АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2025, том 71, № 4, с. 504–520

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 51-73; 532.3; 532.59; 534-14

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ТРЕХМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ОСОБЕННОСТЯМИ В ПРИЛОЖЕНИИ К ВОЛНОВЫМ ЯВЛЕНИЯМ

© 2025 г. А. В. Шанин[a], А. Ю. Лаптев[a,*]

[a]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, Москва, ГСП-1, 119991 Россия*

**e-mail: laptev97@bk.ru*

Поступила в редакцию 30.04.2025 г.
После доработки 30.04.2025 г.
Принята к публикации 24.06.2025 г.

Рассматривается трехмерный интеграл типа Фурье, в экспоненциальном множителе которого стоит произведение некоторой фазовой функции и большого параметра. Ищется асимптотика этого интеграла при стремлении большого параметра к бесконечности. В одномерном случае асимптотика такого интеграла строится по точкам стационарной фазы и сингулярностям подынтегральной функции. Трехмерный случай оказывается более сложным: вклад в асимптотику могут давать такие особые точки, как точки стационарной фазы в пространстве, на сингулярности, на пересечении сингулярностей, точки тройного пересечения сингулярностей, а также конические точки сингулярностей. Для всех этих типов особых точек построены топологические условия существования ненулевых асимптотик и выведены сами асимптотики. Предлагаемая техника опробована на примере классической задачи о волнах Кельвина на поверхности глубокой жидкости за буксируемым телом.

Ключевые слова: метод стационарной фазы, многомерный комплексный анализ, асимптотические методы, волны Кельвина

DOI: 10.31857/S0320791925040022, **EDN:** VOPOIE

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие волновые явления удается описать интегралами, близкими по форме к многомерным интегралам Фурье. В частности, такими интегралами могут быть разложения по плоским волнам (спектральные представления). Соответственно, для понимания волновых явлений требуется техника построения асимптотических оценок таких интегралов. Для одномерных интегралов таким методом является метод стационарной фазы, предложенный Кельвином [1], или родственный ему метод перевала. Для многомерных интегралов в некоторых случаях работает многомерный метод перевала, описанный в [2], но имеется ряд задач, к которым стандартные методы применить нельзя. К ним относятся интегралы, подынтегральные выражения которых содержат сингулярности. Для таких задач в двумерном случае в серии статей [3–5] был предложен наглядный метод, обобщающий метод стационарной фазы в изложении Пуанкаре [6] на двумерные интегралы. В [3] данный метод был применен к задаче импульсного возбуждения в водоеме со слоем льда сверху. В [5] метод был применен к задаче распространения волны в периодической структуре, что может представлять пользу при исследовании свойств метаматериалов. Метод также возможно использовать при решении классических задач дифракции, например, дифракции на четверти плоскости.

Эта статья продолжает серию статей, описанную выше. Это первая статья в серии, где метод обобщается на трехмерный случай. Идея метода при этом остается прежней, но количество типов особых точек существенно возрастает. Метод, как для двумерных, так и для трехмерных интегралов, может быть применен к большому количеству задач, например, к классу задач переходного акустического излучения (ПАИ) [7–9].

Как известно, изложение Пуанкаре в одномерном случае сводится к тому, что контур интегрирования немного смещается с действительной оси в комплексную область с тем расчетом, чтобы подынтегральная функция стала почти везде экспоненциально малой. Точка стационарной фазы при этом превращается в точку перевала (ниже мы не различаем точки стационарной фазы и перевала).

Похожую процедуру мы проделываем в трехмерном случае. Естественно, возникают топологические сложности при описании деформации объема интегрирования и проверке того, что объем интегрирования не пересекает сингулярность. Этому в основном и посвящена данная работа.

Преимуществом нашего подхода является то, что, хотя деформации объема интегрирования достаточно сложны и происходят в трехмерном *комплексном* (т.е. шестимерном) пространстве, анализ особых точек удается провести, рассматривая только пересечения сингулярностей с трехмерным *действительным* пространством, то есть достаточно наглядно.

Мы показываем, что в общем случае (почти для всех значений параметров) работает принцип локальности: асимптотическая оценка интеграла строится как сумма нескольких вкладов от особых точек. Наше рассмотрение двумерных задач, а также стандартный одномерный анализ, показывает, что такого рода оценка имеет не только математический, но и физический смысл. А именно, каждый из полученных вкладов от особых точек, с точностью до очевидных симметрий в пространстве переменных интегрирования, соответствует одному из типов волн, присутствующих в системе.

Данная работа мотивирована классической задачей о волнах Кельвина на поверхности глубокой жидкости. Впервые данная задача описывается в лекции, прочитанной Кельвиным в 1887 г. (опубликованная версия в [10]). Хотя в опубликованной версии лекции нет формул, утверждается, что волновая картина, формирующаяся за кормой корабля, возникает между двумя линиями, начинающимися в носе корабля и проходящими под равным углом $\operatorname{arctg}(1/2\sqrt{2}) \approx 19°28'$ к следу корабля. Этот угол известен как угол Кельвина.

Позднее, в 1906 году Кельвин написал статью [11], в которой он более подробно проанализировал корабельные волны. В частности, было получено первое интегральное представление для смещения водной поверхности, вызванного возмущением, движущимся с постоянной скоростью. Это исследование далее было продолжено в [12, 13].

В книге [14] подробно исследуются переходные волны в воде. Получены формулы для потенциала скорости и смещения поверхности в приближении глубокой воды, вызванных возмущениями, возникающими на поверхности. Формулы были проанализированы с помощью метода стационарной фазы. Также проведена линеаризация задачи. Похожий анализ проведен в [15].

В работе [16] анализируются переходные корабельные волны, распространяющиеся от движущегося тела. С помощью метода, описанного в [15], получается интегральное представление для потенциала скорости и смещения поверхности в системе координат, связанной с движущимся телом. И потенциал, и смещение представляются в виде суммы двух членов: первый соответствует стационарной волне, второй — переходной.

Данная работа обладает следующей структурой. В разделе 2 формулируются типы интегралов и основные предположения об этих интегралах, которые должны выполняться при использовании нашего подхода. В разделе 3 вводятся понятия *желаемой* и *разрешенной* деформации действительных трехмерных объемов интегрирования в комплексное пространство. В разделе 4 описываются обходы особенностей исходным объемом. В разделе 5 формулируется принцип локальности (т.е. принцип, согласно которому полный интеграл может быть сведен к сумме вкладов от нескольких особых точек). В разделе 6 описываются точки, которые *не* дают вклад в оценку интеграла. В разделе 7 описываются точки, дающие вклад в оценку интегрирования. Получаются старшие члены асимптотического ряда для данных точек. В разделе 8 обсуждается влияние границы объема интегрирования. В разделе 9 вышеописанный подход используется для нахождения асимптотик трехмерного интегрального представления для смещения поверхности жидкости, вызванного движением тела по ее поверхности с постоянной скоростью.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Будем рассматривать интеграл

$$u(z;\Lambda) = \int_\Gamma F(\xi)\exp\{i\Lambda G(\xi;z)\}d\xi, \tag{1}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — тройка комплексных переменных интегрирования, $z = (z_1, z_2, z_3)$ — пространственные или временные действительные координаты, играющие роль параметров в интеграле, Λ — большой действительный положительный параметр, Γ — достаточно регулярная ориентированная область действительной размерности 3 (объем интегрирования),

$$d\xi = d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3. \tag{2}$$

Нашей задачей будет построить оценку интеграла (1) при $\Lambda \to \infty$, удержав все члены, не убывающие с Λ экспоненциально. Функцию G будем называть *фазовой функцией* интеграла. Асимптотическое рассмотрение будем проводить при фиксированных параметрах z, поэтому для краткости будем заменять $u(z;\Lambda)$ на $u(\Lambda)$, а $G(\xi;z)$ на $G(\xi)$.

В простейшем случае интеграл изначально берется по действительному трехмерному пространству, что дает $\Gamma = \mathbb{R}^3$, $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$. Мы будем рассматривать деформации Γ в комплексном пространстве, что заставляет использовать форму объема (2). Как известно [17], эта форма есть функция от трех векторных переменных, определяющая

объем параллелепипеда, натянутого на тройку малых комплексных векторов (v^1, v^2, v^3) в пространстве ξ:

$$d\xi(v^1, v^2, v^3) = dV = \det\begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где под знаком определителя стоят соответствующие комплексные координаты векторов. Данная формула важна не только с теоретической точки зрения, но и позволяет осуществлять численное интегрирование в комплексном пространстве.

Введем в пространстве $\mathbb{C}^3$ переменных ξ малую трубчатую окрестность действительного пространства:

$$\mathbb{R}^3_\delta = \left\{\xi \in \mathbb{C}^3 : \left|\mathrm{Im}[\xi_{1,2,3}]\right| < \delta\right\}$$

для некоторого малого положительного δ. Будем считать, что $\Gamma \subset \mathbb{R}^3_\delta$.

Сделаем ряд предположений об исходном интеграле (1). Будем полагать, что:

• Функции $F(\xi)$ и $G(\xi)$ аналитичны в $\mathbb{R}^3_\delta$, т.е. голоморфны в этом множестве за исключением сингулярностей (полюсных множеств и множеств ветвления) и аналитически продолжаются вокруг множеств ветвления. В примерах мы будем брать в качестве F и G алгебраические функции ξ.

• Сингулярности функций $F(\xi)$ и $G(\xi)$ лежат на *аналитических множествах* комплексной размерности 2 и действительной размерности 4. Иными словами, компоненты сингулярностей, которые мы будем обозначать как σ_j, определяются уравнениями

$$\sigma_j = \left\{\xi \in \mathbb{C}^3 : g_j(\xi) = 0\right\}, \quad (4)$$

где g_j — функции, голоморфные в $\mathbb{R}^3_\delta$. Отметим, что практический интерес будут представлять только особенности функции F. Комплексное уравнение $g_j(\xi) = 0$ представляет собой два действительных (на действительную и мнимую части), что и дает коразмерность 2 для сингулярности.

• Сингулярности обладают *свойством действительности*, а именно функции g_j, введенные выше, действительны при действительных ξ. Вследствие этого пересечения компонент множества особенностей σ_j с действительным пространством $\mathbb{R}^3$

$$\sigma'_j \equiv \sigma_j \cap \mathbb{R}^3$$

представляют собой множества размерности 2 (поверхности).

• Почти везде мы будем считать, что сингулярности σ_j представляют собой достаточно регулярные множества в $\mathbb{R}^3_\delta$. Это гарантируется условием

$$\nabla g_j(\xi) \neq \mathbf{0}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^3_\delta. \quad (5)$$

Градиент везде определяется как

$$\nabla f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f}{\partial \xi_2}, \frac{\partial f}{\partial \xi_3}\right).$$

Для голоморфной функции $f(\xi)$ одни и те же значения получаются, если считать частные производные в $\mathbb{C}^3$ по комплексным переменным, или если ограничить функцию на $\mathbb{R}^3$ и считать производные по действительным переменным.

Исключением из правила (5) будет рассмотрение конической точки сингулярности.

• Исходный объем интегрирования Γ близок к действительному объему $\mathbb{R}^3$. Кроме того, Γ не пересекается с особенностями σ_j.

• В точках $\xi \in \mathbb{R}^3$ функция $G(\xi; z)$ действительна или имеет положительную мнимую часть.

• Функции F и G таковы, что о сходимости интеграла на бесконечности можно не беспокоиться.

Второе условие является общим случаем поведения особенностей голоморфных функций, а третье условие накладывает существенное ограничение. Из третьего условия, в частности, следует, что $\nabla g_j(\xi)$ — действительный вектор при действительных ξ.

Предположения о голоморфности функций, входящих в подынтегральное выражение, позволяют применять многомерную теорему Коши. А именно, мы будем использовать тот факт, что, если непрерывная деформация объема интегрирования не зацепляет сингулярности σ_j, то значение интеграла по деформированному объему такое же, как по исходному. Объемы интегрирования играют здесь ту же роль, что контура интегрирования в одномерном комплексном анализе. Как известно, деформация контуров — основной инструмент построения асимптотик одномерных интегралов.

В качестве примера функции G можно привести

$$G(\xi) = G(\xi; z) = \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 \quad (6)$$

(такой выбор соответствует обычному трехмерному интегралу Фурье).

В качестве примеров функции $F(\xi)$ можно рассмотреть

$$F(\xi) = \frac{1}{\xi_1 - \xi_2 - \xi_3}$$

для полюсной особенности и

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_2^3}}$$

для множества ветвления. В первом примере имеется особенность σ, определяемая функцией

$$g(\xi) = \xi_1 - \xi_2 - \xi_3,$$

а во второй —

$$g(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2.$$

Очевидно, что в обоих случаях σ — четырехмерные многообразия, а пересечения $\sigma \cap \mathbb{R}^3$ — двумерные поверхности.

3. СХЕМА МЕТОДА. ОПИСАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ОБЪЕМА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Для построения асимптотической оценки интеграла (1) будем следовать работам [3–5]. Построим непрерывную деформацию объема Γ в некоторый новый объем $\Gamma' \subset \mathbb{R}^3_\delta$ такой, что

$$\operatorname{Im}\left[G(\xi)\right] > 0 \tag{7}$$

при всех $\xi \in \Gamma'$, кроме окрестностей нескольких *особых точек* (эти точки будут определены позднее). Деформацию проделаем таким образом, чтобы в процессе деформации не задевались сингулярности подынтегральной функции. Очевидно, в оценку интеграла при больших Λ вклад дают только окрестности особых точек.

Опишем объем интегрирования Γ как множество точек, параметризованное действительными частями ξ_j, а именно

$$\begin{gathered}\Gamma = \Big\{\xi \in \mathbb{R}^3_\delta : \operatorname{Im}[\xi_j] = \\ = \eta_j\left(\operatorname{Re}[\xi_1], \operatorname{Re}[\xi_2], \operatorname{Re}[\xi_3]\right), j = 1,2,3\Big\},\end{gathered} \tag{8}$$

где η_j — малые непрерывные функции трех действительных переменных. Функции η_j описывают смещение объема интегрирования с $\mathbb{R}^3$. Очевидно, деформировать имеет смысл только участки Γ, на которых исходные значения $\operatorname{Im}[G]$ не являются положительными.

Для удобства будем полагать, что функции η_j являются еще и сколь угодно “пологими”, т.е. что производные η_j по координатам малы по сравнению с самими функциями. За деталями отсылаем к работе [4], где корректно введено понятие *сплющиваемой* (flattable) поверхности интегрирования.

Объединим функции η_j в вектор:

$$\eta(\operatorname{Re}[\xi]) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3).$$

Для описания деформации объема интегрирования введем действительную переменную $\tau \in [0,1]$ и рассмотрим функции η, непрерывно зависящие от τ как от параметра:

$$\eta_j = \eta_j(\operatorname{Re}[\xi];\ \tau).$$

Это дает возможность определить непрерывное семейство объемов интегрирования $\Gamma(\tau)$. Будем полагать, что в начальный момент деформации $\Gamma(0) = \Gamma$, а в конечный момент $\Gamma(1) = \Gamma'$.

Деформации, которые приводят к тому, что выполняется неравенство (7), будем называть *желаемыми*, а деформации, в ходе которых объем интегрирования не пересекает сингулярности подынтегральных функций, назовем *разрешенными*. Особые точки — это точки, в окрестности которых не существует желаемой и разрешенной деформации Γ.

Если в действительной точке ξ значение $G(\xi)$ действительно, а градиент $\nabla G(\xi)$ ненулевой, то условие (7) для малых η переписывается как

$$\nabla G(\xi) \cdot \eta(\xi) > 0 \tag{9}$$

(точка означает скалярное произведение векторов, вычисляемое по обычным правилам: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$).

4. ОБХОД ИСХОДНЫМ ОБЪЕМОМ Γ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ σ_j

Пусть точка $\xi^* \in \mathbb{R}^3$ (звездочка *не* означает комплексное сопряжение) принадлежит сингулярности σ_j и не принадлежит никакой другой сингулярности. Пусть D — окрестность ξ^* в $\mathbb{C}^3$. Рассмотрим, каким образом поверхность Γ может располагаться рядом с σ_j в D. Прежде всего, покажем, что можно сконструировать поверхность, не пересекающую σ_j.

Пусть в D вектор $\partial g_j \,/\, \partial \xi_1 \neq 0$. Сделаем в D замену переменных

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to (w_1, w_2, w_3),$$

где

$$\begin{aligned} w_1 &= g_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ w_2 &= \xi_2 - \xi_2^*, \\ w_3 &= \xi_3 - \xi_3^*. \end{aligned}$$

В новых координатах действительный объем переходит в действительный объем, а сингулярность σ_j приобретает вид $w_1 = 0$.

Фрагмент Γ в окрестности D может быть построен одним из двух способов: как

$$\Gamma_+ = \hat{\gamma}_+ \times [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$$

или как

$$\Gamma_- = \hat{\gamma}_- \times [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Здесь $\hat{\gamma}_\pm$ — контура, обходящие точку $w_1 = 0$ сверху и снизу (см. рис. 1), а $[-\varepsilon, \varepsilon]$ — небольшие фрагменты действительной оси переменных w_2 и w_3. В произведениях выше предполагается, что первый контур относится к переменной w_1, второй — к переменной w_2, а третий — к переменной w_3.

Можно показать (это нетривиальное утверждение, которое мы оставим здесь без доказательства), что любой другой объем, не пересекающий σ_j и совпадающий с $\mathbb{R}^3$ вне окрестности σ_j, может быть локально деформирован в Γ_+ или Γ_-. Это означает, что существует лишь два способа обойти объемом интегрирования сингулярность σ_j.

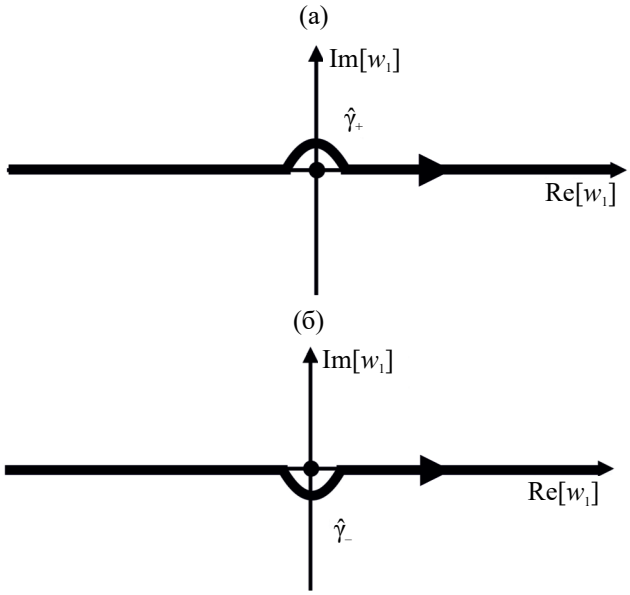

Рис. 1. Контура $\hat{\gamma}_+$ и $\hat{\gamma}_-$.

Два указанных способа заменяют обходы “сверху” и “снизу” из одномерного комплексного анализа. Корректно говорить, что Γ_+ обходит сингулярность σ_j сверху *в переменных* (w_1, w_2, w_3), а Γ_- обходит ее *в этих переменных* снизу. При этом предполагается, что сингулярность соответствует $w_n = 0$ для одной из переменных.

Опишем Γ действительной малой векторной функцией $\eta(\xi) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ (см. (8)). Выполняется следующее утверждение:

Утверждение 1. *Пусть D — шар в $\mathbb{R}^3$, а D' — область в $\mathbb{C}^3$, в которую переходит D при отображении $\xi \to \xi + i\eta(\xi)$. Следующего условия достаточно для того, чтобы объем $\Gamma \cap D'$ не пересекал σ_j:*

$$\eta(\xi) \cdot \nabla g(\xi) \neq 0, \qquad \xi \in D. \tag{10}$$

Доказательство этого утверждения состоит в том, что в первом приближении ряда Тейлора

$$\mathrm{Im}[g_j(\xi + i\eta(\xi))] \approx \eta(\xi) \cdot \nabla g_j(\xi) \neq 0,$$

а значит,

$$\xi + i\eta(\xi) \notin \sigma_j.$$

Условие (10) означает, что вектор $\eta(\xi)$, рассматриваемый на поверхности σ'_j, нигде не параллелен поверхности σ'_j. Следовательно, вектор $\eta(\xi)$, $\xi \in \sigma'_j$ “смотрит” либо в одну, либо в другую сторону от поверхности σ'_j, причем эта сторона во всех точках σ'_j одна и та же. Приведенная выше классификация на Γ_+ и Γ_- соответствует тому, смотрит ли вектор η вверх или вниз от σ'_j вдоль переменной ξ_1.

Таким образом, для определения объема интегрирования в (1) достаточно указать для каждой компоненты сингулярности σ_j, в какую сторону указывает вектор η относительно поверхности σ'_j. Задание этой стороны, разумеется, не произвольно, а отражает физические особенности задачи. Мы видим два способа определения этого направления:

• Интеграл (1) с фазовой функцией (6) может возникать как обращение преобразования Фурье–Лапласа (по некоторым из переменных z_m делается преобразование Фурье, а по некоторым — Лапласа). Обращение преобразования Лапласа дается преобразованием Меллина. Преобразование Меллина содержит интегрирование по прямой, смещенной относительно действительной оси ξ_m.

• При изучении волновых явлений стандартным приемом является *принцип предельного поглощения*. Волновое число k в среде предполагается имеющим малую мнимую часть, соответствующую малому поглощению в среде. Ищется экспоненциально затухающее решение, а затем берется предел, при котором мнимая часть k стремится к нулю. На языке интегралов типа (1) это соответствует тому, что функции g_j зависят от $\mathrm{Im}[k]$ как от параметра:

$$g_j(\xi; z) = g_j(\xi;\ z;\ \mathrm{Im}[k]).$$

При ненулевых $\mathrm{Im}[k]$ эти функции не удовлетворяют условию действительности, но близки к этому. Рассмотрение случая малого ненулевого $\mathrm{Im}[k]$ позволяет определить, с какой стороны $\Gamma = \mathbb{R}^3$ обходит σ_j. Эта сторона сохраняется и в пределе $\mathrm{Im}[k] = 0$, когда объем Γ приходится деформировать.

5. ПРИНЦИП ЛОКАЛЬНОСТИ

Принцип локальности в нашем случае означает следующее:

При почти всех значениях z асимптотическая оценка интеграла (1) при $\Lambda \to \infty$ дается суммой нескольких членов, определяемых окрестностями нескольких особых точек:

$$u(\Lambda) = \sum_{\nu} u_\nu(\Lambda) + O(e^{-\zeta\Lambda}) \tag{11}$$

для некоторого $\zeta > 0$.

Каждый из членов u_ν раскладывается в ряд по обратным степеням Λ. Нас будет интересовать только старший член каждого из этих рядов.

Для нас принцип локальности дается следующим утверждением, которое мы сформулируем, но не будем доказывать (доказательство конструктивно, но достаточно трудоемко):

Утверждение 2. *Если везде, кроме окрестностей нескольких особых точек, можно построить желаемую и разрешенную деформацию объема Γ локально (т.е. в небольших окрестностях), то везде вне окрестностей особых точек желаемую и разрешенную деформацию можно построить и глобально. Иными словами, локальные деформации “склеиваются” в глобальную.*

Эта теорема дает возможность ограничиться локальными деформациями Γ в Γ'. Под локальными деформациями мы будем иметь в виду *локально постоянные* деформации, т.е. такие $\eta(z;\tau)$, $\tau \in [0,1]$, что вектор η — постоянный по координатам z в выбранной окрестности.

6. ТОЧКИ, НЕ ДАЮЩИЕ ВКЛАДОВ В ОЦЕНКУ ИНТЕГРАЛА

Ниже мы рассматриваем окрестности точек $\xi^* \in \mathbb{R}^3$ различных типов. Везде мы будем полагать, что $\mathrm{Im}[G(\xi^*)] = 0$ (в противном случае деформация Γ не требуется). Более того, будем считать, что $\mathrm{Im}[G(\xi)] = 0$ в некоторой действительной окрестности ξ^*, т.е. ∇G в этой окрестности — действительный вектор.

Регулярная точка. Прежде всего, рассмотрим точку ξ^*, которая не принадлежит сингулярностям σ_j, и в которой

$$\nabla G \neq \mathbf{0}.$$

В этом случае критерием желательности деформации служит неравенство

$$\eta(\xi^*;1) \cdot \nabla G(\xi^*) > 0. \tag{12}$$

Очевидно, для малой окрестности ξ^* существует желаемая и разрешенная деформация, для которой

$$\eta(\xi^*;1) = \varepsilon \nabla G(\xi^*), \quad \varepsilon > 0$$

для всей окрестности ξ^* (ε мало). Деформация дается, например, линейной интерполяцией между начальным состоянием $\eta(\xi^*;\ 0)$ и $\eta(\xi^*;\ 1)$. Таким образом, в окрестности регулярной точки существует разрешенная и желаемая деформация, а значит, окрестности регулярных точек вклад в оценку интеграла не дают.

Регулярная точка сингулярности. Пусть ξ^* принадлежит единственной компоненте сингулярности σ_j. Пусть $\nabla G \neq \mathbf{0}$ и $\nabla G \neq c\nabla g_j$ ни для какого скалярного значения c, т.е. векторы ∇G и ∇g_j неколлинеарны. Последнее условие может быть сформулировано в следующем виде:

$$\nabla\left(G(\xi^*)\Big|_{\sigma'_j} \right) \neq \mathbf{0} \tag{13}$$

(градиент ограничения G на поверхность σ'_j ненулевой). Оказывается, в этом случае также всегда можно построить разрешенную и желаемую деформацию.

Рассмотрим в действительном пространстве действительные векторы $\nabla G(\xi^*)$, $\nabla g_j(\xi^*)$ и $\eta(\xi^*;0)$. Поскольку Γ не пересекает σ_j, выполняется условие

$$\eta(\xi^*;0) \cdot \nabla g_j(\xi^*) \neq 0$$

(см. (10)).

Если выполняется неравенство $\eta(\xi^*;\ 0) \cdot \nabla G(\xi^*) > 0$, то в окрестности ξ^* деформировать Γ не требуется.

Пусть $\eta(\xi^*;\ 0) \cdot \nabla G(\xi^*) < 0$. Построим вектор

$$\mathbf{a} = \nabla g_j(\xi^*) \times (\nabla g_j(\xi^*) \times \nabla G(\xi^*))$$

(все векторные произведения берутся в $\mathbb{R}^3$). Заметим, что

$$\mathbf{a} \cdot \nabla g_j(\xi^*) = 0, \qquad \mathbf{a} \cdot \nabla G(\xi^*) \neq 0 \tag{14}$$

(вторая часть требует применения известного тождества о векторном и скалярном произведении).

Искомая деформация объема Γ в окрестности ξ^* дается формулой

$$\eta(\mathrm{Re}[\xi];\ \tau) = \eta(\mathrm{Re}[\xi];\ 0) + \alpha\tau\mathbf{a} \tag{15}$$

при подходящем выборе знака и величины α. Первая часть (14) говорит, что движение вдоль $\mathbf{a}$ в первом приближении не приводит к пересечению σ_j, а вторая часть говорит, что такое движение может привести к изменению знака $\eta \cdot \nabla G(\xi^*)$. Например, в качестве α можно выбрать

$$\alpha = -2\frac{\eta(\xi^*;\ 0) \cdot \nabla G(\xi^*)}{\mathbf{a} \cdot \nabla G(\xi^*)}.$$

Таким образом, мы приходим к важному выводу: точки одиночной сингулярности σ_j при условии (13) не приводят к появлению вкладов в асимптотику. Это отличается от одномерного случая, где сингулярные точки, как правило, приводят к появлению членов в асимптотиках. Данное рассуждение обобщает приведенное в [3, 4].

Регулярная точка пересечения двух сингулярностей. Пусть $\xi^* \in \sigma_j \cap \sigma_m$ и выполняется неравенство

$$\nabla\left(G(\xi^*)\Big|_{\sigma'_j \cap \sigma'_m} \right) \neq \mathbf{0}. \tag{16}$$

Заметим, что пересечение $\sigma'_j \cap \sigma'_m$ представляет собой одномерное множество (линию) в трехмерном пространстве, так что градиент в (16) представляет собой производную вдоль этой линии. Предположим, что пересечение сингулярностей трансверсально (соответствующие поверхности не касаются).

В этом случае разрешенная и желаемая деформация строится сходно с (15), а вектор $\mathbf{a}$ определяется как

$$\mathbf{a} = \nabla g_j(\xi^*) \times \nabla g_m(\xi^*).$$

Данный результат отличает трехмерный случай от двумерного, поскольку в двумерном случае пересечения сингулярностей, как правило, приводят к появлению членов в асимптотиках.

7. ТОЧКИ, ДАЮЩИЕ ВКЛАД В ОЦЕНКУ ИНТЕГРАЛА (ОСОБЫЕ ТОЧКИ)

Здесь мы перечисляем основные типы особых точек. Классификация не является исчерпывающей, поскольку, например, для каждой из рассмотренных особых точек существуют еще более вырожденные случаи (определители гессианов могут быть нулевыми, и точки разных типов могут сливаться). Способ рассмотрения, однако, и в более сложных случаях остается тем же: делается переход к удобным локальным переменным, и рассматривается упрощенный интеграл, в котором G и F заменяются на первые члены их степенных рядов.

Точка стационарной фазы. Пусть в точке ξ^* функции G и F голоморфны,

$$\nabla G(\xi^*) = \mathbf{0},$$

и определитель гессиана

$$H \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 G}{\partial \xi_1^2} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial \xi_2^2} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial \xi_3^2} \end{pmatrix}$$

в точке ξ^* ненулевой. Такая точка является обычной трехмерной точкой стационарной фазы или точкой перевала. Ее рассмотрение имеется во всех руководствах, например в [2]. Выпишем здесь рассмотрение для полноты. Приведем гессиан к главным осям. Пусть это достигается переходом к переменным (w_1, w_2, w_3), связанным с ξ действительным невырожденным линейным преобразованием. Пусть в новых переменных

$$G(w) = G(\xi^*) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3} \beta_n w_n^2 + O(|w|^3)$$

с некоторыми действительными ненулевыми константами β_n. Тогда локальная деформация объема Γ дается в новых переменных формулой

$$\Gamma' = \gamma_{\mathrm{sign}(\beta_1)} \times \gamma_{\mathrm{sign}(\beta_2)} \times \gamma_{\mathrm{sign}(\beta_3)},$$

где контура $\gamma_\pm$ показаны на рис. 2. Очевидно, данная деформация разрешена, но желательной она является везде, кроме точки ξ^*.

Если функция $F(\xi)$ не равна нулю в точке ξ^*, старший член асимптотики соответствующего вклада u_ν может быть легко получен:

$$u_\nu(\Lambda) = F(\xi^*)\exp\left\{i\Lambda G(\xi^*) + i\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{3}\mathrm{sign}(\beta_n)\right\} \times \\ \times \frac{(2\pi)^{3/2} J}{\sqrt{|\beta_1\beta_2\beta_3|}\Lambda^{3/2}} + O(\Lambda^{-5/2}), \quad (17)$$

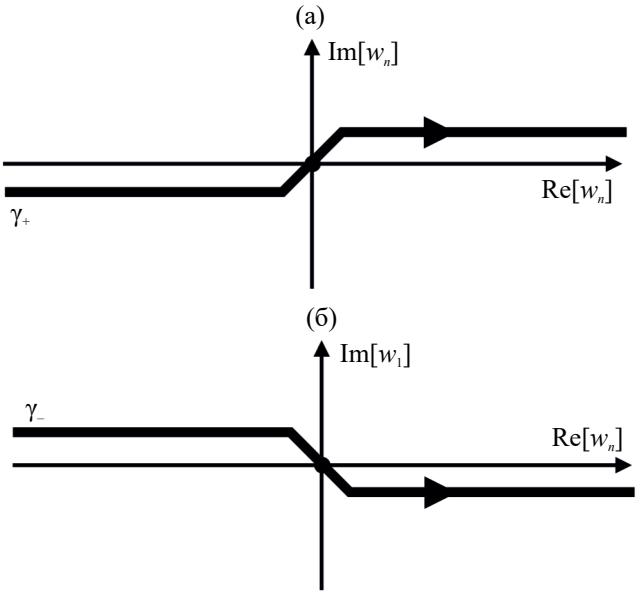

Рис. 2. Контура γ_+ и γ_- для точки стационарной фазы.

J (здесь и ниже) — определитель якобиана преобразования:

$$J = \det\left(\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(w_1, w_2, w_3)}\right). \quad (18)$$

Точка стационарной фазы на одиночной сингулярности. Пусть ξ^* принадлежит единственной компоненте сингулярности σ'_j, является точкой стационарной фазы ограничения G на σ'_j:

$$\nabla\left(G(\xi^*)\Big|_{\sigma'_j}\right) = \mathbf{0}, \quad (19)$$

и гессиан ограничения G на σ'_j невырожден. Будем также предполагать, что ξ^* не является точкой стационарной фазы, т.е. $\nabla G(\xi^*) \neq \mathbf{0}$.

Сделаем вблизи ξ^* биголоморфную замену координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) такую, что

$$w_1 = \alpha g_j(z), \quad (20)$$

$$G(w) = G(\xi^*) + w_1 + \frac{1}{2}(\beta_2 w_2^2 + \beta_3 w_3^2) + \ldots, \quad (21)$$

где α, β_1, β_2 — ненулевые действительные коэффициенты. Под биголоморфной мы понимаем такую замену, что функции $w_j(\xi)$ и $\xi_j(w)$, $(w \equiv (w_1, w_2, w_3))$, голоморфны в рассматриваемой области. Мы полагаем, что замена *действительна*, т.е. действительным ξ соответствуют действительные w и наоборот. Подбором α мы добиваемся того, что коэффициент при w_1 в (21) равен единице.

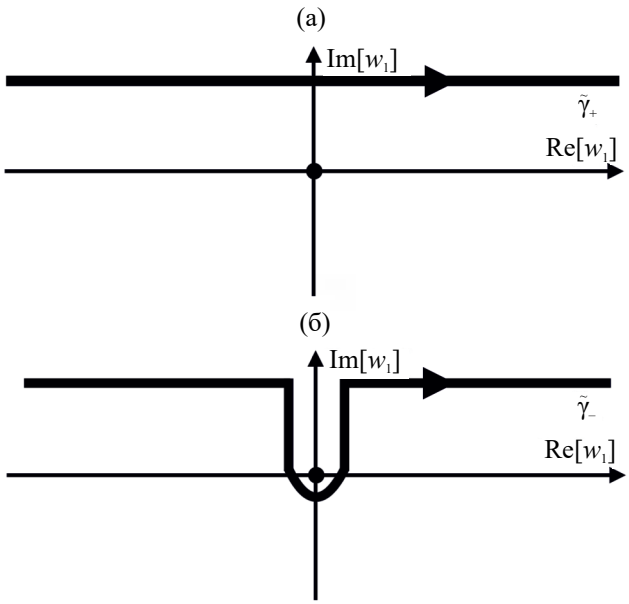

Рис. 3. Контура $\tilde{\gamma}_+$ и $\tilde{\gamma}_-$ для точки стационарной фазы.

Сингулярность задается в новых координатах уравнением $w_1 = 0$. Исходный объем интегрирования обходит $w_1 = 0$ сверху или снизу. Деформированный объем Γ' строится вблизи ξ^* в координатах (w_1, w_2, w_3) как

$$\Gamma' = \tilde{\gamma}_\pm \times \gamma_{\mathrm{sign}(\beta_2)} \times \gamma_{\mathrm{sign}(\beta_3)}.$$

Контура $\tilde{\gamma}_\pm$ показаны на рис. 3. Контур $\tilde{\gamma}_+$ выбирается, если Γ обходит $w_1 = 0$ сверху, а $\tilde{\gamma}_-$ — если снизу. В обоих случаях такая деформация является разрешенной, но во втором случае она не является желаемой в окрестности точки ξ^*. В первом случае окрестность точки ξ^* не дает вклад в асимптотику интеграла, а во втором дает. Интеграл во втором случае оценивается как повторный по координатам (w_1, w_2, w_3):

$$u_\nu(\Lambda) = \Phi(\Lambda) \times$$
$$\times \exp\left\{ i\Lambda G(\xi^*) + i\frac{\pi}{4}\sum_{n=2}^{3}\mathrm{sign}(\beta_n)\right\}\frac{2\pi J}{\Lambda\sqrt{|\beta_2\beta_3|}}, \qquad (22)$$

J — определитель якобиана преобразования (см. (18)), Φ — первый член асимптотической оценки интеграла

$$\Phi'(\Lambda) = \int_{\tilde{\gamma}_-} F(w_1, 0, 0)e^{i\Lambda w_1}dw_1 \qquad (23)$$

при больших Λ. Данный интеграл легко оценивается стандартными способами в случае степенных особенностей F. А именно, пусть старший член разложения F в трехмерный ряд Тейлора вблизи ξ^* есть

$$F(w_1, w_2, w_3) = Cw_1^\mu, \qquad (24)$$

где C — ненулевая константа. Тогда

$$\Phi(\Lambda) = C(w_2, w_3)\Lambda^{-\mu-1}I(\mu), \qquad (25)$$

где $C(w_2, w_3)$ — функция, голоморфная при $w_2 = w_3 = 0$ и не равная нулю там. В этой работе мы рассматриваем только простые полюса и точки ветвления переменной $w_1 = 0$ (то есть либо $\mu = -1$, либо $\mu \notin \mathbb{Z}$). Тогда

$$\Phi(\Lambda) = C(0,0)\Lambda^{-\mu-1}I(\mu), \qquad (26)$$

где

$$I(-1) = 2\pi i,$$

и

$$I(\mu) = e^{\pi i(\mu+1)}(1 - e^{i2\pi\mu})\Gamma_E(1+\mu), \qquad \mu \notin \mathbb{Z}.$$

(Γ_E — обозначение Гамма-функции Эйлера).

Мы приходим к выводу о том, что точка стационарной фазы на сингулярности дает вклад в асимптотику интеграла при выполнении некоторого дополнительного условия. Это условие может быть сформулировано так: вблизи этой точки исходный объем интегрирования Γ обходит сингулярность σ_j со стороны роста экспоненциального множителя $e^{i\Lambda G}$.

Точка стационарной фазы на линии пересечения двух сингулярностей. Пусть ξ^* принадлежит пересечению двух сингулярностей: $\xi^* \in \sigma'_j \cap \sigma'_m$, и

$$\nabla\left(G(\xi^*)\Big|_{\sigma'_j \cap \sigma'_m}\right) = \mathbf{0}. \qquad (27)$$

Сделаем локальную биголоморфную действительную замену переменных $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to (w_1, w_2, w_3)$ такую, что

$$w_1 = \alpha_1 g_j(\xi), \qquad w_2 = \alpha_2 g_m(\xi), \qquad (28)$$

и G имеет вид

$$G = G(\xi^*) + w_1 + w_2 + \frac{1}{2}\beta w_3^2 + \ldots \qquad (29)$$

для некоторых α_1, α_2, β (мы предполагаем, что такая замена возможна, т.е. что ξ не является точкой стационарной фазы ни для одной из двух особенностей, что пересечение особенностей трансверсально, и что вторая производная G вдоль линии пересечения особенностей ненулевая).

Сингулярности в новых координатах задаются как $w_1 = 0$ и $w_2 = 0$. Исходный объем Γ может обходить каждое из этих множеств сверху или снизу. Соотвественно, Γ можно локально деформировать в

$$\Gamma' = \tilde{\gamma}_\pm \times \tilde{\gamma}_\pm \times \gamma_{\mathrm{sign}(\beta)}.$$

Данная деформация является желаемой, если хотя бы один из двух первых контуров — $\tilde{\gamma}_+$, т.е. если хотя бы одна сингулярность обходится сверху (в координатах w).

Итак, условием того, что точка ξ^* дает вклад в асимптотику интеграла, является то, что Γ обходит обе сингулярности снизу. Оценка данного вклада в этом случае есть

$$u_\nu(\Lambda) = \Phi(\Lambda)\exp\left\{i\Lambda G(\xi^*) + i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}(\beta)\right\}\frac{\sqrt{2\pi}J}{\sqrt{\Lambda\,|\,\beta\,|}}, \quad (30)$$

где J — определитель Якобиана, а Φ — главный член асимптотики интеграла

$$\Phi'(\Lambda) = \int_{\tilde{\gamma}_-}\int_{\tilde{\gamma}_-} F(w_1, w_2, 0)e^{i\Lambda(w_1+w_2)}dw_1\,dw_2. \quad (31)$$

Последний множитель может быть легко построен, например, если старший член F вблизи ξ^* имеет вид

$$F(w_1, w_2, w_3) \approx C(w_3)w_1^{\mu_1}w_2^{\mu_2}, \quad (32)$$

где $C(w_3)$ — функция, голоморфная в нуле и не равная там нулю. В этом случае

$$\Phi(\Lambda) = C(0)\Lambda^{-\mu_1-\mu_2-2}I(\mu_1)I(\mu_2). \quad (33)$$

Точка пересечения трех сингулярностей. Пусть ξ^* принадлежит пересечению трех сингулярностей: $\xi^* \in \sigma'_j \cap \sigma'_l \cap \sigma'_m$ (заметим, что такое пересечение — дискретный набор точек). Предположим, что ξ^* не является точкой стационарной фазы ни на одной из линий попарного пересечения сингулярностей. Тогда локальной биголоморфной действительной заменой

$$w_1 = \alpha_1 g_j(\xi), \qquad w_2 = \alpha_2 g_l(\xi), \qquad w_3 = \alpha_3 g_m(\xi)$$

можно привести функцию G к виду

$$G(\xi) = G(\xi^*) + w_1 + w_2 + w_3 + O(|w|^2).$$

Сингулярности σ_j, σ_l, σ_m имеют вид $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$, соответственно. Исходный объем интегрирования Γ обходит каждую из этих сингулярностей сверху или снизу. В координатах w его можно локально деформировать разрешенной деформацией в

$$\Gamma' = \tilde{\gamma}_\pm \times \tilde{\gamma}_\pm \times \tilde{\gamma}_\pm,$$

где знак $\pm$ в n-ной позиции выбирается в зависимости от того, является ли обход Γ около $w_n = 0$ обходом сверху или снизу. Деформация является желаемой, если хотя бы один из этих контуров — $\tilde{\gamma}_+$. Следовательно, имеется условие того, что ξ^* дает вклад в асимптотику: в координатах w объем Γ должен обходить все сингулярности снизу.

Предположим, что старший член F вблизи ξ^* имеет вид

$$F(w_1, w_2, w_3) \approx Cw_1^{\mu_1}w_2^{\mu_2}w_3^{\mu_3},$$

где C — ненулевая константа. Тогда оценка вклада точки ξ^* дается оценкой повторного интеграла

$$\begin{aligned} u_\nu(\Lambda) &\approx Ce^{i\Lambda G(\xi^*)}\prod_{n=1}^{3}\int_{\tilde{\gamma}_-} w_n^{\mu_n}e^{i\Lambda w_n}dw_n \approx \\ &\approx Ce^{i\Lambda G(\xi^*)}\prod_{n=1}^{3}\Lambda^{-\mu_n-1}I(\mu_n). \end{aligned} \quad (34)$$

Коническая точка. Особые точки, рассмотренные выше, являлись обобщениями особых точек в одномерном и двумерном случаях. В трехмерном случае, однако, могут возникать принципиально новые конические точки.

Пусть существуют координаты (w_1, w_2, w_3), в которых функция g_j, определяющая сингулярность σ_j, имеет вид

$$g_j(w_1, w_2, w_3) = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2. \quad (35)$$

Как и раньше, мы предполагаем, что замена $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to (w_1, w_2, w_3)$ биголоморфна и действительна. Мы также предполагаем, что значениям $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ соответствует точка $\xi = \xi^*$. Очевидно, σ'_j представляет собой двухсторонний конус.

Мы предполагаем также, что G аппроксимируется линейной функцией

$$G(\xi) = G(\xi^*) + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + O(|w|^2)$$

с ненулевым вектором $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Коническая особая точка обычно возникает, если в задаче рассматривается распространение волн в двух пространственных и одной временной координате, причем на низких пространственных и временных частотах скорость волн ненулевая и конечная. В этом случае $g_j = 0$ представляет собой дисперсионное уравнение для среды.

Прежде всего, опишем, каким образом исходный объем интегрирования Γ может располагаться рядом с конической особой точкой и не пересекать σ_j. Будем считать, что в координатах w вблизи начала координат

$$\Gamma = \mathbb{R}^3 + i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

т.е. действительный объем смещается на малый постоянный мнимый вектор. Пусть некоторая точка Γ есть $w = (w'_1 + i\varepsilon_1, w'_2 + i\varepsilon_2, w'_3 + i\varepsilon_3)$, где $w'_{1,2,3}$ действительны. Выпишем действительную и мнимую часть g_j и запишем условия того, что $w \in \sigma_j$:

$$(w'_1)^2 + (w'_2)^2 - (w'_3)^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2, \quad (36)$$

$$w'_1\varepsilon_1 + w'_2\varepsilon_2 - w'_3\varepsilon_3 = 0. \quad (37)$$

Данная система уравнений не имеет действительных решений w' тогда и только тогда, когда

$$\varepsilon_3^2 > \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \tag{38}$$

(при этом (36) определяет двухполостной гиперболоид, лежащий внутри конуса $(w_1')^2 + (w_2')^2 - (w_3')^2 = 0$, а плоскость (37) пересекает этот конус только в начале координат). Таким образом, (38) описывает возможные объемы интегрирования вблизи особой точки.

Множество (38) является объединением двух односторонних конусов $K_\pm$:

$$K_+ : \ \varepsilon_3 > \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2},$$

$$K_- : \ -\varepsilon_3 < -\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}.$$

Эти конуса изображены на рис. 4. Разрешенные деформации объема Г вблизи конической точки заключаются в перемещении точки $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ в пределах одного из двух конусов $K_\pm$. Перейти из одного конуса в другой, не пересекая σ_j, нельзя. Таким образом, имеется два способа обойти сингулярность σ_j с конической точкой: условно говоря, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in K_+$ соответствует обходу сверху, а $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in K_-$ — снизу.

Пусть деформация $\Gamma \to \Gamma'$ соответствует изменению вектора смещения с $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ на $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3')$ Деформация является желаемой, если

$$\varepsilon_1'\alpha_1 + \varepsilon_2'\alpha_2 + \varepsilon_3'\alpha_3 > 0. \tag{39}$$

Очевидно, при

$$|\alpha_3| < \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

точки, удовлетворяющие (39), есть и в K_+, и в K_-, то есть желаемая и разрешенная деформация есть при любом взаимном расположении Г и σ_j. Условием того, что желаемой и разрешенной деформации не существует, является

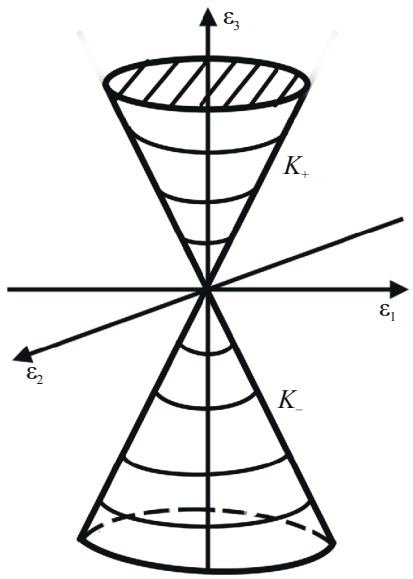

Рис. 4. Конуса $K_\pm$.

$$\varepsilon_3 < -\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \quad \text{и} \quad \alpha_3 > \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \tag{40}$$

или

$$\varepsilon_3 > \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \quad \text{и} \quad \alpha_3 < -\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}. \tag{41}$$

Именно при выполнении одного из этих двух условий точка ξ^* дает вклад в интеграл.

Пусть выполняется условие (40). Продемонстрируем пример вычисления асимптотики интеграла по окрестности конической точки. Не пытаясь рассмотреть общий случай, ограничимся ситуацией, когда старший член в степенном разложении F вблизи ξ^* дается формулой

$$F(w_1, w_2, w_3) = \frac{C}{w_1^2 + w_2^2 - w_3^2} + O(|w|^3). \tag{42}$$

Старший член оценки есть

$$u_\nu(\Lambda) = C\exp\{i\Lambda G(\xi^*)\} J \int\limits_{-\infty - i\varepsilon}^{\infty - i\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\Lambda(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3)}}{w_1^2 + w_2^2 - w_3^2} dw_1\, dw_2\, dw_3. \tag{43}$$

Тройной интеграл без труда берется:

$$u_\nu(\Lambda) = \frac{4C\pi^2 J \exp\{i\Lambda G(\xi^*)\}}{\Lambda\sqrt{\alpha_3^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}}. \tag{44}$$

8. ДОПОЛНЕНИЕ: ОСОБЫЕ ТОЧКИ НА ГРАНИЦЕ ОБЪЕМА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Везде выше предполагалось, что объем интегрирования Г неограничен и представляет собой слегка деформированный действительный объем $\mathbb{R}^3$. Иногда возникает необходимость[1] рассматривать также ограниченные объемы. Например, объем интегрирования может быть ограничен сферой, границей куба и т.д. В этом случае могут возникать асимптотические члены, имеющие граничную природу.

Пусть объем интегрирования ограничен несколькими поверхностями s_j, принадлежащими аналитическим множествам S_j: $s_j \subset S_j \subset \mathbb{C}^3$.

[1] К важности данного вопроса внимание авторов привлек проф. Daan Huybrechs, см. [18].

Каждое из аналитических множеств описывается уравнением

$$S_j : h_j(\xi) = 0, \tag{45}$$

где $h_j(\xi)$ — голоморфная функция. Мы предполагаем, что функции h_j также обладают свойством действительности, введенным ранее. Примерами таких аналитических множеств служат комплексифицированная сфера

$$S_j : \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - R^2 = 0 \tag{46}$$

или комплексифицированная плоскость

$$S_j : \quad \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 - \alpha_0 = 0. \tag{47}$$

Соответствующими элементами границы s_j могут быть действительная сфера и действительная плоскость. Множества S_j имеют действительную размерность 4, а множества s_j — действительную размерность 2. Множества S_j являются *комплексификацией* элементов границы s_j.

Теорема Коши гарантирует неизменность величины интеграла (1) при деформации объема интегрирования, если не задеваются сингулярности, а граница объема остается на месте. Оказывается, в неодномерном комплексном анализе условие неизменности границы можно ослабить. А именно, при деформации можно деформировать границу, но так, чтобы элементы s_j деформировались в пределах своих комплексификаций S_j. Данное утверждение основано на том, что

$$\int_{\Gamma''} Q(\xi)d\xi = 0, \tag{48}$$

если функция $Q(\xi)$ голоморфна в окрестности Γ'', а область Γ'' лежит в некотором аналитическом множестве S. В нашем случае

$$Q(\xi) = F(\xi)e^{i\Lambda G(\xi)},$$

S — одно из множеств S_j, а Γ'' — область, заметаемая границей s_j при ее деформации. Утверждение (48) легко проиллюстрировать для случая (47): в пределах S_j выполняется $d\xi_1 = 0$, а значит, элемент объема на Γ'' нулевой:

$$d\xi\,|_{S_j} = 0.$$

Любой другой случай можно привести к (47) биголоморфной заменой.

Далее можно действовать по схеме, использованной выше: ввести понятие желаемой деформации границы (т.е. деформации, которая делает подынтегральную функцию на границе экспоненциально малой), а также понятие особых точек, в которых желаемая деформация невозможна.

По аналогии с σ'_j введем действительный след S_j как

$$S'_j = S_j \cap \mathbb{R}^3.$$

Нетрудно видеть, что особыми точками на границе являются:

- точки стационарной фазы на одном элементе границы S'_j,
- точки стационарной фазы на пересечении элементов границ $S'_j \cap S'_m$,
- точки тройного пересечения границ $S'_j \cap S'_m \cap S'_n$,
- конические точки границ.

Мы не развиваем эти идеи в настоящей работе, но соответствующие формулы для асимптотик могут быть без труда построены.

9. ПРИМЕР: ВОЛНЫ КЕЛЬВИНА

Вывод интеграла для волн Кельвина. Рассмотрим классический пример оценки сложного трехмерного интеграла Фурье — интеграла для волн Кельвина. Пусть несжимаемая жидкость плотностью ρ в равновесном состоянии занимает полупространство (x_1, x_2, x_3), $x_3 < 0$. Вдоль оси x_3 вниз действует сила тяжести с ускорением свободного падения a. Под поверхностью в точке $(0,0,0)$ покоится малое тело объемом V (для удобства мы предполагаем, что тело представляет собой цилиндр длины l и площади поперечного сечения A). В момент времени $t = 0$ это тело начинают буксировать в положительном направлении оси x_1 со скоростью v. Необходимо найти вертикальное смещение $x_3 = H(x_1, x_2, t)$ границы жидкости.

Решение задачи дается интегралом

$$H(x_1,x_2,t) = \frac{ivV}{8\pi^3}\int\limits_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega k_1 e^{ik_1x_1+ik_2x_2-i\omega t}}{(\omega - k_1v)(\omega^2 - a\sqrt{k_1^2+k_2^2})}dk_1\,dk_2\,d\omega, \tag{49}$$

где ε — произвольное положительное число.

Вывод интегрального представления (49) производится следующим образом. Опишем волны в жидкости с помощью потенциала скорости $\phi(x_1,x_2,x_3,t)$ и давления $p(x_1,x_2,x_3,t)$. Линеаризованные уравнения, связывающие эти величины, выглядят следующим образом:

$$\Delta\phi = W, \tag{50}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}p, \tag{51}$$

где ρ — плотность жидкости, а W — функция источника:

$$W(x_1,x_2,x_3,t) = Av\big(\delta(x_1 - l/2 - vt) - \\ - \delta(x_1 + l/2 - vt)\big)\delta(x_2)\delta(x_3)\Theta(t) \approx \\ \approx -Vv\delta'(x_1 - vt)\delta(x_2)\delta(x_3)\Theta(t), \quad (52)$$

где δ, δ' и Θ — соответственно дельта-функция Дирака, ее производная и функция Хевисайда.

Граничное условие на свободной границе выглядит следующим образом:

$$\left(a\rho\frac{\partial\phi}{\partial x_3} - \frac{\partial p}{\partial t}\right)\Bigg|_{x_3=+0} = 0. \quad (53)$$

Здесь $x_3 = +0$ означает, что значение берется над телом.

Соотношения (50), (51), (53) можно объединить следующим образом:

$$\Delta\phi = 0, \qquad x_3 < -0, \quad (54)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3} + \frac{1}{a}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)\Bigg|_{x_3=-0} = -Vv\delta'(x_1 - vt)\delta(x_2)\Theta(t). \quad (55)$$

Здесь $x_3 = -0$ означает, что значение берется под телом.

Применим преобразование Фурье–Лапласа к решению:

$$\hat{\phi}(k_1,k_2,\omega;x_3) = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty\iint_{-\infty}^{\infty}\phi(x_1,x_2,x_3,t)e^{-i(k_1x_1+k_2x_2-\omega t)}dx_1\,dx_2\,dt. \quad (56)$$

В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x_3^2} = (k_1^2 + k_2^2)\hat{\phi}, \quad x_3 < -0 \quad (57)$$

с граничным условием

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\omega^2}{a}\right)\hat{\phi}(k_1,k_2,\omega;-0) = -\frac{Vv}{8\pi^3}\frac{k_1}{\omega - k_1v}. \quad (58)$$

Выбирая решение (57), убывающее при $x_3 \to -\infty$, получаем

$$\phi(k_1,k_2,\omega;-0) = \frac{Vva}{8\pi^3}\frac{k_1}{(\omega - k_1v)(\omega^2 - a\sqrt{k_1^2 + k_2^2})}. \quad (59)$$

В конце концов, отметим, что

$$H(x_1,x_2,t) = \frac{p(x_1,x_2,0,t)}{\rho a} = -\frac{1}{a}\frac{\partial\phi}{\partial t}(x_1,x_2,0,t),$$

что ϕ непрерывно при $x_3 = 0$, и применим обратное преобразование Фурье (56). В результате получим (49).

Отметим, что (49) может быть получено напрямую из [16].

Предварительный этап. Поставим задачу оценить этот интеграл асимптотически при больших значениях аргументов. Для этого формально запишем

$$(x_1,x_2,t) = (\Lambda X_1, \Lambda X_2, \Lambda T),$$

(Λ — безразмерная величина), зафиксируем (X_1,X_2,T) и будем рассматривать предел $\Lambda \to \infty$.

Введем безразмерные переменные

$$\xi_1 = \frac{v^2}{a}k_1, \quad \xi_2 = \frac{v^2}{a}k_2, \quad \varpi = \frac{v}{a}\omega,$$

$$z_1 = \frac{a}{v^2}X_1, \quad z_2 = \frac{a}{v^2}X_2, \quad \tau = \frac{a}{v}T.$$

В новых переменных интеграл (49) перепишется как

$$H(\Lambda z_1,\Lambda z_2,\Lambda\tau) = \frac{Va^2i}{8\pi^3v^4}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_1\varpi e^{i\Lambda(\xi_1z_1+\xi_2z_2-\varpi\tau)}}{(\varpi - \xi_1)(\varpi^2 - \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2})}d\xi_1\,d\xi_2\,d\varpi. \quad (60)$$

Интеграл (60) хорошо изучен. Классический подход [14] заключается в том, чтобы оценивать интеграл как набор вложенных, выполняя интегрирование по каждой из переменных последовательно. Здесь мы применим наш подход, не предполагающий глобального перехода к покоординатному интегрированию и понижения размерности интеграла. По-видимому, первое указание на то, что глобальное рассмотрение особенностей многомерных интегралов Фурье с рассмотрением геометрии сингулярностей подынтегральных функций приводит к физически ясным результатам, содержится в работе [19].

Легко видеть, что интеграл (60) схож по форме с (1). Переменные (ξ_1,ξ_2,ϖ) соответствуют ξ, переменные (z_1,z_2,τ) соответствуют z (мы поменяли нотации ξ_3 и z_3, чтобы визуально отличать временные переменные от пространственных).

В соответствии с подходом, предложенным выше, мы будем действовать по следующей программе:

- Подынтегральное выражение разбивается на множители $e^{i\Lambda G}$ и F.
- Выделяются сингулярности σ_j множителя F.

• Рассматриваются следы σ'_j этих сингулярностей на $\mathbb{R}^3$.

• Для каждой точки $\mathbb{R}^3$ определяется, является ли она особой по нашей классификации.

• Для особых точек проверяется дополнительное условие того, что точка дает вклад в асимптотику.

• Если точка дает вклад в асимптотику, эта асимптотика вычисляется по выписанным формулам или *ad hoc*.

• Положение особых точек ξ^* зависит от z. Можно провести анализ фазового множителя $\exp\{i\Lambda G(\xi^*(z);\ z)\}$ для каждого семейства особых точек и определить, какому типу волн в системе данное семейство соответствует.

Поскольку интеграл повторный,

$$d\xi_1 d\xi_2 d\varpi = d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\varpi.$$

Функции F и G записываются как

$$G(\xi;\ z) = \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 - \varpi\tau,$$

$$F(\xi) = \frac{ia^2 V}{8\pi^3 \nu^4} \frac{\xi_1 \varpi}{(\varpi - \xi_1)(\varpi^2 - \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2})}.$$

Заметим, что интеграл (49) не вполне удовлетворяет ограничениям, наложенным выше. Вблизи начала координат функция F имеет множества ветвления, определяемые уравнениями

$$\xi_1 \pm i\xi_2 = 0,$$

не обладающие свойствами действительности. Эти множества пересекают объем интегрирования (тем не менее, интеграл (49) определен корректно). Это обстоятельство не позволяет свободно деформировать объем интегрирования вблизи начала координат. Такого рода точки требуют дополнительной теоретической проработки, что выходит за рамки данной статьи, т.е. мы не будем здесь вычислять асимптотические члены, порожденные окрестностью начала координат в пространстве ξ.

Геометрия сингулярностей. Применим технику оценки интеграла, развитую выше. Функция F, рассматриваемая в $\mathbb{R}^3_\delta$ без окрестности начала координат, имеет две полюсных сингулярности σ_1 и σ_2, заданных функциями

$$g_1(\xi_1, \xi_2, \varpi) = \varpi - \xi_1, \tag{61}$$

$$g_2(\xi_1, \xi_2, \varpi) = \varpi^2 - \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}. \tag{62}$$

Обе сингулярности обходятся сверху относительно переменной ϖ. Поверхности σ'_1 и σ'_2 есть плоскость и достаточно сложная поверхность вращения. Имеются две линии пересечения этих поверхностей: $L = L_1 \cup L_2 = \sigma'_1 \cap \sigma'_2$, параметризуемые переменной ϖ как

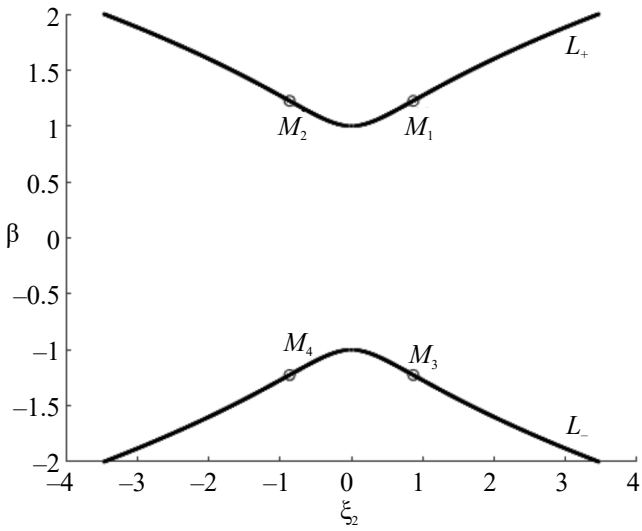

Рис. 5. Кривые $L_\pm$.

$$L = \{(\xi_1, \xi_2, \varpi) \in \mathbb{R}^3 : \xi_1 = \varpi,\ \ \xi_2 = \pm\sqrt{\varpi^4 - \varpi^2}\}. \tag{63}$$

Форма этих кривых важна для дальнейшего рассмотрения (см. рис. 5): эти кривые (как кривые в плоскости σ'_1) имеют точки перегиба $M_1, \ldots, M_4$, соответствующие $\varpi = \pm\sqrt{3/2}$.

В соответствии с проведенной выше классификацией, можно ожидать появления следующих особых точек: точек стационарной фазы на сингулярностях σ'_1 и σ'_2, а также точки стационарной фазы на пересечении $\sigma'_1 \cap \sigma'_2$. Кроме того, как мы отметили, окрестность начала координат не попадает в проделанную классификацию и нуждается в отдельном рассмотрении.

Заметим, что точки стационарной фазы в 3D быть не может, поскольку G — линейная функция, а тройных точек пересечения сингулярностей нет, поскольку сингулярностей всего две.

Точки стационарной фазы на $\sigma'_1 \cap \sigma'_2$. Волны Кельвина. Наиболее интересный случай представляет клиновидный волновой след за движущимся телом. Здесь мы покажем, что этот след дается точками стационарной фазы на пересечении сингулярностей. Более того, основные свойства волн Кельвина удается вывести из геометрического рассмотрения.

Рассмотрим пару кривых L, введенную выше. Каждая точка L при определенных координатах z может быть точкой стационарной фазы на $\sigma'_1 \cap \sigma'_2$. Найдем условие этого. Пусть $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \varpi_*) \in L$. Дифференцируя (63) по ϖ, найдем вектор $\mathbf{a}$, касательный к L в точке ξ^*:

$$\mathbf{a} = \left(1, \frac{2\varpi_*^2 - 1}{\sqrt{\varpi_*^2 - 1}}, 1\right), \tag{64}$$

где квадратный корень принимает одно из двух значений в зависимости от знака в (63). Условие (27) записывается как

$$z \cdot \mathbf{a} = z_1 + z_2 \frac{2\varpi_*^2 - 1}{\sqrt{\varpi_*^2 - 1}} - \tau = 0. \qquad (65)$$

Перепишем (65) как

$$\frac{z_2}{\tau - z_1} = \frac{\sqrt{\varpi_*^2 - 1}}{2\varpi_*^2 - 1}, \qquad (66)$$

введем комбинацию координат

$$\lambda = \frac{z_2}{\tau - z_1} \qquad (67)$$

и решим уравнение (65) относительно ϖ:

$$\varpi_*(\lambda) = \pm \frac{\sqrt{4\lambda^2 + 1 \pm \sqrt{1 - 8\lambda^2}}}{2\sqrt{2}\lambda}. \qquad (68)$$

Подстановка (68) в (63) дает точку на L.

Проанализируем формулу (68). Прежде всего, очевидным условием существования действительного решения является $1 - 8\lambda^2 \geq 0$. Это условие переписывается как

$$\left|\frac{z_2}{\tau - z_1}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}. \qquad (69)$$

Будем считать, что $\tau - z_1 > 0$ (это условие мы прокомментируем ниже). Тогда (69) определяет угловую область за текущим положением источника. Заметим, что угол

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(1/(2\sqrt{2})\right) \approx 19.47^\circ \qquad (70)$$

есть знаменитый угол Кельвина для кильватерного следа.

Если условие (69) выполняется строго, то формула дает четыре точки ξ^* на L, обозначаемые как $\xi^{*,1}$, $\xi^{*,2}$, $-\xi^{*,1}$, $-\xi^{*,2}$. У данных точек $\varpi_* = \pm\varpi_{*,1}$, $\pm\varpi_{*,2}$,

$$\varpi_{*,1}(\lambda) = \frac{\sqrt{4\lambda^2 + 1 + \sqrt{1 - 8\lambda^2}}}{2\sqrt{2}\lambda},$$
$$\varpi_{*,2}(\lambda) = \frac{\sqrt{4\lambda^2 + 1 - \sqrt{1 - 8\lambda^2}}}{2\sqrt{2}\lambda}. \qquad (71)$$

При $z_2 > 0$ и $\tau - z_1 > 0$ положение точек показано на рис. 6. Очевидно, касательные к L во всех четырех точках параллельны.

Ниже мы будем рассматривать только вклады точек $\xi^{*,j}$, $j = 1, 2$. Элементарный анализ показывает, что вклады точек $-\xi^{*,j}$ комплексно сопряжены к вкладам от $\xi^{*,j}$.

Точки $\pm\xi^{*,1}$ соответствуют одному типу волн, а $\pm\xi^{*,2}$ — другому. Построим картину волновых

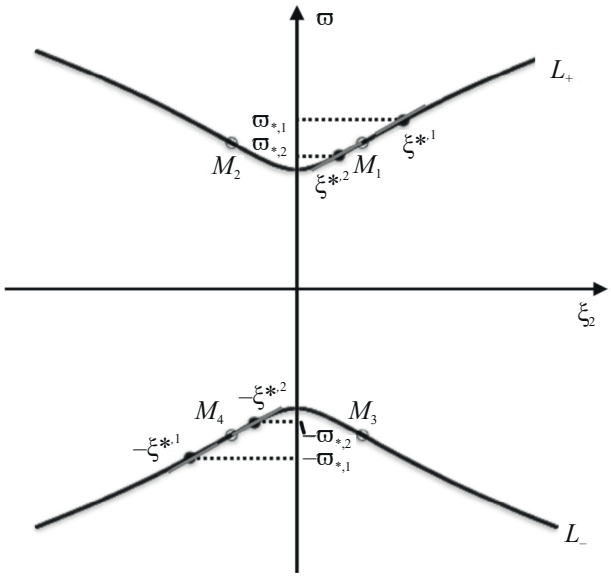

Рис. 6. Точки стационарной фазы на L и волны за телом.

фронтов каждого из типов. В соответствии с (30), фронты волны определяются множителем $\exp\{i\Lambda G(\xi^*)\}$, а все остальные множители дают лишь информацию об амплитуде и начальной фазе. Проделаем вычисления:

$$G(\xi^{*,j}) = \frac{\varpi_{*,j}^3(\lambda)}{2\varpi_{*,j}^2(\lambda) - 1}(z_1 - \tau). \qquad (72)$$

Наглядную картину волновых фронтов дает график действительной функции $\cos(\Lambda G(\xi^*))$, построенный на рис. 7. Нетрудно видеть, что экспоненциальный множитель $\exp\{i\Lambda G(\xi^*)\}$ правильно описывает фазу в двух семействах волн Кельвина, следующих за телом.

При $8\lambda^2 = 1$ точки $\xi^{*,1}$ и $\xi^{*,2}$ сливаются в точках перегиба кривой L_+. Слияние точек $\xi^{*,1}$ и $\xi^{*,2}$ соответствует касанию волновых фронтов и условной границе зоны, занимаемой волновыми фронтами.

Обратимся к условию того, что точка ξ^* дает вклад в асимптотику интеграла. Необходимо проверить, что Γ обходит снизу сингулярности $w_1 = 0$ и $w_2 = 0$. Из вида (60) следует, что объем Γ смещен вверх по переменной ϖ. Следовательно, он обходит сверху множество $\varpi - \xi_1 = 0$. Условие обхода снизу $w_1 = 0$ записывается как $\alpha_1 < 0$ или

$$z_1 > \frac{\tau - z_1}{2\varpi_{*,j}^2 - 1}.$$

Физически это условие связано с тем, что след начинает формироваться только в момент $\tau = 0$, и, если оно не выполняется, соответствующая часть следа не успевает сформироваться.

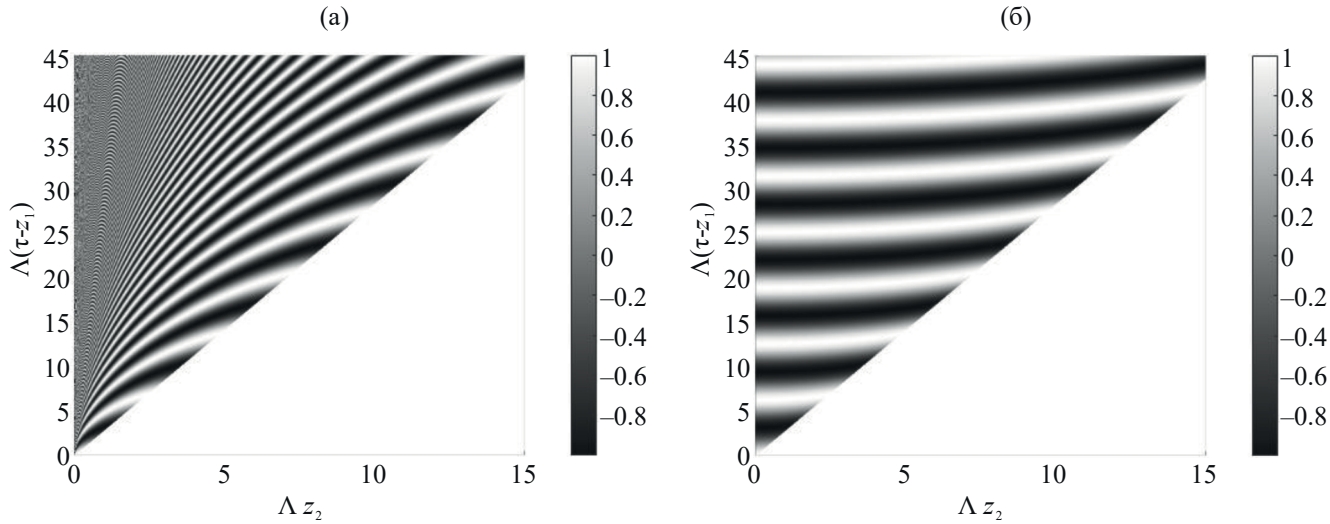

Рис. 7. Функция (а) – $\cos(\Lambda G(\xi^{*,1}))$ и (б) – $\cos(\Lambda G(\xi^{*,2}))$.

Объем Г обходит множество $\varpi^2 - \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ сверху при $\varpi > 0$ и снизу при $\varpi < 0$. Следовательно, условие обхода снизу $w_2 = 0$ эквивалентно тому, что $\alpha_2\varpi_{*,j} < 0$ или в силу (65)

$$\tau - z_1 > 0.$$

Это легко интерпретировать физически: след находится за телом.

Таким образом, чисто геометрическое рассмотрение в рамках предлагаемого метода позволило установить, что в некоторой области пространства существуют волны двух типов и построить соответствующую волновую картину.

Обратимся к извлечению амплитудной информации, для чего используем формулу (30). Рассмотрим интеграл по области вблизи точки $\xi^{*,j}$ более детально. Будем считать, что эта точка не близка к точке перегиба L (окрестность точки перегиба необходимо рассматривать отдельно). В соответствии с (28), (29), введем координаты

$$w_1 = \alpha_1(\varpi - \xi_1),$$
$$w_2 = \alpha_2\left(\varpi^2 - \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\right), \tag{73}$$
$$w_3 = \varpi - \varpi_{*,j}(\lambda).$$

При выборе

$$\alpha_1 = -z_1 + \frac{\tau - z_1}{2\varpi_{*,j}^2(\lambda) - 1}, \qquad \alpha_2 = -\frac{z_2\varpi_{*,j}}{\sqrt{\varpi_{*,j}^2 - 1}} \tag{74}$$

функция G записывается как

$$G \approx G(\xi^{*,j}) + w_1 + w_2 + \frac{1}{2}\beta w_3^2, \tag{75}$$

$$\beta = \frac{\varpi_{*,j}(\lambda)(2\varpi_{*,j}^2(\lambda) - 3)}{\left(\varpi_{*,j}^2(\lambda) - 1\right)^{3/2}}. \tag{76}$$

Амплитудный множитель в (65) выписывается с помощью (33) при $\mu_1 = \mu_2 = -1$. Определитель якобиана легко вычисляется:

$$J = \frac{1}{z_2}\left(z_1 - \frac{\tau - z_1}{2\varpi_{*,j}^2(\lambda) - 1}\right)^{-1}.$$

Итоговое выражение достаточно громоздко, и мы его здесь не приводим.

Точка стационарной фазы на σ_2'. Переходной процесс, вызванный началом движения тела. Выберем точку $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \varpi_*) \in \sigma_2'$, определяемую действительными параметрами ϖ_*, φ как

$$\xi_1^* = \varpi_*^2\cos\varphi, \qquad \xi_2^* = \varpi_*^2\sin\varphi. \tag{77}$$

Нормаль $\mathbf{b}$ к σ_2' в этой точке есть

$$\mathbf{b} = (-\cos\varphi, -\sin\varphi, 2\varpi_*).$$

Условие (19) означает, что векторы $\nabla G = (z_1, z_2, -\tau)$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т.е.

$$(z_1, z_2) = \frac{\tau}{2\varpi_*}(\cos\varphi, \sin\varphi). \tag{78}$$

Очевидно, σ_2' является дисперсионной кривой для гравитационных волн в глубокой жидкости. Групповая скорость на частоте ϖ_* есть $1/(2\varpi_*)$, поэтому (78) описывает множество точек, до которых доходит импульс из начала координат на частоте ϖ_* за время τ. Заметим, что точке с координатами (z_1, z_2, τ) соответствует частота

$$\varpi_*(z_1, z_2, \tau) = \frac{\tau}{2\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}. \tag{79}$$

Итак, для почти любой точки $z = (z_1, z_2, \tau)$ имеется точка ξ^* стационарной фазы на σ_2', и формулы (79), (78) и (77) позволяют эту точку найти.

В соответствии с (20) введем координаты

$$w_1 = \alpha\left(\varpi^2 - \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\right),$$

$$w_2 = (\xi_1 - \varpi_*^2\cos\varphi)\cos\varphi + (\xi_2 - \varpi_*^2\sin\varphi)\sin\varphi,$$

$$w_2 = (\xi_1 - \varpi_*^2\cos\varphi)\sin\varphi - (\xi_2 - \varpi_*^2\sin\varphi)\cos\varphi.$$

При

$$\alpha = -\frac{\tau}{2\varpi_*} = -\sqrt{z_1^2 + z_2^2} \tag{80}$$

фазовую функцию G удается записать как

$$G \approx G(\xi^*) + w_1 + \frac{1}{2}(\beta_2 w_2^2 + \beta_3 w_3^2), \tag{81}$$

где

$$G(\xi^*) = -\frac{\tau^2}{4\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \tag{82}$$

$$\beta_2 = \frac{\tau}{4\varpi_*^3} = \frac{2(z_1^2 + z_2^2)^{3/2}}{\tau^2},$$
$$\beta_3 = -\frac{\tau}{2\varpi_*^3} = -\frac{4(z_1^2 + z_2^2)^{3/2}}{\tau^2}. \tag{83}$$

Условие того, что точка ξ^* дает вклад в асимптотику, состоит в том, что $w_1 = 0$ обходится исходным объемом интегрирования снизу. Как и раньше, это условие дается неравенством $\alpha\varpi_* < 0$, т.е. неравенством $\tau > 0$, гарантирующим причинность.

Перепишем F в виде (24) вблизи ξ^*:

$$F(w_1, w_2, w_3) \approx Cw_1^{-1},$$

$$C = \frac{Va^2 i\alpha}{8\pi^3 v^4}\frac{\varpi_*\xi_1^*}{(\varpi_* - \xi_1^*)} = \frac{Va^2 i\alpha}{16\pi^3 v^4}\frac{\tau^2\cos\varphi}{\tau\cos\varphi - 2\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}. \tag{84}$$

Асимптотика соответствующей компоненты волнового поля дается подстановкой (84), (83), (82) в (22). Определитель якобиана J легко вычисляется:

$$J = -\tau^{-1}.$$

Мы приходим к выводу о том, что вклад точек стационарной фазы на σ_2' представляет собой цилиндрически расходящуюся от начала координат волну, источник которой — сосредоточенная сила, действующая в момент $\tau = 0$. Можно интерпретировать этот вклад как переходный процесс, связанный с началом движения тела. Данная цилиндрическая волна промодулирована по углу φ.

Заметим, что знаменатель (84) имеет особенность при некоторых z. Это означает, что асимптотическая формула (22) не работает. Причина заключается в том, что при таких z точка стационарной фазы на σ_2' сливается с точкой стационарной фазы на $\sigma_1' \cap \sigma_2'$. При этом нарушаются условия использования обеих асимпотик, и в окрестности таких точек необходимо строить более сложные переходные асимптотики.

Остальные особые точки. В настоящей работе мы опускаем рассмотрение ряда особых точек. А именно, при $z_2 = 0$, $z_1 = \tau$ все точки плоскости σ_1' становятся точками стационарной фазы на σ_1'. При этом нарушается принцип локальности, и необходимо вычислять двумерный интеграл по всей σ_1'. Данный интеграл будет описывать поле, сопровождающее движущееся тело.

Кроме того, мы не рассматриваем окрестность начала координат в пространстве ξ. Как мы упоминали, данная точка не попадает под классификацию особых точек, проделанную в статье. Однако и для этой особой точки удается построить асимптотический вклад похожими методами. Соответствующий вклад дает поведение поля на низких частотах.

Наконец, мы не рассматриваем процесс слияния нескольких особых точек (наиболее интересно было бы рассмотреть слияние $\xi^{*,1}$ и $\xi^{*,2}$). Для такого рассмотрения необходимо оставить в ряду Тейлора для G больше степенных членов. Очевидно, переходная зона будет описываться с помощью функции Эйри.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы предлагают достаточно общую методику построения асимптотических оценок трехмерных интегралов типа Фурье. Методика годится для аналитических подынтегральных функций. Основное внимание уделяется влиянию сингулярностей подынтегральных функций. Показано, что в общем случае работает принцип локальности, т.е. оценка интеграла определяется несколькими особыми точками, основные типы которых перечислены в работе. Важно отметить, что особые точки и точки, в которых подынтегральное выражение сингулярно, — это разные множества.

Для некоторых видов особых точек существуют геометрические условия того, что данная точка дает вклад в интеграл. Эти условия отражают взаимное расположение начального объема интегрирования и сингулярностей.

Для основных типов особых точек построены в общем виде первые члены асимптотических разложений интеграла. Всякий раз строится удобная локальная система координат, и интеграл сводится к повторному, в котором по некоторым координатам интеграл является перевальным, а по остальным — типа гамма-функции.

Описанная техника опробована на классической задаче о волнах Кельвина на поверхности глубокой жидкости. Показано, что волны за буксируемым телом описываются одним из типов

особых точек: точками стационарной фазы на пересечении сингулярностей. Известный угол (70), в котором эти волны локализованы, связан с положением точки перегиба на линии пересечения сингулярностей.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда 25-22-00106, https://rscf.ru/project/25-22-00106/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Martin P.A.* Kelvin's method of stationary phase? // Wave Motion. 2025. V. 134. P. 103481.
2. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.
3. *Mironov M.A., Shanin A.V., Korolkov A.I., Kniazeva K.S.* Transient processes in a gas/plate structure in the case of light loading // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2021. V. 477. P. 20210530.
4. *Assier R.C., Shanin A.V., Korolkov A.I.* A contribution to the mathematical theory of diffraction: A note on double fourier integrals // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2022. V. 76. № 1. P. 1–47.
5. *Shanin A.V., Assier R.C., Korolkov A.I., Makarov O.I.* Double Floquet-Bloch transforms and the far-field asymptotics of Green's functions tailored to periodic structures // Physical Review B. 2024. V. 110. № 2. P. 024310.
6. *Poincare H.* Sur la diffraction des ondes electriques: ? propos d'un article de M. Macdonald // Proceedings of the Royal Society of London. 1904. V. 72. № 477–486. P. 42–52.
7. *Павлов В.И., Сухоруков А.И.* Переходное излучение акустических волн // Успехи физ. наук. 1985. Т. 147. № 1. С. 83–115.
8. *Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е.* Особенности генерации волн источником, движущимся по одномерной гибкой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Акустич. журн. 2016. Т. 62. № 6. С. 639–647.
9. *Руденко О.В., Гусев В.А.* Движущийся объект: спектры сигналов пассивной, активной локации и переходное излучение // Акустич. журн. 2020. Т. 66. № 6. С. 599–609.
10. *Thomson W.* On ship waves // Proceedings of the Institution of mechanical engineers. 1887. V. 38. № 1. P. 409–434.
11. *Lord Kelvin.* Deep sea ship-waves // Proceedings of the Royal society of Edinburgh. 1906. V. 25. № 2. P. 1060–1084.
12. *Lamb H.* LXV. On wave-patterns due to a travelling disturbance // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1916. V. 31. № 186. P. 539–548.
13. *Lamb H.* Hydrodynamics. New York, Dover Publications, 1945.
14. *Stoker J.J.* Water waves: The mathematical theory with applications. Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
15. *Wehausen J.V., Laitone E.V.* Surface waves. Fluid Dynamics/Str?mungsmechanik, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 446–778.
16. *Liu M., Tao M.* Transient ship waves on an incompressible fluid of infinite depth // Physics of Fluids. 2001. V. 13. № 12. P. 3610–3623.
17. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных. М.: Наука, 1992.
18. *Huybrechs D., Vandewalle S.* The construction of cubature rules for multivariate highly oscillatory integrals // Mathematics of computation. 2007. V. 76. № 260. P. 1955–1980.
19. *Chapman C.J.* The wavenumber surface in blade–wortex interaction // Proceedings of the IUTAM symposium on diffraction and scattering in fluid mechanics and elasticity, Manchester, UK 2000, ed. by Abrahams I.D., Martin P.A., Simon M.J. 2002. P. 169–178.

Asymptotic evaluation of three-dimensional integrals with singularities in application to wave phenomena

A. V. Shanin[a], A. Yu. Laptev[a,*]

[a]*Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

**e-mail: laptev97@bk.ru*

We consider a three-dimensional Fourier integral in which the exponent in the exponential factor is the product of some phase function and a large parameter. The asymptotics of this integral is sought when the large parameter tends to infinity. In the one-dimensional case, the asymptotics of such an integral is constructed by the points of stationary phase and singularities of the integrand. The three-dimensional case is more complicated: special points such as points of stationary phase in the domain, on singularity, on the crossing of singularities, points of triple crossing of singularities, and also conical points of the singularities, can contribute to the asymptotics. For all these types of singularities, topological conditions for the existence of nonzero asymptotics are constructed, and the asymptotics themselves are derived. The proposed technique is tested on the example of the classical problem of Kelvin waves on the surface of a deep fluid behind a towed body.

Keywords: stationary phase method, multivariate complex analysis, asymptotic methods, Kelvin waves