также, что при более сильном контрасте диапазон изменения доминантной длины ожидаемо увеличивается. Таким образом, доминантная частота и соответствующая длина

Таблица 4. Зависимость коэффициента глубинной привязки от номера зондируемого слоя.

Слабый контраст		Сильный контраст	
Номер слоя	K_d	Номер слоя	K_d
1	0.26–0.28	1	0.23–0.27
2	0.3–0.31	2	0.26–0.29
3	0.29–0.3	3	0.24–0.27
4	0.29–0.31	4	0.23–0.34

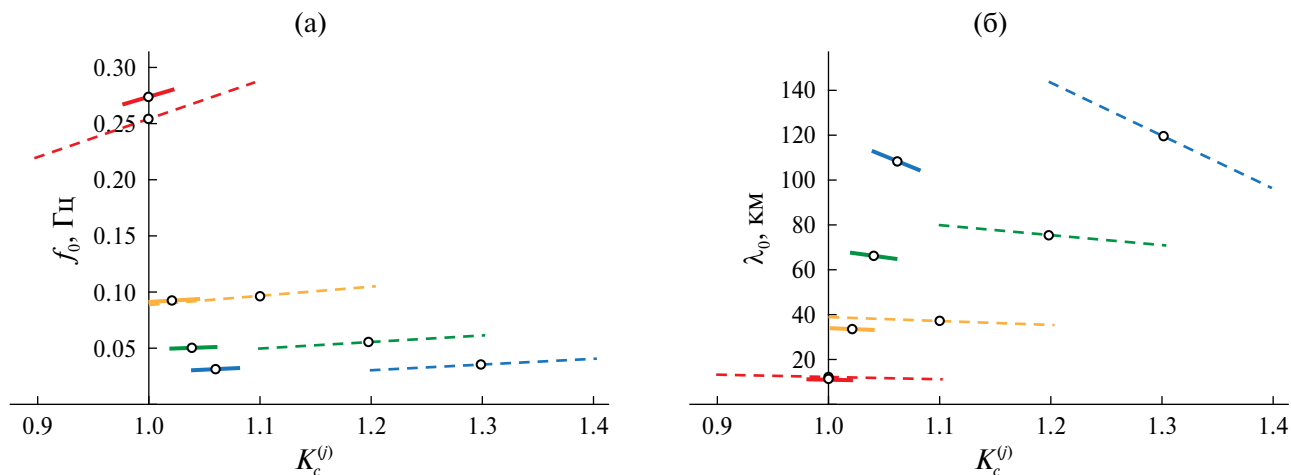


Рис. 3. Зависимость (а) — доминантной частоты и (б) — доминантной длины волны от коэффициента совместного изменения скоростей упругих волн в первом (красная линия; $j = 1$), втором (оранжевая линия; $j = 2$), третьем (зеленая линия; $j = 3$), четвертом (синяя линия; $j = 4$) слое для высокого (пунктирная линия) и низкого (сплошная линия) контраста между слоями.

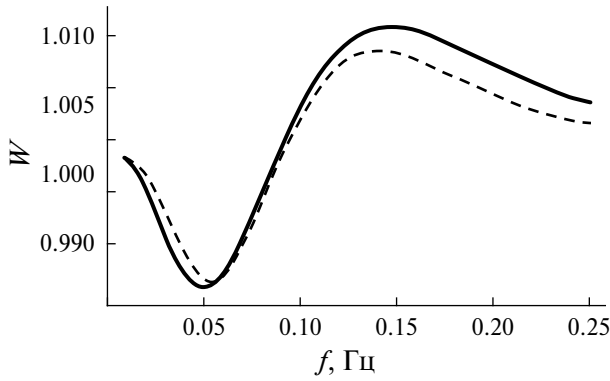


Рис. 4. Зависимость относительной амплитуды вертикальной компоненты смещений на поверхности от частоты для слабоконтрастной (сплошная линия) и сильноконтрастной (пунктирная линия) фоновой среды.

волны зависят как от упругих свойств системы, так и от ее геометрических параметров, указывая на то, что точность определения залегания неоднородности зависит от ее упругих свойств.

Теперь рассмотрим вопрос о влиянии фоновой (опорной) среды на зависимость амплитуды на поверхности от частоты. Для этого как для сильно-, так и слабоконтрастной фоновой модели в качестве возмущения увеличим параметры третьего слоя $K_{c_1}^{(1,3)}$ и $K_{c_2}^{(1,3)}$ в 1.02 раза. В таком случае относительный контраст между опорной и исследуемой средой как для первого, так и для второго вида фоновой среды будет одинаковым. Иными словами, для обоих случаев опорная и исследуемая среда отличаются лишь одинаковым образом увеличенным значением упругих параметров в третьем слое.

Из рис. 4 следует, что, хотя и контраст между опорной и исследуемой средой сохранился, вид частотных зависимостей является зависимым от свойств фоновой модели, т.е. амплитуда на поверхности является не функций контраста между опорной и исследуемой средой, а зависит непосредственно от значений упругих параметров. Иными словами, в общем случае отклик на поверхности нельзя рассматривать как функцию отношения упругих параметров в исследуемой и опорной среде $W(K_{c_1}, K_{c_2})$, а следует рассматривать как функцию этих параметров отдельно $W(c_{l_0}, c_{l_1}, c_{l_2}, c_{l_3})$.

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ К ИЗМЕНЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ МНОГОСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ

Теперь перейдем к рассмотрению чувствительности амплитуды к изменению упругих параметров отдельных слоев. Для краткости далее индекс j , отвечающий за номер слоя, опущен. Зафиксировав частоту и изменяя K_{c_1} и K_{c_2} , как было показано на

примере однослойной системы, можно построить соответствующие аппроксимирующие плоскости, отражающие относительный вклад этих коэффициентов в изменение амплитуды. Для каждой частоты уравнение аппроксимирующей плоскости будет отличаться, но общая структура останется неизменной: $W_a = W_0 + \xi$ ($\xi = C_1 K_{c_1} + C_2 K_{c_2}$). Значения коэффициентов C_1 и C_2 , с одной стороны, отражают относительный вклад изменения скоростей продольных и поперечных волн в изменение амплитуды, а с другой, величину этого изменения. Для большей наглядности введем величины α и β , которые задают ориентацию аппроксимирующей плоскости. α является углом между исходной системой координат $\{K_{c_1}, K_{c_2}\}$ и новой $\{\xi, \eta\}$ и отражает относительный вклад скоростей продольных и поперечных волн в изменение амплитуды, и выражается следующим образом:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\partial \xi / \partial K_{c_2}}{\partial \xi / \partial K_{c_1}}\right) = \arctg\left(\frac{C_2}{C_1}\right).$$

В областях, превышающих по модулю значение $\pi/4$, преобладает вклад K_{c_1} , в противоположном случае — K_{c_2} . При положительном значении угла вклад обоих скоростей имеет одинаковый знак, а при отрицательном — различный.

Угол β является углом между горизонтальной плоскостью и плоскостью W_a и демонстрирует величину изменения амплитуды, и выражается как:

$$\beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\partial W_a / \partial K_{c_1})^2 + (\partial W_a / \partial K_{c_2})^2}}\right)$$

или

$$\beta = \begin{cases} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_2^2}}\right), & C_1 + C_2 \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_2^2}}\right), & C_1 + C_2 < 0. \end{cases}$$

При положительном значении β амплитуда увеличивается при увеличении K_{c_1} и K_{c_2} , а при отрицательном — уменьшается.

Рассмотрим зависимости α и β , а также коэффициентов аппроксимации C_1 и C_2 от частоты (рис. 5). Рис. 5 демонстрирует, что в зависимости от частоты наблюдается довольно сложная картина относительных вкладов скоростей упругих волн в изменение амплитуды. На разных частотах может доминировать как вклад K_{c_1} , так и вклад K_{c_2} , при этом случаи второго, третьего и четвертого слоя схожи между собой и отличаются от случая первого и пятого слоя, что будет обсуждаться далее.

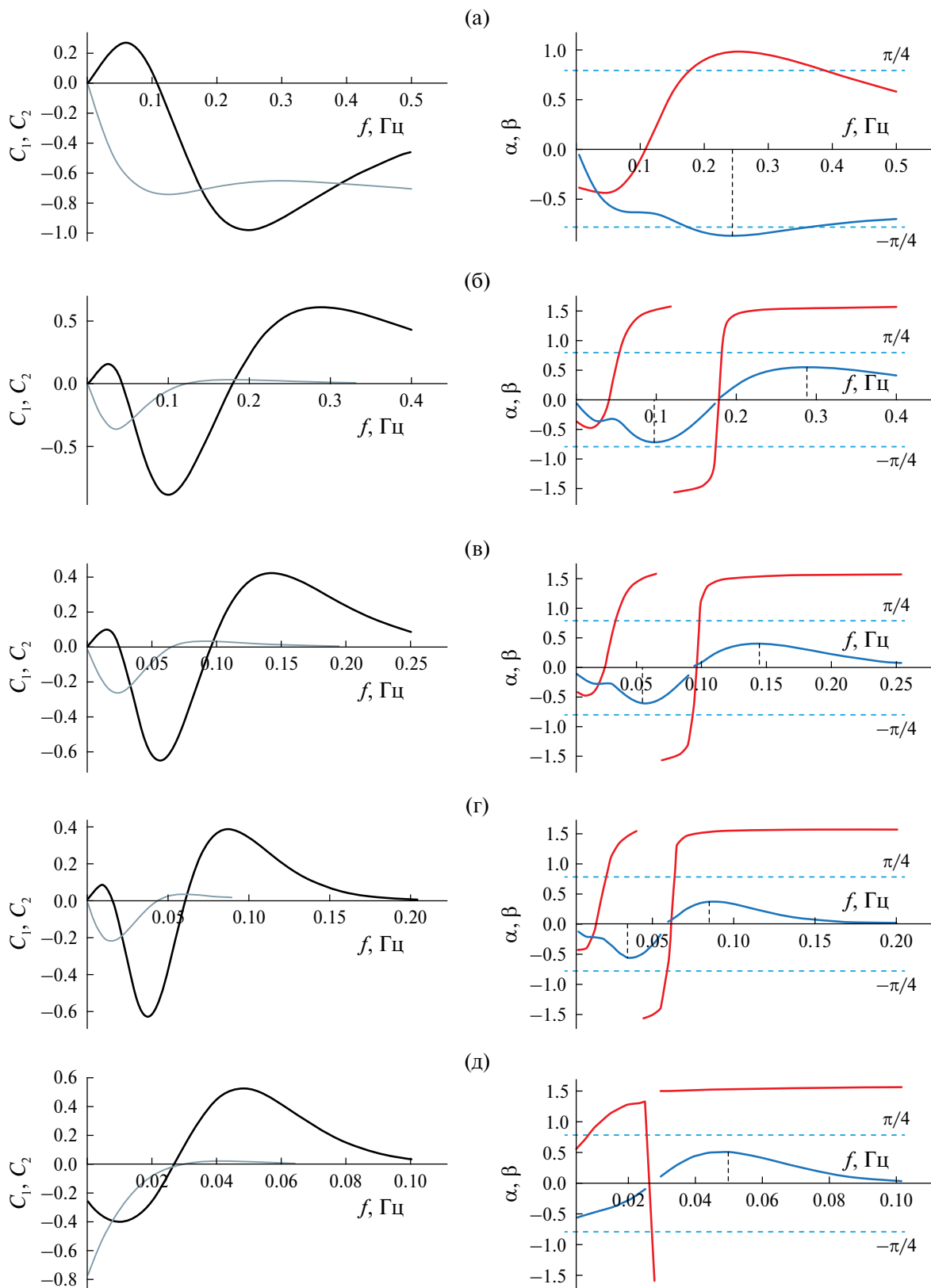


Рис. 5. Слева зависимость коэффициентов аппроксимации C_2 при K_c (черная линия) и C_1 при K_{c_1} (серая линия), справа зависимость угла α (красная линия) и угла β (синяя линия) при изменении параметров (а) — первого, (б) — второго, (в) — третьего, (г) — четвертого, (д) — пятого слоя от частоты; синяя горизонтальная штриховая линия — значение $\pm\pi/4$; серая вертикальная штриховая линия — обозначение доминантных частот.

Таблица 5. Доминантные частоты при изменении параметров отдельных слоев.

Номер слоя	Характерная доминантная частота, Гц	
	Низкая	Высокая
1	0.245	—
2	0.1	0.29
3	0.055	0.145
4	0.035	0.085
5	—	0.05

Из этого также следует, что трехслойную систему можно считать универсальной и использовать эту модель для исследования основных закономерностей в многослойных системах. Однако общая тенденция такова, что на низких частотах в основном преобладает вклад K_c , а на высоких K_c , исключение же составляет только случай первого слоя, что понятно, поскольку на высоких частотах система становится эквивалентна однородному полупространству. Также можно заметить, что у угла β наблюдаются экстремумы, указывающие на наиболее сильное изменение амплитуды и на соответствующие доминантные частоты (табл. 5). Отметим, что эти частоты являются некоторыми характерными величинами, поскольку следуют из зависимости угла наклона плоскости, а не строгой зависимости амплитуды на поверхности от частоты как на рис. 3 и рис 4. Однако можно заметить, что по значению они довольно близки с таковыми на рис. 3, что указывает на корректность такого описания. Для первого и пятого слоя наблюдается только один экстремум, в то время как для промежуточных слоев — два. Далее будет рассмотрена причина такого поведения. Кроме того, отметим, что рисунки справа имеют разрывы. У угла α он связан с тем, что $\partial \xi / \partial K_c = 0$ для этой частоты, а область разрыва для угла β , в свою очередь, означает, что функция не принимает значение равное нулю (а лишь приближается к нему), поскольку такая ситуация возможна, когда и $\partial W_a / \partial K_c = 0$, и $\partial W_a / \partial K_c = 0$, но для рассматриваемых случаев этого не возникает, что

демонстрируют рисунки слева. Иными словами, в этой области угол β испытывает скачок, связанный со сменой тенденции изменения амплитуды.

Аналогичные построения можно привести при изменении не только скоростей упругих волн, но также и плотности. В таком случае аппроксимирующая плоскость будет функцией трех переменных вида: $W_a = W_0 + \xi$ ($\xi = C_1 K_c + C_2 K_c + C_3 K_p$). Здесь коэффициент C_3 характеризует чувствительность волны к изменению плотности. Зависимости коэффициентов C_1 , C_2 и C_3 от частоты представлены на рис. 6.

Из рис. 6 следует, что вклад изменения плотности в изменение амплитуды является сопоставимым по величине с вкладом скоростей упругих волн. Отсюда следует, что при наиболее точной интерпретации, вклад этой величины также нельзя игнорировать. Кроме того, известно [9], что чувствительность скорости ПАВ к плотности существенно ниже, чем к скоростям упругих волн, в то время как чувствительность амплитуды к этой величине оказывается сопоставимой со скоростями, что открывает дополнительные возможности для амплитудных методов по сравнению со скоростными [27].

Отдельный интерес представляет частный случай фиксированного коэффициента Пуассона, поскольку в ранее проведенных исследованиях, основанных на численном моделировании [14], основное внимание было уделено именно этому случаю. Такой переход можно осуществить путем совместного изменения K_c и K_c . При этом функция $W_a = W_0 + \xi$ ($\xi = C_1 K_c + C_2 K_c$) станет зависимой только от одной переменной: $W_a = W_0 + C K_c$. Для единообразия будем описывать зависимость этой функции от частоты через изменение угла между прямой W_a и осью K_c , который выражается как $\beta = \arctg \left(\frac{\partial W_a}{\partial K_c} \right)$. Для сравнения ситуаций независимого и совместного изменения K_c и K_c необходимо рассмотреть зависимости этой величины от частоты (рис. 7).

Можно заметить, что зависимости на рис. 7 и 5 ожидаемо схожи, поскольку общий механизм

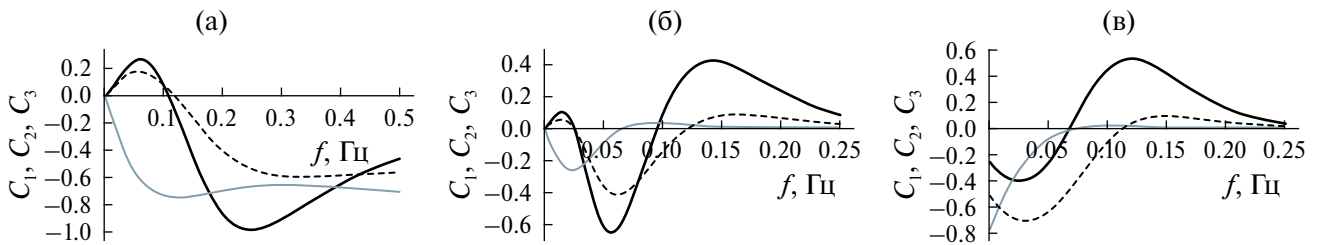


Рис. 6. Зависимость коэффициентов аппроксимации C_3 при K_p (черная штриховая линия), C_2 при K_c (черная сплошная линия) и C_1 при K_c (серая линия) от частоты.

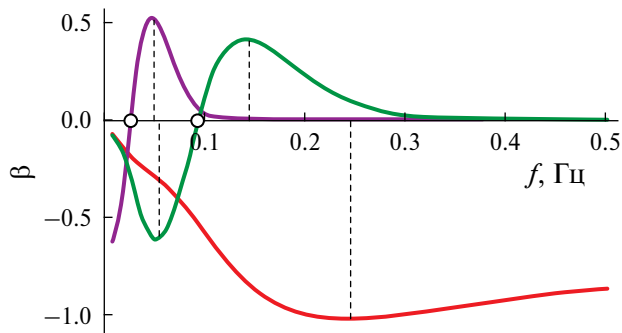


Рис. 7. Зависимость угла β между прямой W_a и осью K_c от частоты при изменении параметров первого (красная линия), третьего (зеленая линия) и пятого (фиолетовая линия) слоя; серая штриховая линия — обозначение доминантных частот.

остается прежним. Как и прежде, на определенной частоте амплитуда уменьшается с увеличением скоростей упругих волн в аномалии, хотя и наблюдаются случаи с противоположной тенденцией. Однако важно понимать, что при ограничении на фиксированное значение коэффициента Пуассона не представляется возможным определить, какой

из упругих параметров вносит определяющий вклад, хотя это напрямую влияет на интерпретацию результатов. Выколотые точки соответствуют той же ситуации разрыва для угла β , что и на рис. 5.

Для описания причины изменения амплитуды на поверхности рассмотрим поведение вертикальных профилей поверхностной волны на доминантных частотах для верхнего, среднего и нижнего слоя (полупространства) при изменении их упругих параметров (рис. 8). Рассматриваются только три слоя, исходя из выявленного подобия поведения амплитуды на поверхности при изменении свойств промежуточных слоев.

Поясним на примере третьего слоя, что, исходя из табл. 3, для серой линии $K_c^{(3)} = 1.1$, т.е. $c_l = 6799.1$ м/с, $c_t = 3813.7$ м/с; для цветной $K_c^{(3)} = 1.2$, т.е. $c_l = 7417.2$ м/с, $c_t = 4160.4$ м/с; для черной $K_c^{(3)} = 1.3$, т.е. $c_l = 8035.3$ м/с, $c_t = 4507.1$ м/с. Для остальных слоев аналогично.

Рис. 8 демонстрирует, что изменение амплитуды на поверхности связано с перераспределением энергии в профиле волны. При зондировании верхнего и среднего слоя при, скажем, увеличении скоростей упругих волн в них амплитуда ниже этих

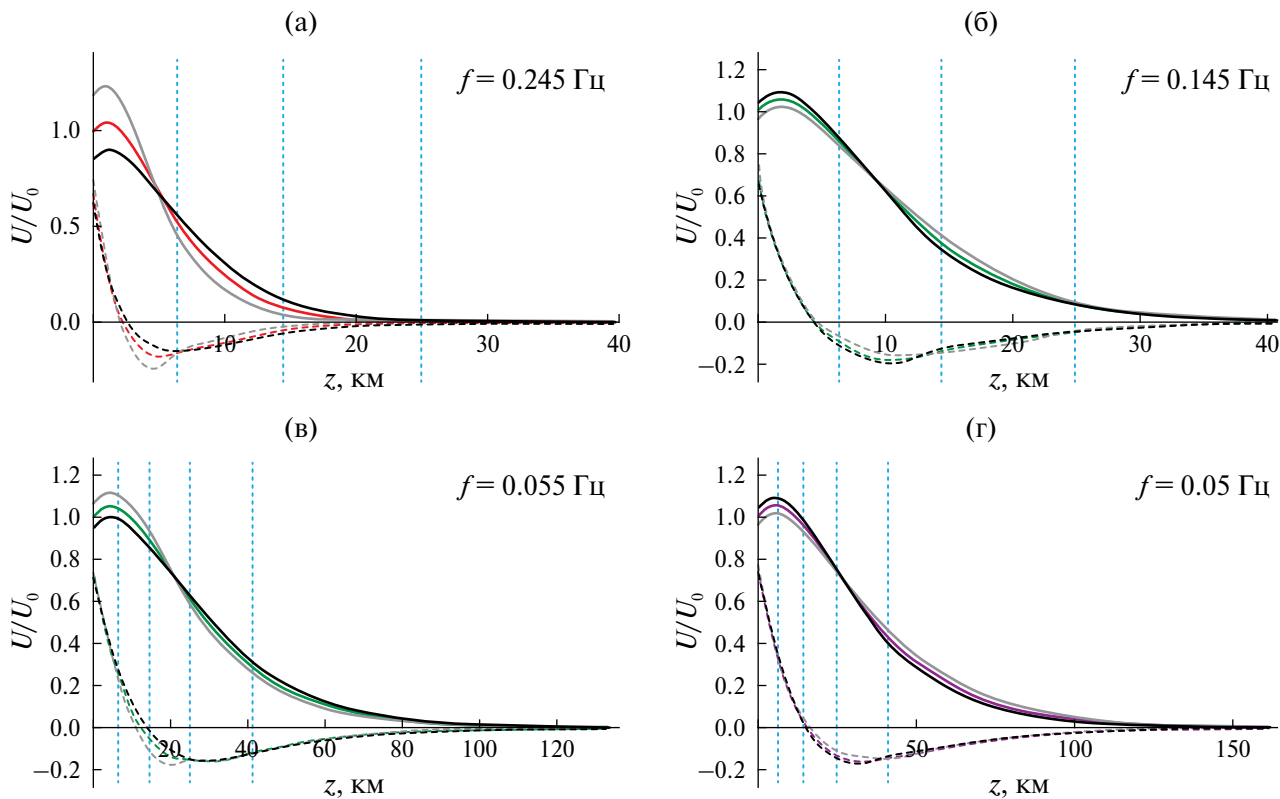


Рис. 8. Профили вертикальной (сплошная линия) и горизонтальной (штриховая линия) компонент смещений на доминантных частотах для (а) — первого ($f = 0.245$ Гц), (б) — третьего на высокой доминантной частоте ($f = 0.145$ Гц), (в) — третьего на низкой доминантной частоте ($f = 0.055$ Гц) и (г) — пятого ($f = 0.05$ Гц) слоя; цветная линия — опорная среда, черная — возмущенная среда при увеличении на 10% скоростей упругих волн в зондируемом слое, серая — возмущенная среда при уменьшении на 10% скоростей упругих волн в зондируемом слое; синий пунктир — границы слоев.

слоев локально увеличивается, а на поверхности — уменьшается. Для нижнего слоя ситуация иная: при увеличении скоростей упругих волн амплитуда в нем уменьшается, а на поверхности, соответственно, увеличивается.

Напомним, что для верхнего и нижнего слоя наблюдается лишь одна доминантная частота, а для промежуточных — две, причем изменение амплитуды на этих частотах противоположное. Проиллюстрировать причину такого поведения можно из следующих соображений: для верхнего и нижнего слоя, как следует из рис. 8, изменение параметров зондируемого слоя приводит к изменению амплитуды на глубине и к соответствующему изменению амплитуды на поверхности. Для среднего слоя для более длинной зондирующей волны ситуация аналогичная случаю первого слоя, а для более короткой волны, которая воспринимает третий слой эффективно как полупространство, ситуация аналогична случаю пятого слоя. Таким образом, доминантные частоты при изменении параметров верхнего и нижнего слоя представляют собой предельные случаи доминантных частот промежуточных слоев при стремлении упругих свойств промежуточного слоя к свойствам верхнего и нижнего слоя соответственно. Этим и объясняется наличие двух доминантных длин волн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе модели плавного перехода проанализирована чувствительность амплитуды поверхностной волны к изменению скоростей продольных и поперечных волн, а также плотности в многослойной системе и получены следующие результаты:

1. На примере однослойной системы продемонстрирован подход к анализу чувствительности амплитуды на поверхности к изменению скоростей упругих волн в среде.

2. Значение доминантной длины волны для многослойной системы существенно изменяется в зависимости от упругих параметров, что напрямую влияет на точность определения глубины залегания неоднородности по этой величине.

3. Хотя ММЗ не чувствителен к слоистой структуре фоновой среды, ее свойства влияют на результирующие зависимости относительной амплитуды на поверхности от частоты.

4. На доминантной частоте, принятой в ММЗ, наибольший вклад в изменение амплитуды вносит изменение скорости поперечных волн, в то время как на некоторых других частотах вклад скорости продольных волн и плотности нельзя игнорировать.

5. Наличие второй доминантной частоты, на которой наблюдается обратный относительно ММЗ эффект, важно учитывать при интерпретации результатов для исключения выявления ложных аномалий.

6. В случае постоянного коэффициента Пуассона продемонстрирован механизм изменения амплитуды на поверхности на основе анализа профиля поверхностной волны.

Исходя из полученных результатов, можно заключить, что интерпретация данных ММЗ на основе коэффициента глубинной привязки и ограничение на постоянное значение коэффициента Пуассона может существенно влиять на итоговые результаты [24–26], поэтому для большей корректности и повышения точности обработки данных необходима процедура инверсии. Это дополнительно обуславливает факт зависимости относительной амплитуды от вида фоновой среды.

Работа выполнена в рамках Государственного задания ИФЗ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Park C., Miller R., Xia J. Multichannel analysis of surface waves // *Geophysics*. 1999. V. 64. № 3. P. 800–808.
2. Okada H. Theory of efficient array observation of microtremors with special reference to the SPAC method // *Exploration geophysics*. 2006. V. 37. № 1. P. 73–85.
3. Горбатиков А.В., Барабанов В.Л. Опыт использования микросейсм для оценки состояния верхней части земной коры // *Физика Земли*. 1993. № 7. С. 85–90.
4. Nakamura Y. A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface // *QR of RTRI*. 1989. V. 30. № 1. P. 25–33.
5. Presnov D.A., Sobisevich A.L., Shurup A.S. Model of the Geoacoustic Tomography Based on Surface-type Waves // *Physics of Wave Phenomena*. 2016. V. 24. № 3. P. 249–254.
6. Преснов Д.А., Жостков Р.А., Гусев В.А., Шуруп А.С. Дисперсионные зависимости упругих волн в покрытом льдом мелком море // *Акуст. журн.* 2014. Т. 60. № 4. С. 426–436.
7. Лебедев А.В., Манаков С.А. Точность оценки параметров слоистой среды при использовании когерентного векторного приема поверхностной волны Рэлея // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 1. С. 68–82.
8. Жэн Б.-С., Лу Л.-Ю. Нормальные волны в слоистом упругом полупространстве // *Акуст. журн.* 2003. Т. 49. № 4. С. 501–513.
9. Яновская Т.Б. Поверхностно-волновая томография в сейсмологических исследованиях. М.: Наука, 2015. 164 с.
10. Оливер А. Поверхностные акустические волны. М.: Мир, 1981. 390 с.
11. Жостков Р.А., Преснов Д.А., Шуруп А.С., Собисевич А.Л. Сравнение микросейсмического зондирования и томографического подхода при изучении глубинного строения Земли // *Изв. Росс. Акад. наук. Сер. физ.* 2017. Т. 81. № 1. С. 72–75.

12. *Malischewsky P., Scherbaum F.* Love's Formula and H/V-ratio (Ellipticity) of Rayleigh Waves // *Wave Motion*. 2004. V. 40. № 1. P. 57–67.
13. *Собисевич А.Л., Преснов Д.А.* О решении прямой задачи для определения параметров волн рэлеевского типа в слоистой геофизической среде // *Докл. Рос. Акад. наук. Науки о Земле*. 2020. Т. 492. № 2. С. 72–76.
14. *Горбатилов А.В., Цуканов А.А.* Моделирование волн Рэлея вблизи рассеивающих скоростных неоднородностей. Изучение возможностей метода микросейсмического зондирования // *Физика Земли*. 2011. № 4. С. 96–112.
15. *Яновская Т.Б.* К теории метода микросейсмического зондирования // *Физика Земли*. 2017. № 6. С. 18–23.
16. *Разин А.В., Собисевич А.Л.* Геоакустика слоистых сред. М.: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук, 2012. 210 с.
17. *Лебедев А.В., Манаков С.А., Дубовой Д.В.* Рассеяние волн Рэлея на приповерхностном включении в упругом полупространстве // *Известия вузов. Радиофизика*. 2023. Т. 66. № 5–6. С. 483–504.
18. *Li S., Huang M., Song Y., Bo Lan, Li X.* Theoretical and numerical modeling of Rayleigh wave scattering by an elastic inclusion // *J. Acous. Soc. Am.* 2023. V. 153. № 4. P. 2336–2350.
19. *Жостков Р.А., Жарков Д.А.* Амплитудные характеристики волн рэлеевского типа в горизонтально-неоднородных слоистых средах // *Акуст. журн.* 2024. Т. 70. № 6. С. 907–920.
20. *Бреховских Л.М.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
21. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 288 с.
22. *Dziewonski A., Anderson D.* Preliminary Reference Earth Model // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 1981. V. 25. P. 297–356.
23. *Атанян В.Г., Пель А.Н., Темников А.И.* Сопротивление материалов. Базовый курс. Дополнительные главы. М.: Новосибирский государственный технический университет (НГТУ), 2011. 508 с.
24. *Gorbatikov A.V., Montesinos F.G., Arno J., Stepanova M.Y., Benavent M., Tsukanov A.A.* New Features in the Subsurface Structure Model of El Hierro Island (Canaries) from Low-Frequency Microseismic Sounding: An Insight into the 2011 Seismo-Volcanic Crisis // *Surveys in Geophysics*. 2013. V. 6. № 4. P. 463–489.
25. *Овсюченко А.Н., Горбатилов А.В., Рогожин Е.А., Андреева Н.В., Степанова М.Ю., Ларьков А.С., Сысолин А.И.* Микросейсмическое зондирование и активные разломы керченско-таманского региона // *Физика Земли*. 2019. № 6. С. 84–95.
26. *Кугаенко Ю.А., Салтыков В.А., Горбатилов А.В., Степанова М.Ю.* Особенности глубинного строения зоны трещинных Толбачинских извержений (Камчатка, Ключевская группа вулканов) по комплексу геолого-геофизических данных // *Физика Земли*. 2018. № 3. С. 60–83.
27. *Цуканов А.А., Горбатилов А.В.* О возможности обнаружения в поле поверхностных волн геологических тел, не имеющих скоростного контраста // *Акуст. журн.* 2025. № 2. С. 273–283.

Sensitivity of the amplitude of a rayleigh type wave on a surface to changes in the parameters of an inhomogeneous medium

R. A. Zhostkov^{a,*}, D. A. Zharkov^{a,**}

^a*Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences,
B. Gruzinskaya st., 10, build. 1, Moscow, 123242 Russia*

^{*}*e-mail: shageraxcom@yandex.ru*

^{**}*e-mail: denis.Zharkov2014@yandex.ru*

The sensitivity of the amplitude on the surface of a surface acoustic wave (SAW) to a change in the elastic parameters of a layered half-space with a smooth change in its elastic parameters horizontally is considered. The cases of wave transition from a single-layer system to a single-layer system and from a multilayer to a multilayer system are analyzed using the example of a five-layer system with an independent change in the velocities of longitudinal and transverse waves in the layers. It is shown that the properties of the reference medium affect the resulting dependences of the relative amplitude on the frequency. The sensitivity of the wave amplitude to local changes in parameters in a multilayer system varies significantly depending on the frequency. In the case of a constant Poisson's ratio, the mechanism of amplitude variation on the surface is demonstrated based on the analysis of the surface wave profile.

Keywords: surface acoustic wave, Rayleigh wave, layered medium, mathematical modeling, MSM, dominant wavelength